

دینامیک غیر خطی و آشوب

وکاربردهای آن در مهندسی پزشکی



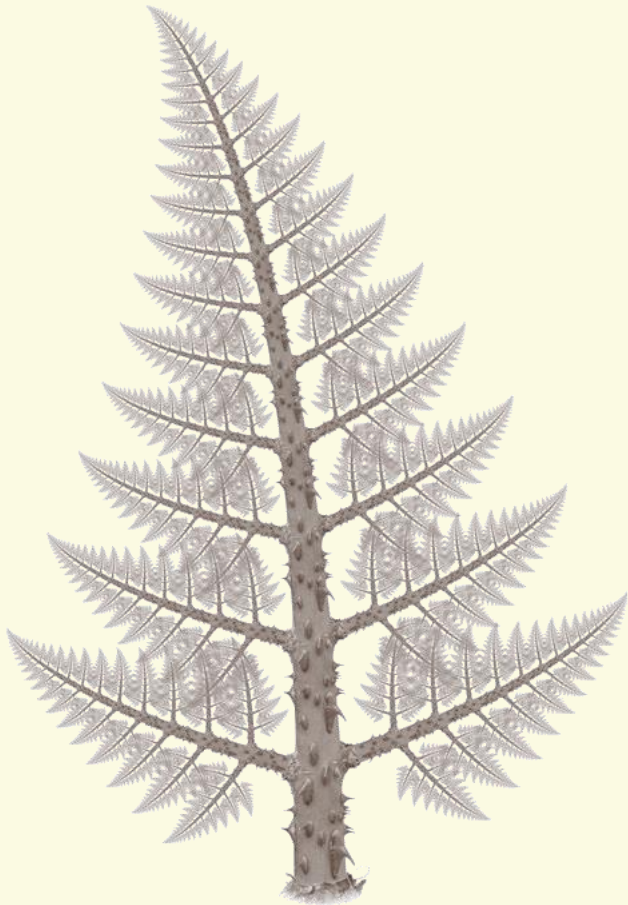
مبحث اول

نمونه‌هایی از سیستم‌های آشوبناک



فهرست مطالب

- ☒ معرفی مفاهیم و اصطلاحات
- ☐ سیستم الکتریکی غیر خطی
- ☐ مدلی از رشد جمعیت بیولوژیکی
- ☐ مدل همرفت سیال: مدل لورنز
- ☐ جمع بندی



آشوب (chaos)

رفتارهایی **ظاهرا** پیچیده و شبه تصادفی که از سیستم‌های **deterministic** ، تقریبا فاقد نویز و بسیار ساده حاصل می‌گردد.

❖ عوامل رفتارهای (ظاهرا) پیچیده:

- ✓ اثر نویز بر سیستم
- ✓ پیچیدگی (complexity) سیستم که با درجات آزادی بالا مشخص می‌گردد.
- ✓ آشوب

مفاهیم و مباحث آشوب به توجیه این دوگانگی ظاهری (یعنی **randomness** و **determinism**) می‌پردازد.

سیستم‌های آشوبناک (chaotic)

❖ ویژگی‌های سیستم‌های آشوبناک:

- ✓ سیستم‌های دینامیک غیرخطی هستند.
- ✓ Deterministic هستند.
- ✓ ساده و با درجات آزادی کمی هستند (پیچیده نیستند)

در ادامه به معرفی مفاهیم **دینامیک**، سیستم‌های خطی و غیرخطی ، **درجات آزادی** و سیستم‌های ساده و پیچیده می‌پردازیم.

❖ سیستم‌های دینامیک

❖ سیستم‌های خطی و غیرخطی

❖ سیستم‌های deterministic

سیستم‌هایی هستند که اطلاع دقیق از شرایط سیستم در یک زمان، امکان پیش‌بینی دقیق رفتار آینده‌ی سیستم را فراهم می‌سازد.

❖ درجات آزادی و سیستم‌های ساده و پیچیده

عامل جذابیت آشوب

❖ فراهم شدن ابزار جدیدی برای تحلیل

مطالعه‌ی آشوب، ابزارهای مفهومی و نظری جدیدی در اختیار قرار می‌دهد که امکان درک و تحلیل رفتارهای پیچیده‌ای که پیش‌تر گیج‌کننده بودند را فراهم می‌سازد.

❖ جهان‌شمول بودن رفتارهای آشوبناک

رفتارهای آشوبناک جهان‌شمول (universal) به نظر می‌رسند. از این رو، آموزه‌های جهان‌شمول حاصل از انواعی از سیستم‌ها (مثل مدارهای الکتریکی یا مدل‌های ریاضی ساده) را می‌توان بی‌درنگ برای درک و تحلیل انواعی دیگر از سیستم‌ها (نظیر سلول‌های ضربان‌ساز قلب) به کار برد.

فهرست مطالب

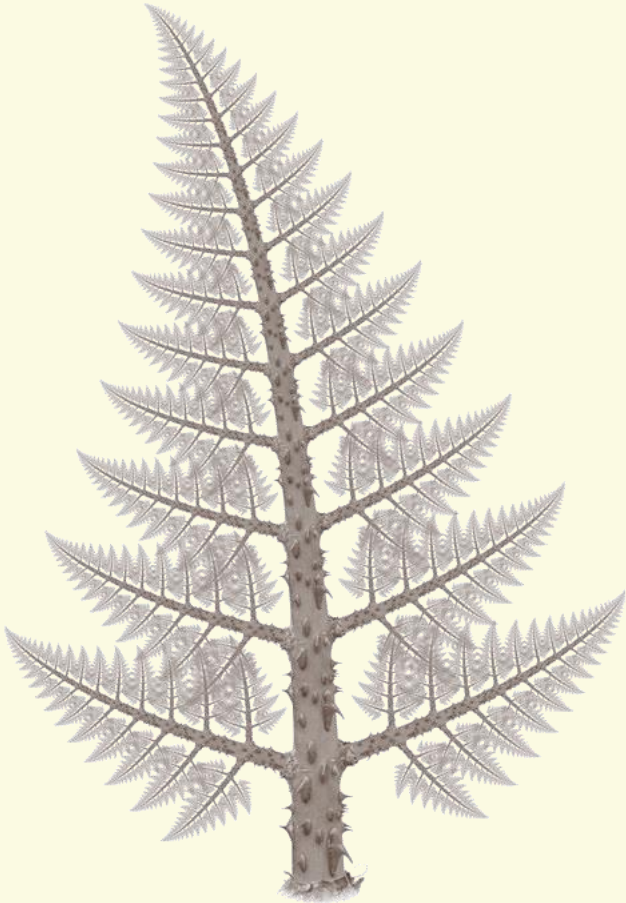
☒ معرفی مفاهیم و اصطلاحات

☐ سیستم الکتریکی غیر خطی 

☐ مدلی از رشد جمعیت بیولوژیکی

☐ مدل همرفت سیال: مدل لورنز

☐ جمع بندی



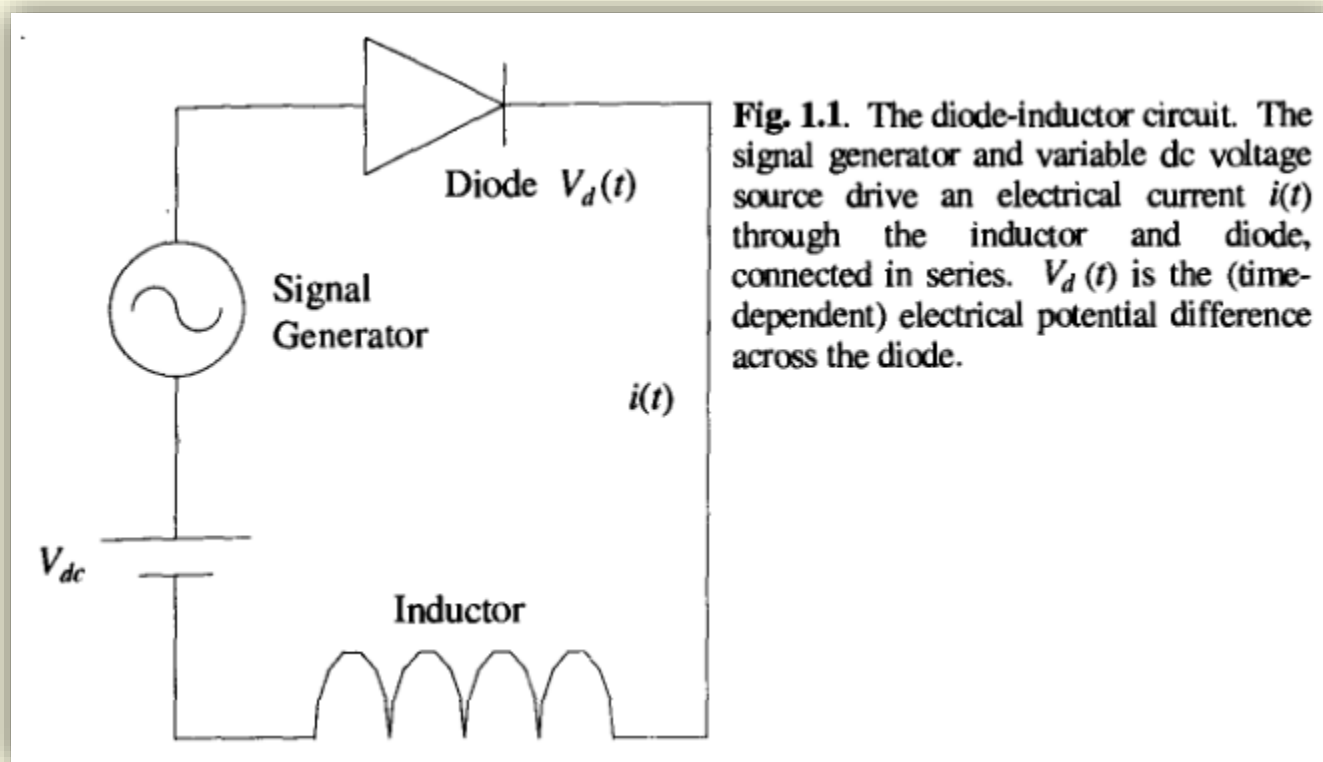
سیستم الکتریکی غیر خطی

❖ علت انتخاب این مثال:

تا نشان دهیم: رفتارهای آشوبناک در سیستم‌های واقعی رخ می‌دهد و آشوب محدود به مدل‌های عددی و نظری نیست.

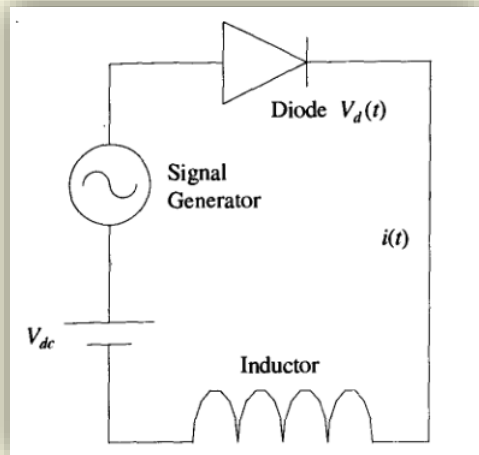
تا نشان دهیم: رفتارهای آشوبناک در سیستم‌های بسیار ساده رخ می‌دهد.

معرفی مدار:



نحوه‌ی عملکرد مدار: تجزیه و تحلیل اجزاء

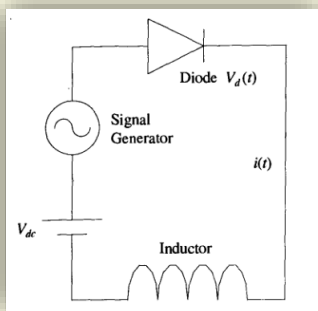
در این بخش به معرفی اجزا و نحوه‌ی نقش‌آفرینی آنها خواهیم پرداخت:



❖ دیود

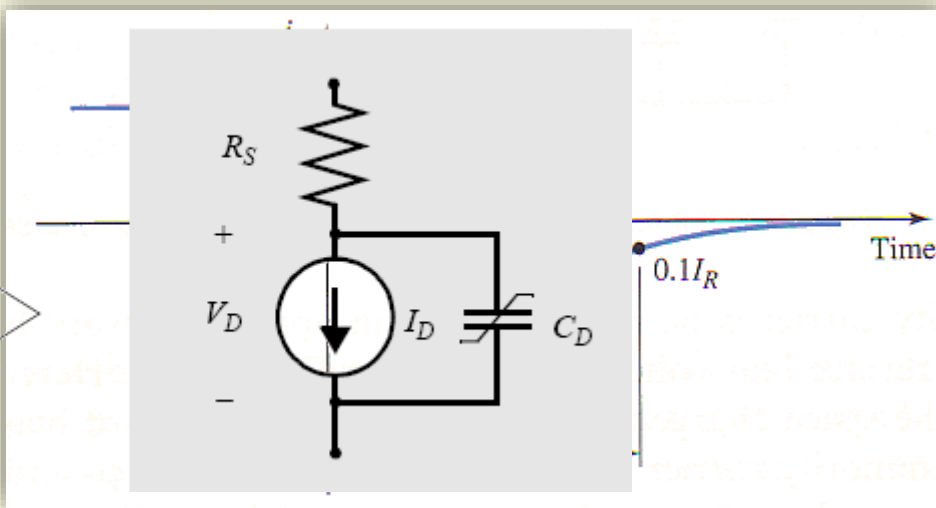
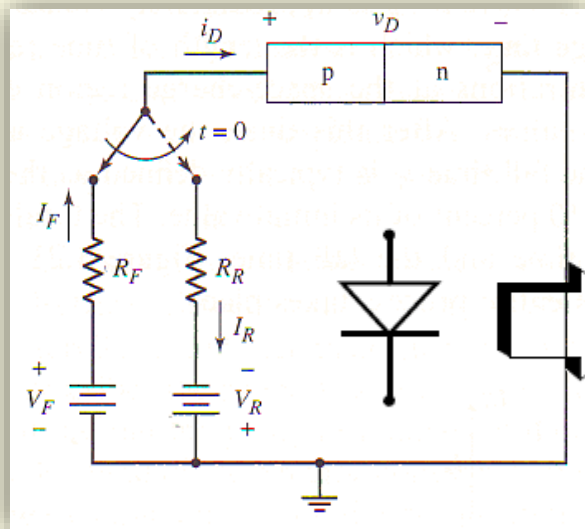
❖ سلف

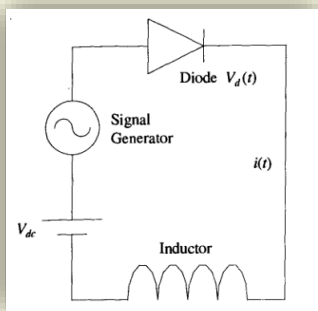
❖ مولد سیگنال و منبع dc



❖ معرفی دیود

- زمان بازیابی معکوس دیود (reverse recovery time)
- زمان قطع شدن دیود به جریان مستقیم وابسته است.
- انرژی ذخیره شده در خازن‌های معادل دیود

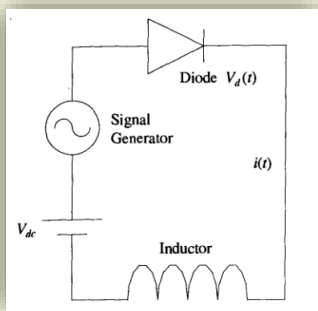




❖ معرفی سلف

- ولتاژ سلف با نرخ تغییرات جریان متناسب است.
 - ضریب این تناسب، به عنوان **اندوکتانس** سلف شناخته می‌شود.
 - بنابراین، سلف با تغییرات جریان در مدار مخالفت می‌کند.
- $$v_L(t) \propto \frac{d}{dt} i(t)$$
- $$v_L(t) = L \frac{d}{dt} i(t)$$
- ❖ سلف درجه آزادی جدیدی در مدار ایجاد می‌کند تا بروز آشوب امکان‌پذیر گردد.
 - ❖ سلف و ظرفیت خازنی دیود **متقابلا**، فرکانس خاصی را برای نوسان مقدار جریان و ولتاژ برمی‌گزینند.

چنانچه **دوره‌ی تناوب این نوسانات** تقریبا برابر **زمان بازیابی معکوس دیود** باشد اثرات غیرخطی مربوط به کلیدزنی بین بایاس مستقیم و بایاس معکوس اهمیت یافته و بروز آشوب ممکن می‌گردد.



❖ معرفی مولد سیگنال و منبع dc

○ مولد سیگنال سینوسی با دامنه V_0 و فرکانس f

$$v(t) = V_0 \sin(2\pi ft) + V_{dc}$$

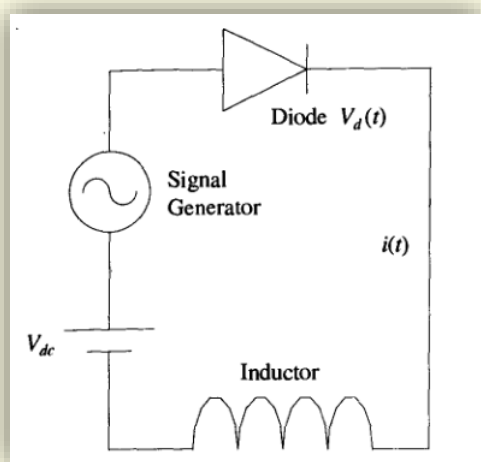
$$f: 20 - 70 \text{ kHz}$$

$$T: 14 - 50 \mu\text{sec}$$

○ دقت کنید که دوره‌ی تناوب نوسانات مولد سیگنال، چند برابر زمان بازیابی معکوس دیود است.

○ ولتاژ dc موجب می‌شود نوسانات ولتاژ منبع به جای صفر، حول V_{dc} باشد.

نحوه‌ی رفتار مدار

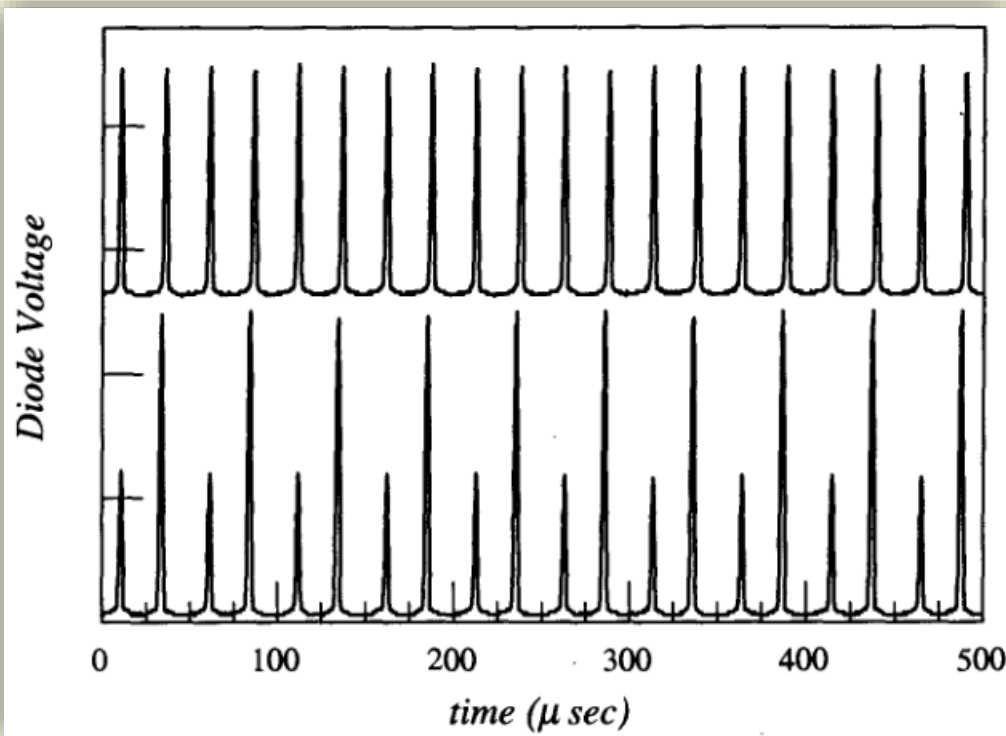


پارامتر کنترلی: دامنه‌ی ولتاژ سینوسی اعمالی (V_0)

پارامترهای مورد بررسی: ولتاژ دیود ($v_d(t)$) و جریان دیود ($i(t)$)

اگر V_0 حدود ۰/۵ ولت باشد: **period-1**

با افزایش ولتاژ به مقدار V_1 (در محدوده‌ی ۱ تا ۲ ولت): **period-2**



به منظور نمایش بهتر، اسیلوسکوپ به نحوی تنظیم شده است که ولتاژ بایاس معکوس به صورت انحراف به سمت بالا نمایش داده شود.

تغییر رفتار از رفتار **period-1** به رفتار **period-2** اصطلاحاً

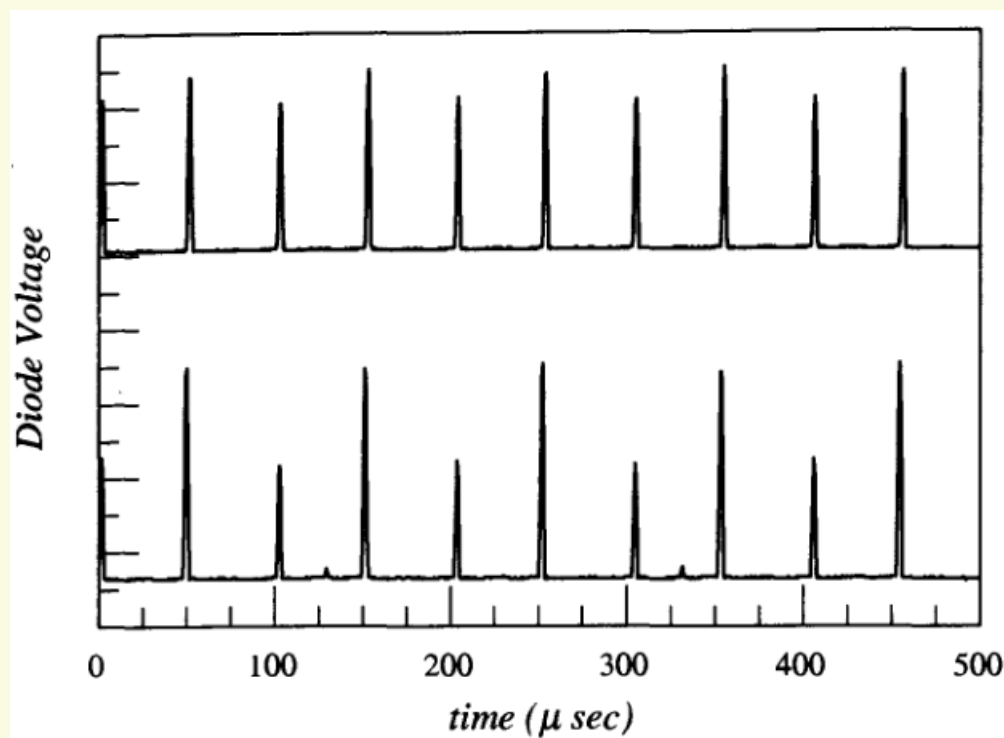
period doubling bifurcation نامیده می‌شود.

❖ تعريف bifurcation

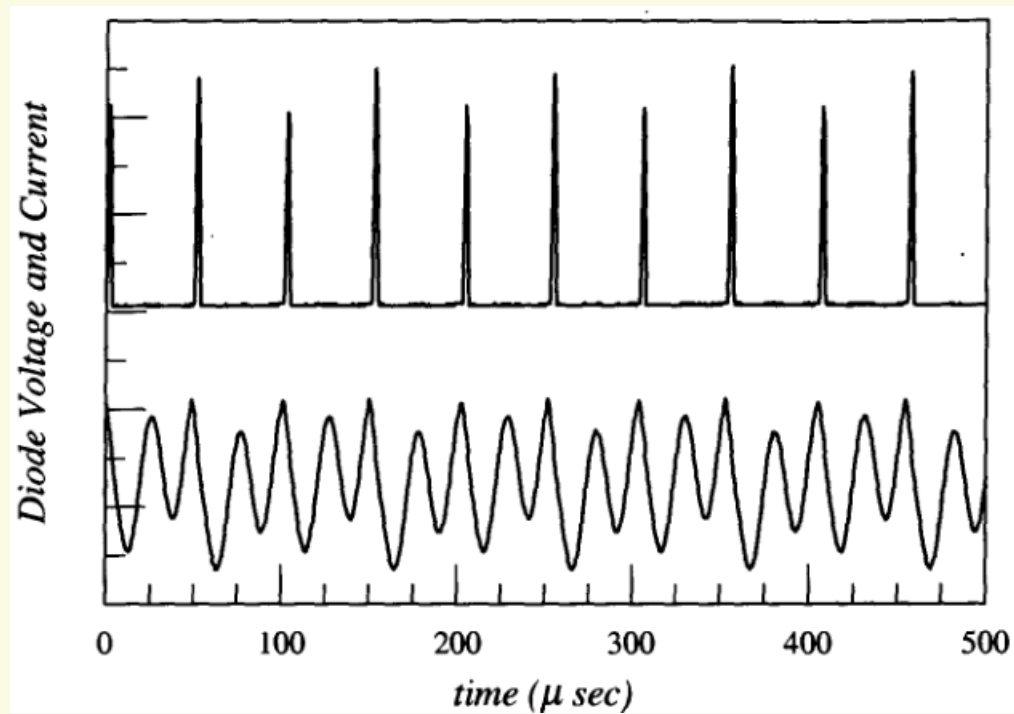
Bifurcation means a splitting into two parts. The term *bifurcation* is commonly used in the study of nonlinear dynamics to describe any sudden change in the behavior of the system as some parameter is varied. The bifurcation then refers to the splitting of the behavior of the system into two regions: one above, the other below the particular parameter value at which the change occurs.

❖ علت **period doubling** در این مدار چیست؟

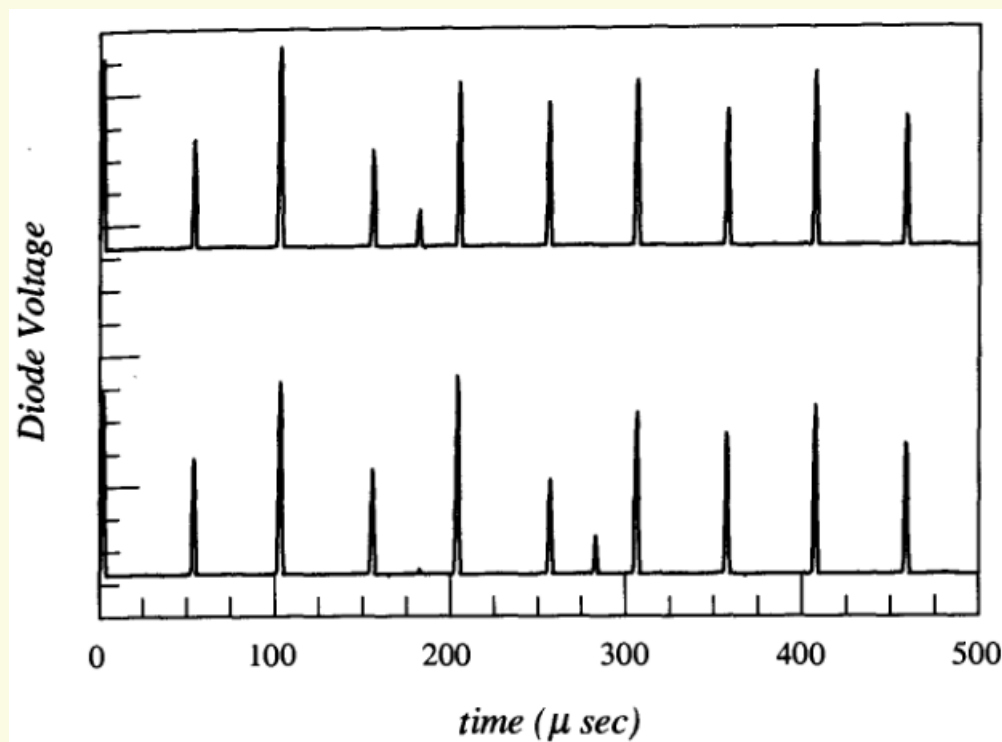
با افزایش بیشتر ولتاژ به مقدار V_2 ، رفتار **period_4** بروز می کند.
با **مقداری** افزایش ولتاژ، شاهد بروز رفتار **period-8** خواهیم بود.



شکل موج جریان در رفتار period-4

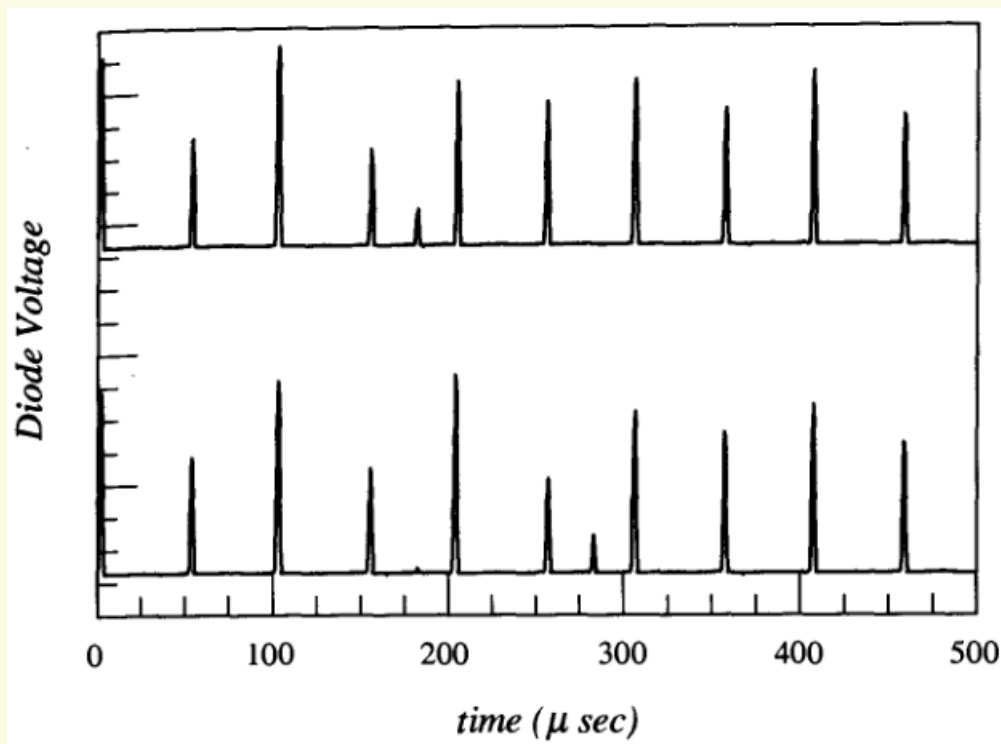


با اندکی افزایش ولتاژ دیگر، رفتار period-16 بروز می کند و این روند ادامه می یابد تا نهایتاً با افزایش ولتاژ از V_{∞} ، آشوب (CHAOS) بروز می کند.

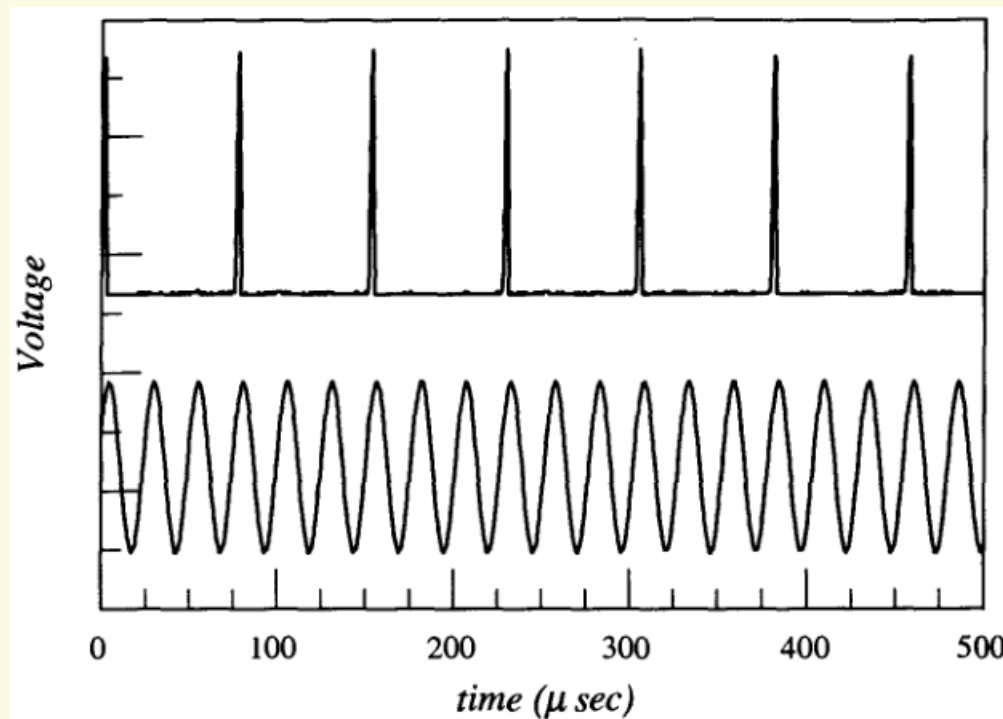


❖ از کجا معلوم که این آشوب است نه اثرات نویز در مدار؟

Divergence of nearby trajectories:



اگر دامنه‌ی ولتاژ ورودی پس از رسیدن به V_{∞} ، باز هم افزایش یابد شاهد پنجره‌های متناوب (periodic windows) در دل آشوب خواهیم بود.



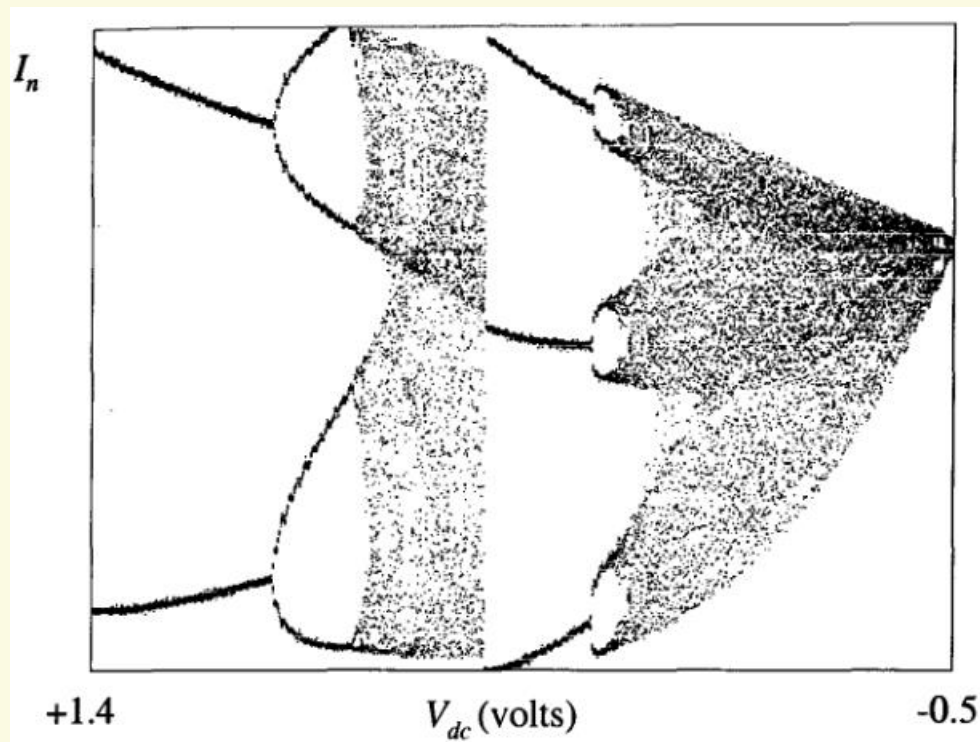
در محدوده‌ی ۲-۳ ولت: period-5

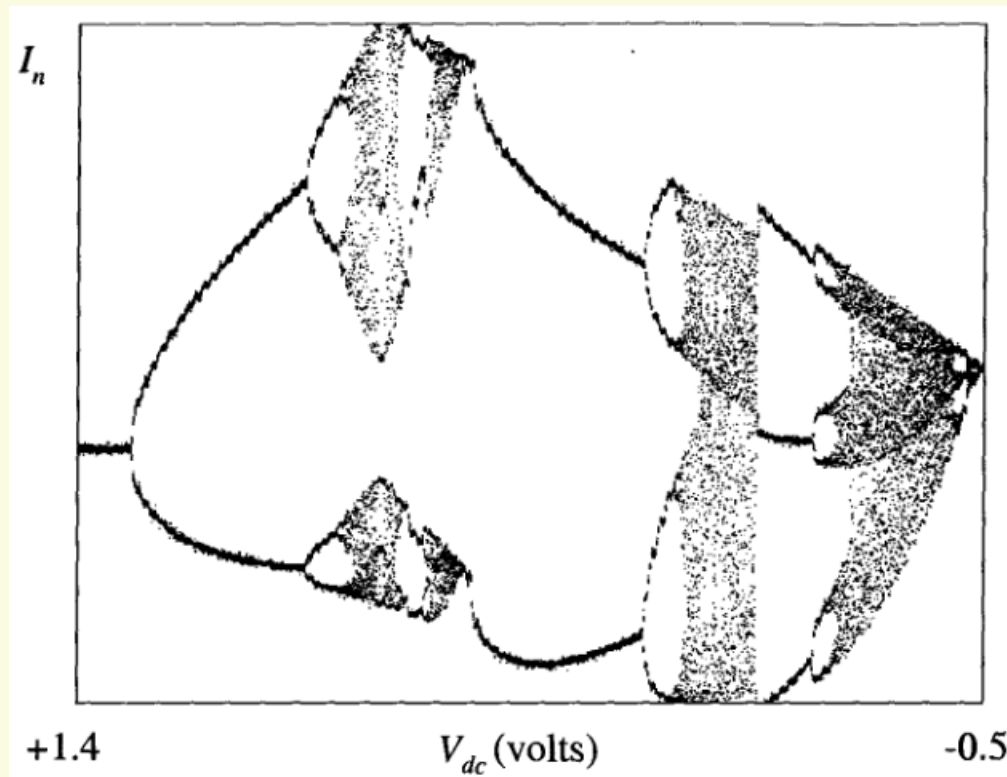
در محدوده‌ی ۳-۴ ولت: period-3

نمودار دوشاخه شدن:

پارامتر کنترلی: ولتاژ بایاس dc (پارامترهای f و V_0 ثابت هستند)

پارامتر مورد بررسی: مقدار قله‌ی شکل موج جریان





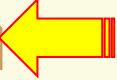
بر اساس این شکل، آیا گذر از رفتار متناوب (periodic) به آشوب همواره به واسطه‌ی period-doubling است؟

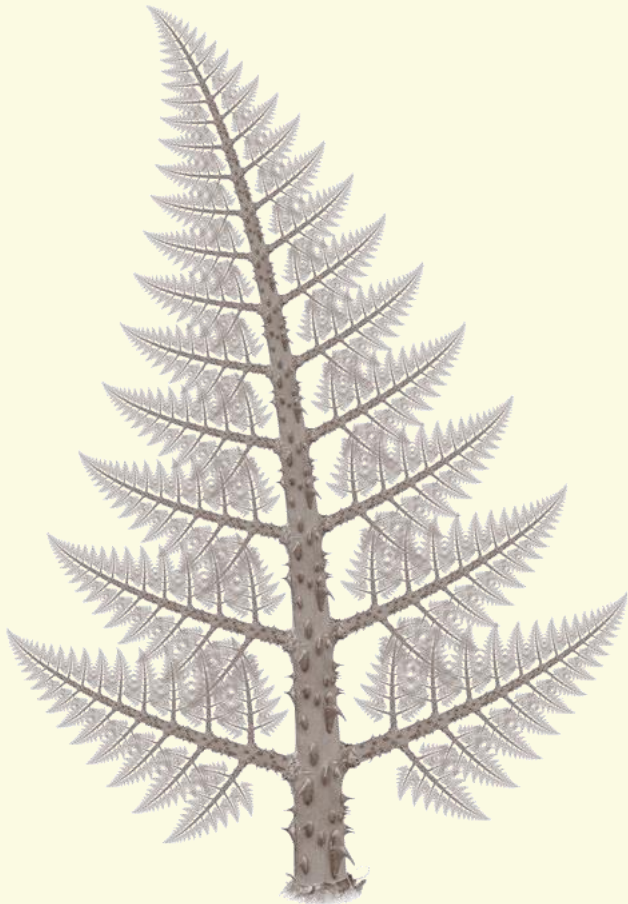


❖ جمع‌بندی مثال: ویژگی‌های کلیدی رفتار غیرخطی:

- ✓ تغییرات ناگهانی در رفتار کیفی سیستم با تغییر ناچیزی در پارامترها (مانند گذر از period-1 به period-2)
- ✓ تغییرات شناخته شده و قابل تکرار از رفتار منظم متناوب به رفتار نامنظم آشوبگونه (period doubling).
- ✓ قابل تمایز بودن رفتار نویزی از رفتار آشوبگونه بر مبنای چگونگی واگرایی تراژکتوری‌های نزدیک به هم.

فهرست مطالب

- ☒ معرفی مفاهیم و اصطلاحات
- ☒ سیستم الکتریکی غیر خطی
- ☐ مدلی از رشد جمعیت بیولوژیکی 
- ☐ مدل همرفت سیال: مدل لورنز
- ☐ جمع بندی



مدل ریاضی رشد جمعیت بیولوژیکی

گونه‌ای از حشرات در نظر بگیرید که تولد و مرگ آنها در یک فصل اتفاق می‌افتد. فرض کنید تعداد این حشرات در ابتدا N_0 باشد. می‌خواهیم تعداد حشرات را در سال بعد (N_1) تعیین کنیم. ساده‌ترین حدسی که ممکن است مطرح گردد:

$$N_1 = A N_0$$

A پارامتری است که به شرایط محیط (منابع غذایی، آب و شرایط عمومی هوا) بستگی دارد.

❖ اگر $A > 1$ باشد نشانگر رشد جمعیت است و اگر این روند ادامه یابد به انفجار جمعیت مالتوسی منجر خواهد شد.

❖ اگر $A < 1$ باشد نشانگر کاهش جمعیت است و اگر این روند ادامه یابد به انقراض آن گونه منجر خواهد شد.

❖ بیشتر بدانیم:



مالتوس معتقد بود جمعیت با تصاعد هندسی زیاد می شود
در حالی که تولید با تصاعد حسابی افزوده می شود.
در نتیجه، اگر ازدیاد جمعیت مهار نشود دنیا دچار کمبود
خوراک خواهد شد.

زمان :	ابتدا	۲۵ سال	۵۰ سال	۷۵ سال	۱۰۰ سال	۱۲۵ سال	۱۵۰ سال
جمعیت :	X	2X	4X	8X	16X	32X	64X
امکانات معیشت :	Y	2Y	3Y	4Y	5Y	6Y	7Y

از سوی دیگر می‌دانیم با رشد بیش از اندازه‌ی جمعیت،

❖ دیگر غذای کافی وجود نخواهد داشت؛

❖ شرایط برای شکار و صید آن گونه فراهم‌تر خواهد بود؛

که موجب محدود شدن جمعیت می‌گردد.

بنابراین لازم است با افزودن عبارت جدیدی، مدل اصلاح گردد. این عبارت باید:

✓ برای مقادیر کوچک N قابل چشم‌پوشی ولی با افزایش N ، نقش فزاینده‌ای یابد؛

✓ منفی باشد؛

در نتیجه:

$$N_1 = A N_0 - B (N_0)^2$$

$$N_{n+1} = A N_n - B (N_n)^2$$

حداکثر جمعیت ممکن: N^{max}

برای این که $N_{n+1} > 0$ باشد N_n نمی تواند از حداکثر مقدار زیر تجاوز نماید:

$$N^{max} = \frac{A}{B} \quad B = \frac{A}{N^{max}}$$

$$\Rightarrow N_{n+1} = A N_n - \frac{A}{N^{max}} (N_n)^2$$

$$\Rightarrow \frac{N_{n+1}}{N^{max}} = A \frac{N_n}{N^{max}} - A \left(\frac{N_n}{N^{max}} \right)^2$$

$$x_n = \frac{N_n}{N^{max}}$$

جمعیت سال n ام به صورت کسری از حداکثر جمعیت،

مقداری بین صفر و یک دارد.

$$\Rightarrow x_{n+1} = A x_n (1 - x_n) \equiv f_A(x_n)$$

f_A تابع تکرار (iteration function) نامیده می شود.

❖ نمودار هندسی تابع تکرار f_A به ازای مقادیر مختلف پارامتر A

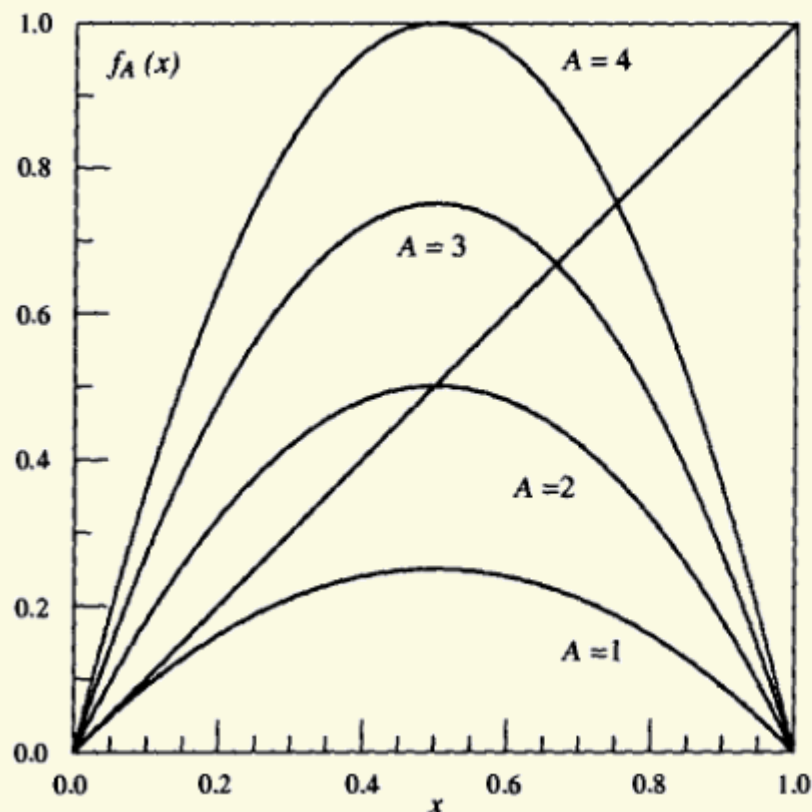


Fig. 1.10. The function $f_A(x)$ plotted as a function of x for various values of the parameter A . The diagonal line is a plot of $y = x$.

Logestic map

❖ تابع نگاشت تکراری (iterated map function):

$$f_A(x) \equiv x_{n+1} = A x_n (1 - x_n)$$

- چنانچه $0 \leq A \leq 4$ باشد هر مقدار x در محدوده‌ی $0 \leq x \leq 1$ به مقداری در همین محدوده نگاشت می‌شود.
- این تابع **Logestic map** نامیده می‌شود.
- دنباله‌ی مقادیر حاصل از این روند تکرار **trajectory** یا **orbit** نامیده می‌شود.

نقاط ثابت (fixed points)

x_A^* نقطه‌ی ثابت یک نگاشت تکراری است اگر:

$$x_A^* = f_A(x_A^*)$$

به نظر شما، زیرنویس A در نماد x_A^* نشانگر چیست؟



نقاط ثابت Logistic map را به دست آورید.



$$f_A(x) \equiv x_{n+1} = Ax_n(1 - x_n)$$

$$\Rightarrow x^* = Ax^*(1 - x^*) \quad \Rightarrow A(x^*)^2 - Ax^* + x^* = 0$$

$$\Rightarrow Ax^* \left(x^* - \left(1 - \frac{1}{A} \right) \right) = 0 \quad \Rightarrow \begin{cases} x^* = 0 \\ x^* = 1 - \frac{1}{A} \end{cases}$$

با توجه به شرط $0 \leq x \leq 1$ برای مدل رشد جمعیت بیولوژیکی،
برای $A < 1$ مدل تنها یک نقطه‌ی ثابت دارد زیرا نقطه‌ی ثابت دوم
در محدوده‌ی $0 \leq x \leq 1$ نیست.



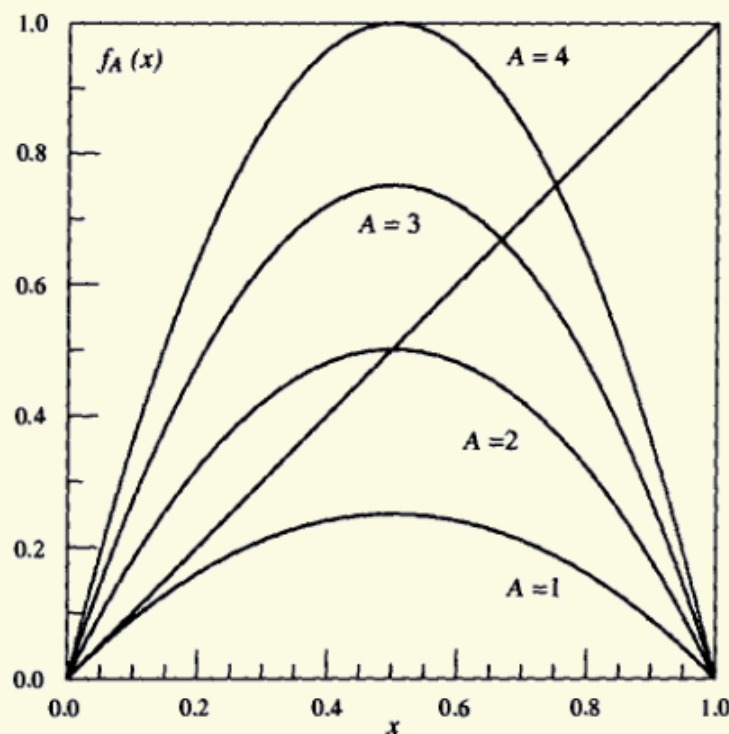


Fig. 1.10. The function $f_A(x)$ plotted as a function of x for various values of the parameter A . The diagonal line is a plot of $y=x$.

با توجه به شرط $0 \leq x \leq 1$ برای مدل رشد جمعیت بیولوژیکی،
برای $A < 1$ مدل تنها یک نقطه‌ی ثابت دارد زیرا نقطه‌ی ثابت دوم
در محدوده‌ی $0 \leq x \leq 1$ نیست.



روش هندسی تعیین تراژکتوری ($A < 1$)

با شروع از مقدار اولیه x_0 روی محور x ، خطی قائم رسم می‌کنیم. محل برخورد این خط قائم با تابع تکرار نشانگر مقدار x_1 است. حال از این نقطه، خطی افقی رسم می‌کنیم و محل برخورد آن با خط قطری $y = x$ را به دست می‌آوریم، $x = x_1$ دقیقاً در زیر این نقطه قرار دارد. از این نقطه باز خطی قائم رسم می‌کنیم تا محل برخورد آن با تابع تکرار $f_A(x)$ که نشانگر x_2 است تعیین گردد. این روند را ادامه می‌دهیم تا نقطه ثابت به دست آید.

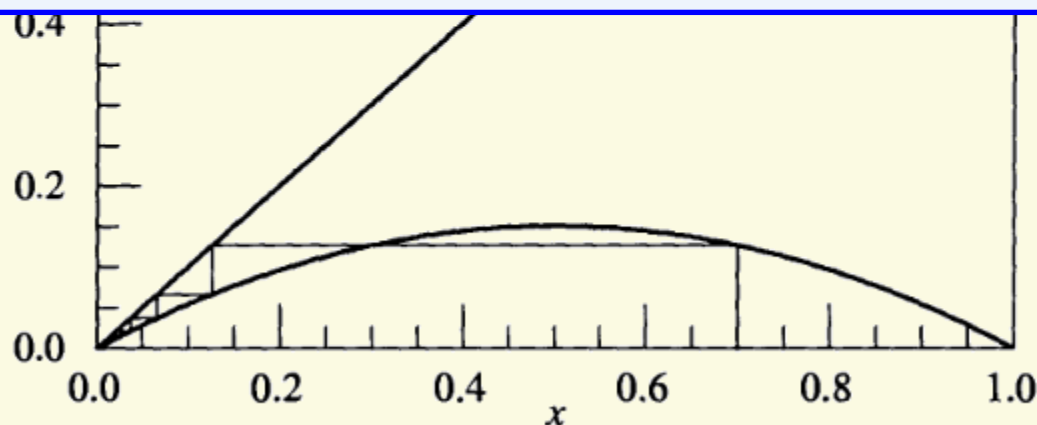


Fig. 1.11. A graphic representation of the iteration of Eq. (1.4-5) starting from $x_0 = 0.7$ with $A = 0.6$.

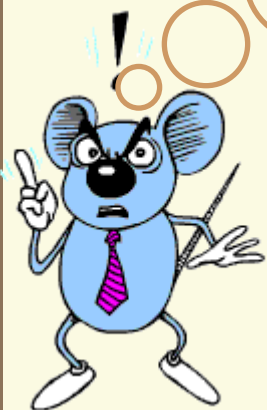
معرفی مفاهیم جاذب و بستر جاذب

برای $A < 1$ ، با شروع از هر مقدار دلخواه در محدوده‌ی صفر و یک، تراژکتوری یا orbit خواهیم داشت که به نقطه‌ی نهایی $x = 0$ ختم می‌شود.
نقطه‌ی $x = 0$ ، **جاذب (attractor)** تراژکتوری است.
محدوده‌ی $0 \leq x \leq 1$ ، **بستر جاذب (basin of attraction)** این جاذب می‌باشد.

تفسیر این موضوع در مدل بیولوژیکی چیست؟

اگر $A < 1$ باشد نسل در طی سالیان، منقرض خواهد شد.

با شروع از $x_0 = 1$ ، تراژکتوری چگونه خواهد بود؟



In more general terms, the attractor is that set of points to which trajectories approach as the number of iterations goes to infinity. As we shall see for more complicated systems, the system may have more than one attractor for a given parameter value. The basin of attraction for a particular attractor consists of that set of initial points $\{x_0\}$ each of which gives rise to a trajectory that approaches the attractor as n , the number of iterations, approaches infinity.

روش هندسی تعیین تراژکتوری ($1 < A < 3$)

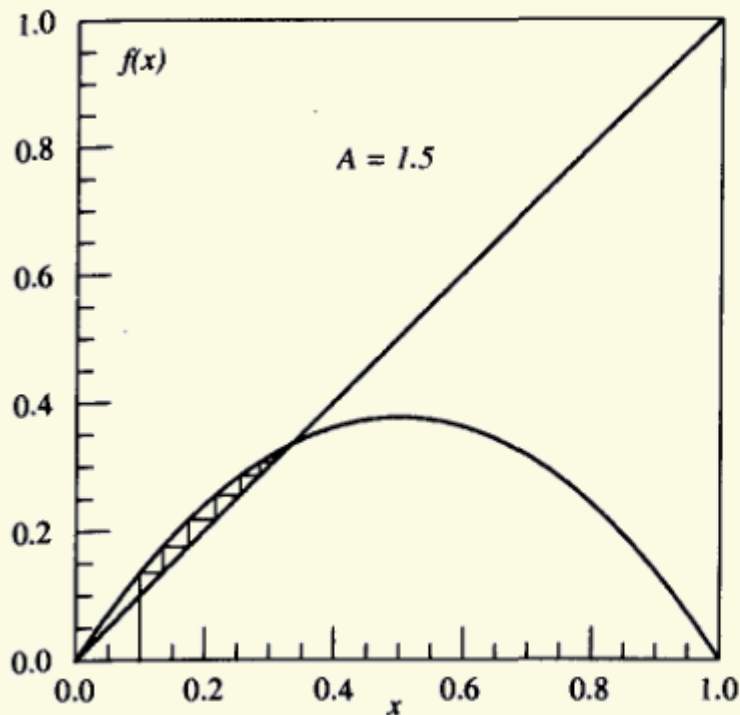


Fig. 1.12. Graphic representation of the iteration scheme with $A = 1.5$ and $x_0 = 0.10$. Note that the trajectory moves away from the fixed point at $x = 0$ and is attracted to the fixed point at $x = 1/3$.

در این شرایط، دو نقطه‌ی ثابت $x^* = 0$ و $x^* = 1 - 1/A$ داریم. $x^* = 0$ را نقطه‌ی ثابت دافع (repelling fixed point) گوییم زیرا اگر نقطه‌ی اولیه‌ی نزدیک آن در نظر بگیریم از آن دور می‌شود.



روش عددی تعیین تراژکتوری ($3 < A < 3.44948$)

Table 1.1.

Trajectory values* for $A = 3.1$ and $x_0 = 0.250$.

n	x_n	n	x_n
0	0.250	11	0.561
1	0.581	12	0.764
2	0.755	13	0.559
3	0.574	14	0.764
4	0.758	15	0.559
5	0.569	16	0.764
6	0.760	17	0.559
7	0.565	18	0.764
8	0.762	19	0.558
9	0.562	20	0.764
10	0.763	21	0.558

*The x values have been rounded off to three significant figures.

برخلاف حالت $1 < A < 3$ که در آن جاذب یک نقطه‌ی

$x^* = 1 - 1/A$ است، برای $3 < A < 3.44948$ ،

جاذب شامل دو نقطه خواهد بود.



روش هندسی تعیین تراژکتوری ($3 < A < 3.44948$)

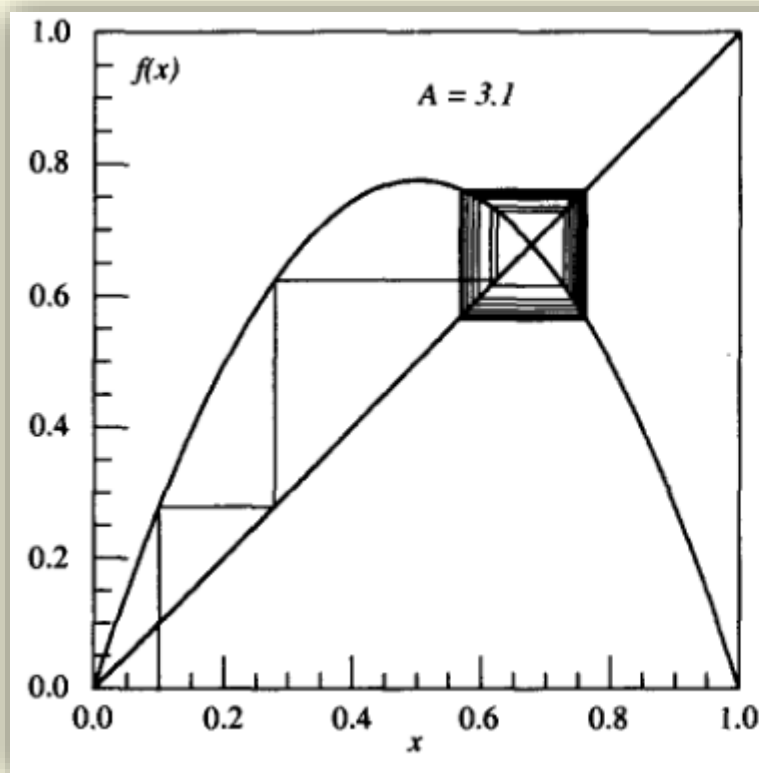


Fig. 1.13. Graphic representation of the iteration scheme leading to period-2 behavior. $A = 3.1$, $x_0 = 0.1$. The two attractor points lie at the top left and bottom right of the dark rectangular area.

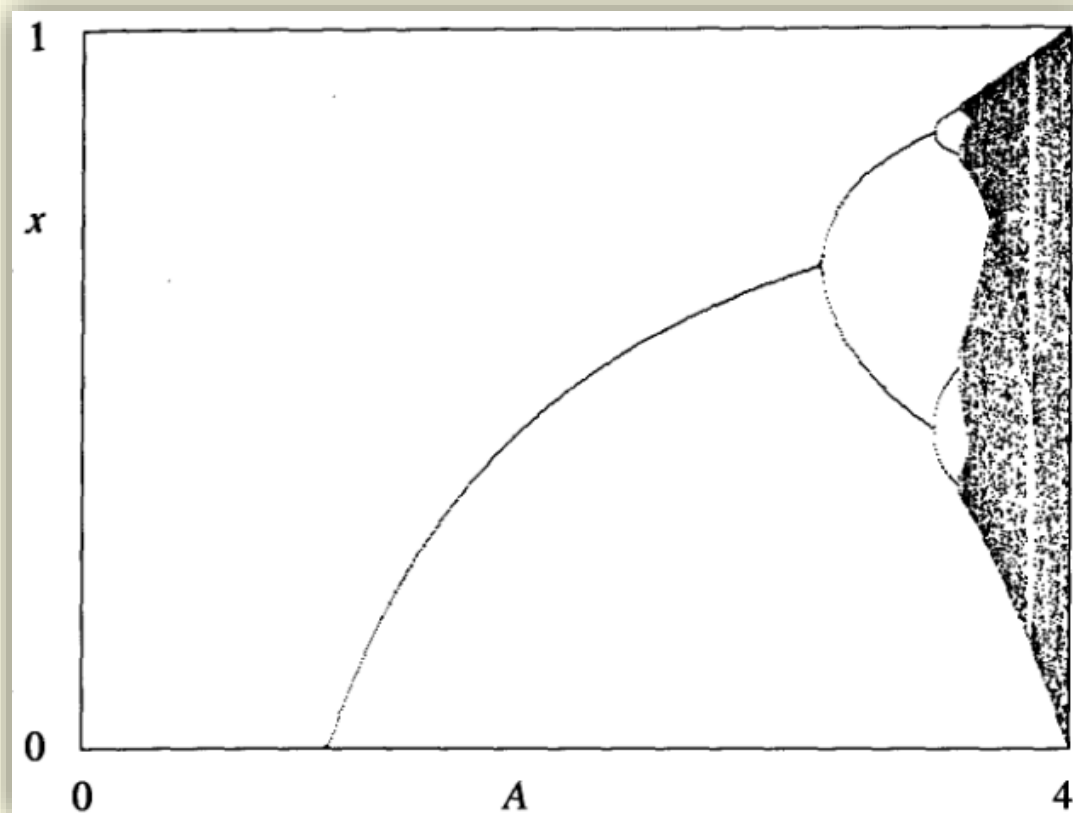
بستر جذب این جاذب دونقطه‌ای را تعیین نمایید.

محدوده‌ی $0 < x < 1$ جز نقطه‌ی $x = 1 - 1/A$.



نمودار دوشاخه شدن (bifurcation diagram)

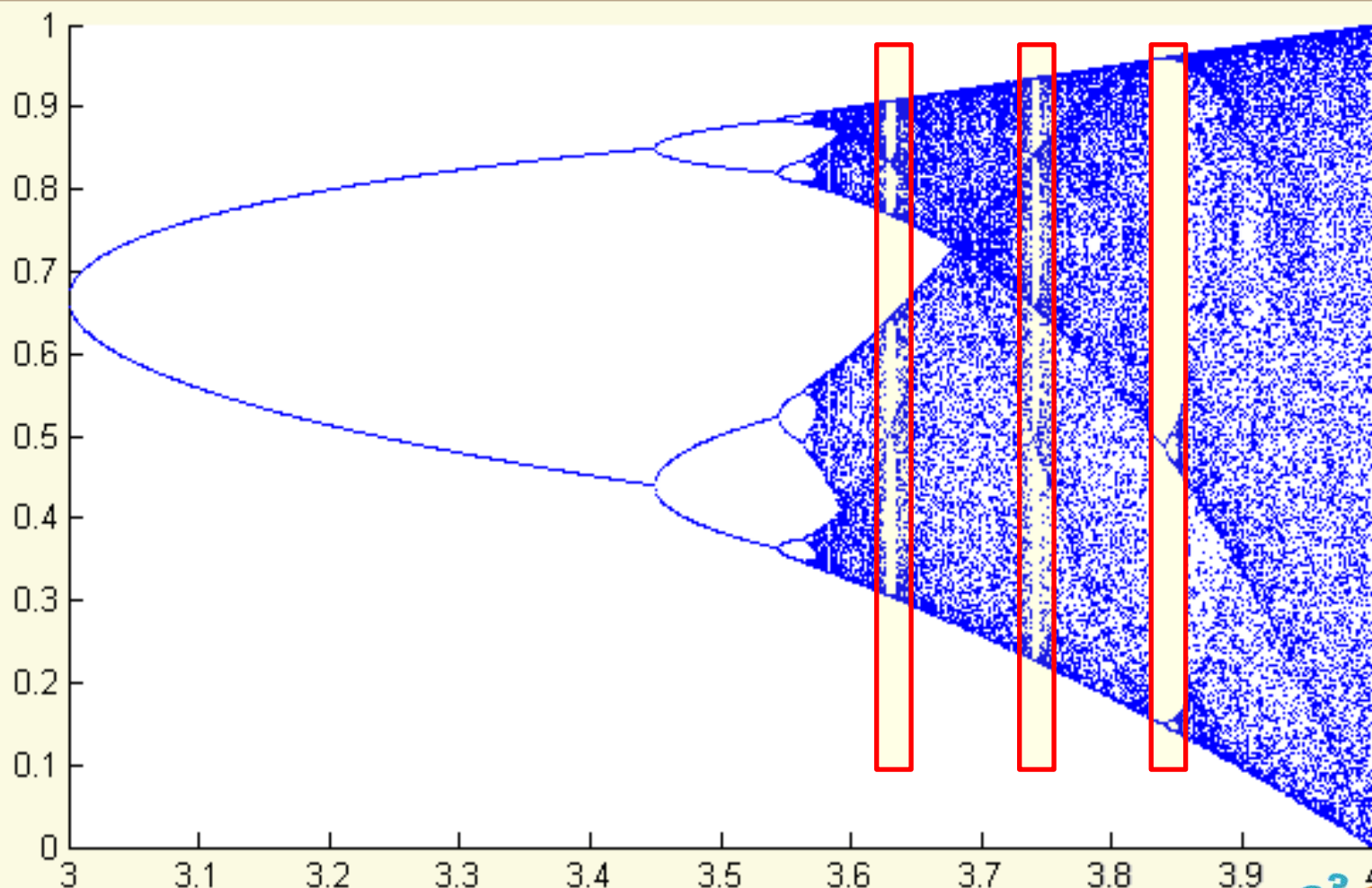
- ❖ برای هر مقدار A ، نقطه شروع x_0 در محدوده $0 < x < 1$ انتخاب می‌گردد.
- ❖ تابع نگاشت ۱۰۰ بار تکرار می‌شود تا گذار سپری شده و به وضعیت ماندگار برسد.
- ❖ ۱۰۰ مقدار بعدی x بر حسب A مربوطه رسم می‌شود.



برنامه‌ای برای ترسیم نمودار دوشاخه شدن

```
clc, clear all, close all,  
tic,  
A = 0:0.001:4;  
x0 = rand(1,length(A));  
for i = 1:1000,  
    x1 = A.*x0.*(1-x0);  
    x0 = x1;  
end  
X = zeros(1000,length(A));  
for i = 1:1000,  
    x1 = A.*x0.*(1-x0);  
    x0 = x1;  
    X(i,:) = x1;  
end  
figure, hold on,  
plot(A,X, '.b', 'Markersize',3),  
xlim([3 4])  
toc,
```

برنامه‌ای برای ترسیم نمودار دوشاخه شدن



این نواحی نشانگر چیست؟



چگونه می‌توان بررسی نمود که رفتار آشوبناک دیده شده برای Logistic map آشوب واقعی است یا آرتیفکت عددی مربوط به روند تکرار؟ 

با بررسی واگرایی تراژکتوری‌های نزدیک به هم (divergence of nearby trajectories)

Table 1.2.

Trajectories for the Logistic Map with $A = 3.99$.

n	x_n	x_n
0	0.4000	0.4010
1	0.9576	0.9584
2	0.1620	0.1591
3	0.5417	0.5338
4	0.9906	0.9929
5	0.0373	0.0280
6	0.1432	0.1085
7	0.4894	0.3860
8	0.9971	0.9456
9	0.0117	0.2052
10	0.0462	0.6507
11	0.1758	0.9069
12	0.5781	0.3368
13	0.9731	0.8912
14	0.1043	0.3870
15	0.3727	0.9465

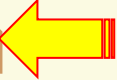
پس از حدود ۱۰ تکرار، تراژکتوری‌ها حدود ۰/۶ از هم فاصله می‌گیرند که تقریباً برابر میانگین مقادیر x است.

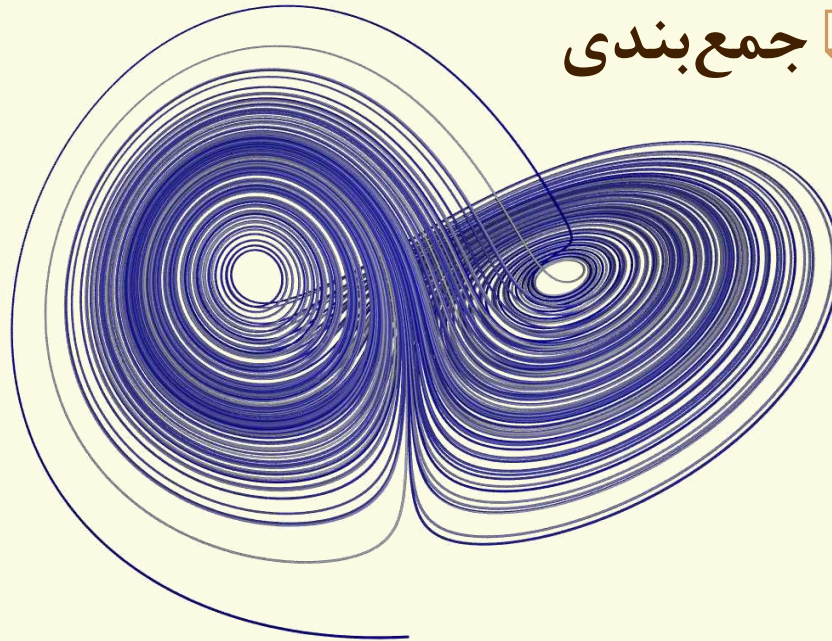
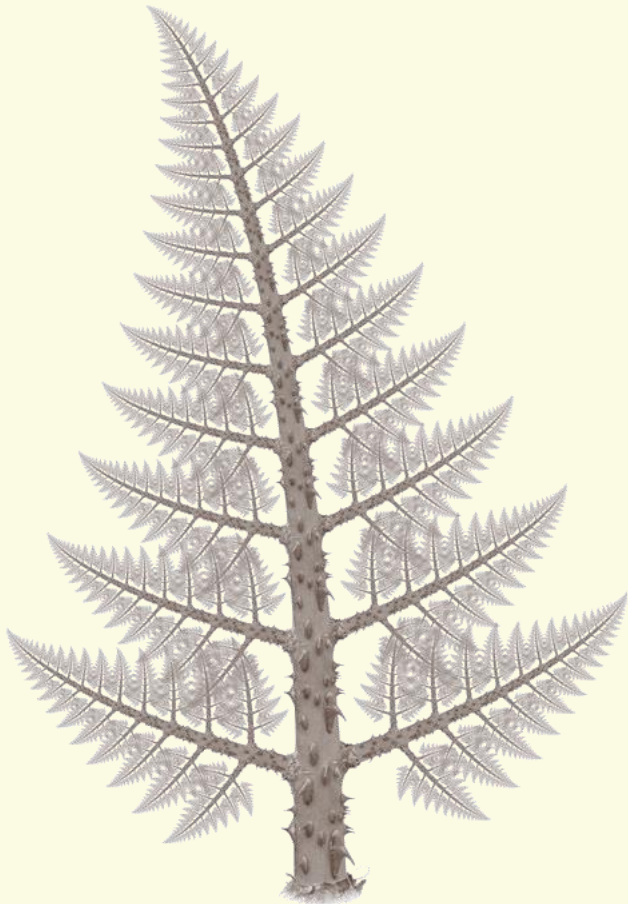
اگر اختلاف مقادیر اولیه نصف شود آیا تکرارهای مورد نیاز دو برابر خواهد شد؟ 

خیر، تنها یک تکرار اضافه‌تر.

The values in the table have been rounded to four significant figures.
The calculations were done with an accuracy of eight significant figures.

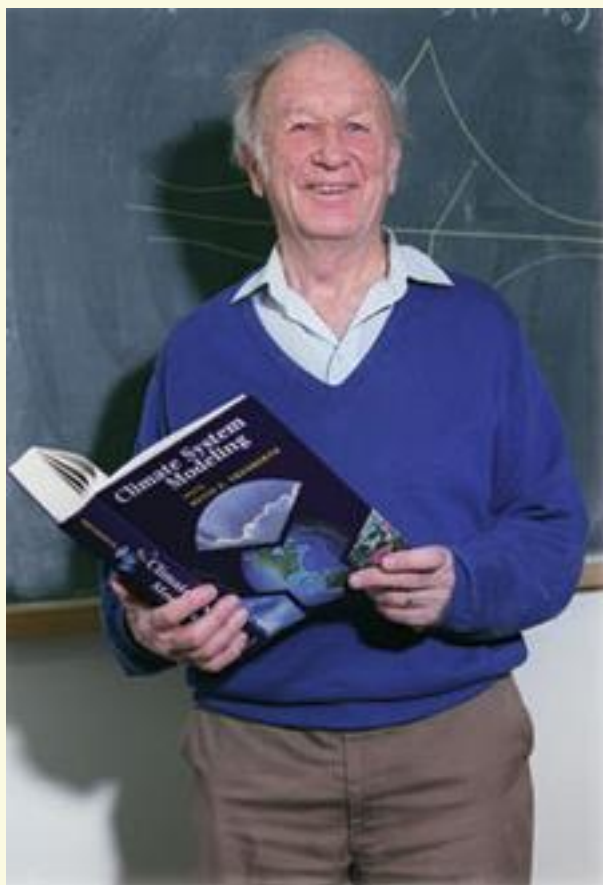
فهرست مطالب

- ☒ معرفی مفاهیم و اصطلاحات
- ☒ سیستم الکتریکی غیر خطی
- ☒ مدلی از رشد جمعیت بیولوژیکی
- ☐ مدل همرفت سیال: مدل لورنز 
- ☐ جمع بندی



مدل همرفت سیال (مدل Lorenz)

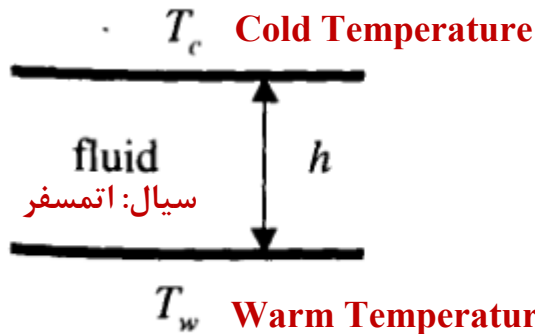
این مدل در سال ۱۹۶۳ توسط ادوارد لورنز که هواشناس MIT بود ارائه گردید:



Edward Lorenz: 1917-2008

برای معرفی مدل لورنز لازم است ابتدا اشاره‌ای به سلول ریلی-بنارد (Rayleigh-Benard cell) شود.

سلول ریلی-بنارد (Rayleigh-Benard Cell)



سطح زمین به دلیل تابش آفتاب،
گرم تر است.

Fig. 1.15. Left: a schematic diagram of a Rayleigh-Bénard cell. The cell extends indefinitely to the right and left and also in and out of the page. Right: the temperature as a function of height in the cell in the so-called conductive (nonconvective) state.

علت این نامگذاری:

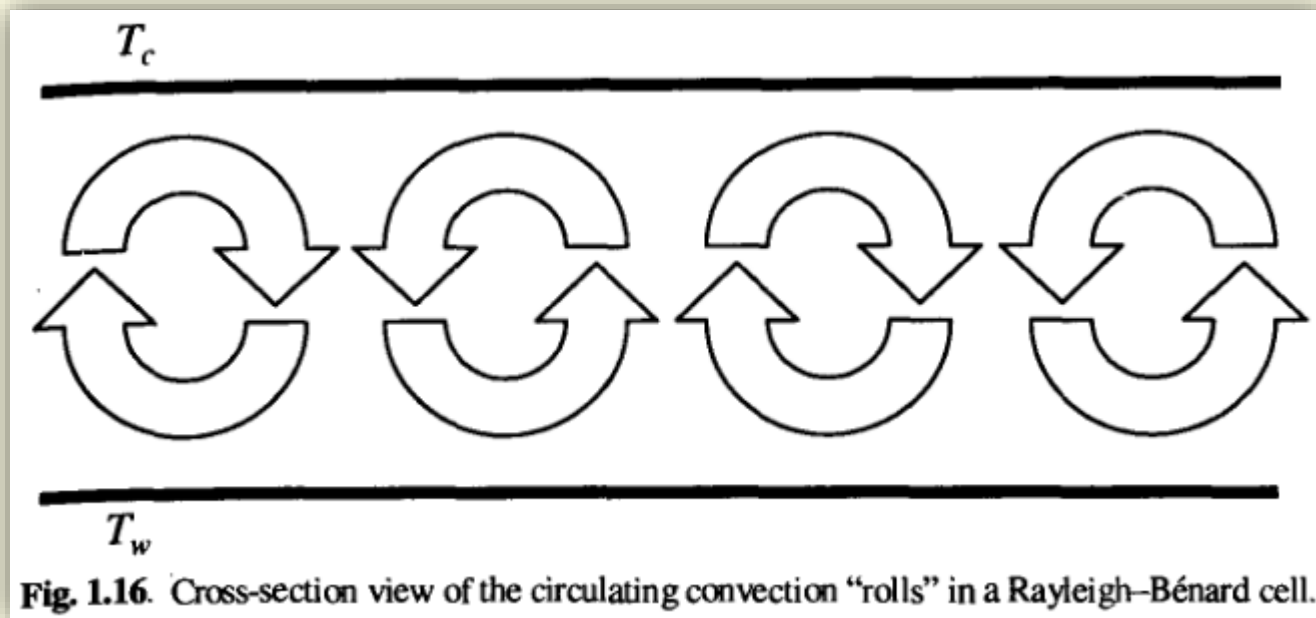
❖ بنارد در سال ۱۹۰۰ به صورت آزمایشگاهی به مطالعه‌ی چنین سیستمی پرداخت.

❖ ریلی در سال ۱۹۱۶ به توصیف نظری برخی ویژگی‌های آن پرداخت.

اگر اختلاف دمایی $\delta T \equiv T_w - T_c$ خیلی زیاد نباشد سیال آرام خواهد بود و انتقال حرارت به شیوه‌ی هدایت انجام خواهد شد. در این شرایط، میل به جابجایی بسته‌های سیال گرم با ویسکوزیته‌ی سیال میرا شده و با انتقال هدایتی دما، جبران می‌شود.



با افزایش اختلاف دما ($\delta T \equiv T_w - T_c$)، نیروی شناوری (buoyant force) افزایش می‌یابد تا اینکه در نهایت، بر ویسکوزیته غلبه کرده و جریان گردشی برقرار می‌گردد. در این شرایط، انتقال حرارت به شیوه‌ی **همرفت (convection)** انجام می‌گردد.



با افزایش بیشتر اختلاف دما ($\delta T \equiv T_w - T_c$)، جریان گردشی و اختلاف دمایی حاصل، متغیر با زمان خواهد شد.

این از ویژگی‌های سیستم‌های غیرخطی است که با وجود اینکه محیط شرایط پایداری دارد (ثابت بودن T_c و T_w نسبت به زمان)، سیستم به طور خودبخود، رفتاری وابسته به زمان از خود نشان می‌دهد.



تقارن انتقال زمانی (Time Translation Symmetry)

In more abstract terms, we say that the nonlinear system can spontaneously break the *time translation symmetry* of the equations and the environment. Time translation symmetry means that the equations and the environment are exactly the same for any value of the time variable t . That is, the conditions at t and at $t + \tau$ are the same for any values of t and τ . However, once the system's behavior becomes time dependent, that time translation symmetry is broken. For a linear system, the symmetry is broken only if the external conditions imposed on the system break the symmetry. A nonlinear system can break the symmetry spontaneously. In Chapter 11 we will see similar symmetry breaking in the formation of spatial patterns as well. In fact, the circulating currents in a Rayleigh-Bénard cell are a simple example of spatial-symmetry breaking.

معادلات مدل Lorenz

$$\dot{X} = p(Y - X)$$

$$\dot{Y} = -XZ + rX - Y$$

$$\dot{Z} = XY - bZ$$

$$\dot{X} = \frac{dX}{dt}$$

X : جریان سیال.

$\dot{X}$: سرعت جریان سیال.

Y : اختلاف دمای بین اجزای بالا رونده و پایین روندهی سیال در ارتفاعی مشخص.

Z : انحراف دمایی از دمای خطی تابع موقعیت عمودی.

p (**Prandtl number**): نسبت ویسکوزیته کینتیک سیال به ضریب نفوذ دمایی آن.

b : متناسب با نسبت ارتفاع قائم (h) لایه سیال به اندازهی افقی چرخه‌های همرفت.

r (**Rayleigh number**): متناسب با تفاوت دمایی بین بالا و پایین سیال.

-- مقدار پارامترها برای شبیه‌سازی --

به جنس سیال وابسته است و برای آب سرد: $p = 10$

$b = 8/3$

r : adjustable control parameter

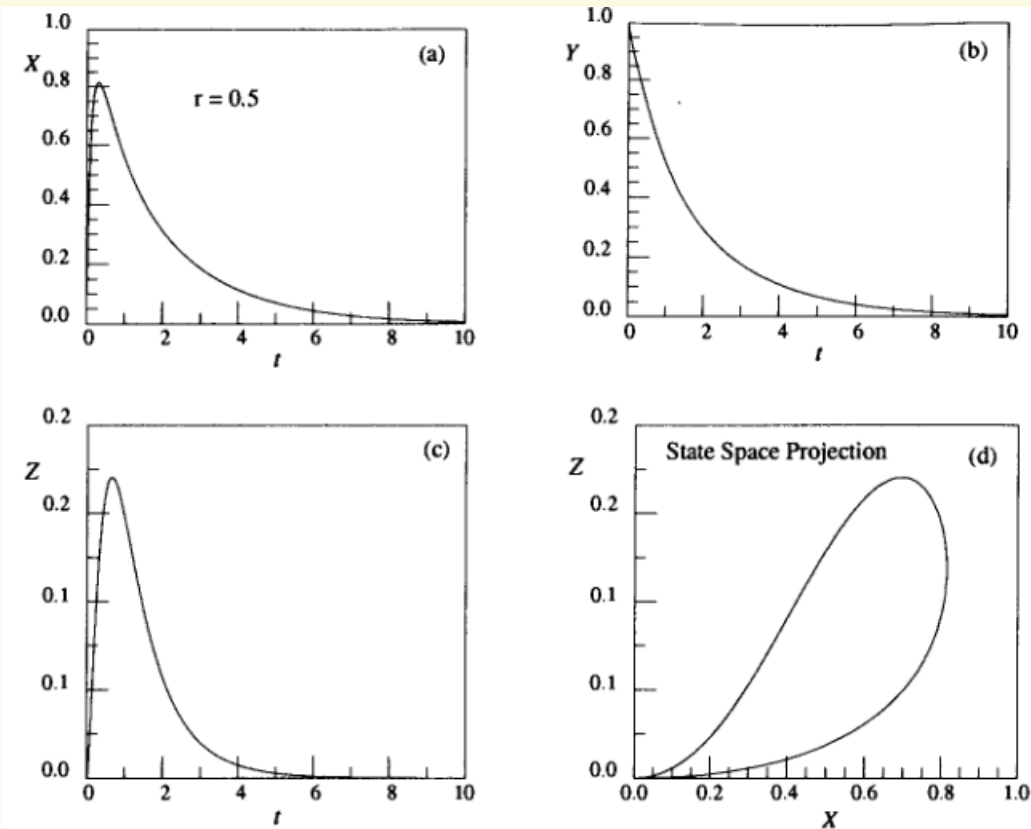


❖ برای مقادیر پارامتر $r < 1$

❖ Initial State: $X = 0, Y = 1, Z = 0$

❖ Rayleigh number: $r = 0.5$

❖ Final State: $X = 0, Y = 0, Z = 0$



چگونه می توان با استفاده از
تراژکتوری های X ، Y و Z ،
ترسیمه ی فاز را تعیین کرد؟

Fig. 1.17. In (a), (b), and (c), X , Y , and Z are plotted as functions of time for the Lorenz model with $r = 0.5$, $p = 10$, and $b = 8/3$. In (d), the trajectory is shown as a projection onto the ZX plane of state space. In all cases the trajectory started at the initial point $X = 0, Y = 1, Z = 0$.

For a system described by a set of first-order differential equations, such as Eq. (1.5-1) for the Lorenz model, a point in the state space for which all of the time derivatives of the state space variables are 0 is said to be a ***fixed point*** for that system. (What we call fixed points for systems of differential equations are also called *equilibrium points*, or *critical points*, or *singular points* by other authors.) If the system starts at one of these fixed points, it stays at that fixed point for all time. Since the time derivatives of the state space variables are 0 at the fixed point, those variables cannot change in time.

برای معادلات مدل Lorenz، نقاط ثابت را به دست آورید.



$$\dot{X} = p(Y - X) \quad \dot{X} = 0 \Rightarrow p(Y - X) = 0 \Rightarrow Y = X$$

$$\dot{Y} = -XZ + rX - Y$$

$$\dot{Z} = XY - bZ \quad \dot{Z} = 0 \Rightarrow X^2 - bZ = 0 \Rightarrow Z = \frac{1}{b}X^2$$

$$\dot{Y} = 0 \Rightarrow -XZ + rX - X = 0 \Rightarrow -\frac{1}{b}X^3 + (r - 1)X = 0$$

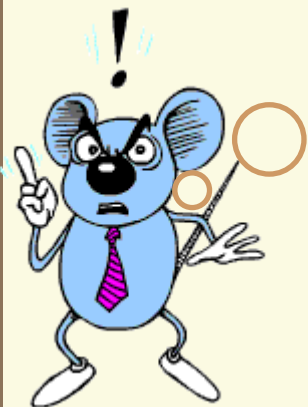
$$\Rightarrow X \left\{ -\frac{1}{b}X^2 + (r - 1) \right\} = 0 \quad \Rightarrow X = 0 \Rightarrow Y = 0 \Rightarrow Z = 0$$

$$\text{if } r > 1 \Rightarrow \left\{ -\frac{1}{b}X^2 + (r - 1) \right\} = 0 \Rightarrow X^2 = b(r - 1)$$

$$\Rightarrow X = \pm\sqrt{b(r - 1)} \quad \Rightarrow X = Y = \pm\sqrt{b(r - 1)} \quad \Rightarrow Z = r - 1$$

دقت کنید که دو نقطه‌ی ثابت آخر تنها برای $r > 1$ موضوعیت دارد!

برای $r < 1$ ،
تنها یک نقطه‌ی ثابت $X = Y = Z = 0$ موضوعیت
دارد. این نقطه‌ی ثابت، در واقع **جاذب (attractor)** است
و **بستر جذب (basin of attraction)** آن کل نقاط
فضای XYZ می‌باشد.



برای $1 < r < 13.93$ ،
مدل Lorenz دارای سه نقطه‌ی ثابت است که نقطه‌ی ثابت
 $X = Y = Z = 0$ نقطه‌ی ثابت دافع (repelling fixed point)
(point) می‌باشد ولی دو نقطه‌ی ثابت دیگر، جاذب
(attracting fixed point=attractor) هستند. از این
رو، $r = 1$ نقطه‌ی دوشاخه شدن (bifurcation point)
مدل Lorenz است.



❖ برای مقادیر پارامتر $1 < r < 13.93$

- ❖ Initial States: $X = 0, Y = 1, Z = 0$
- ❖ $X = 0, Y = -1, Z = 0$
- ❖ Rayleigh number: $r = 2.0$

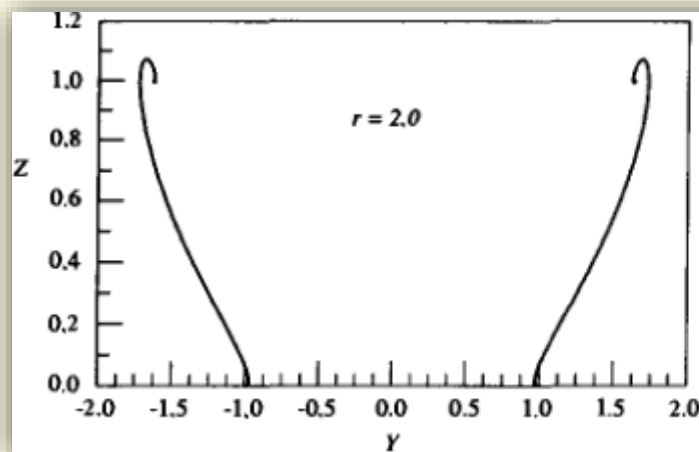


Fig. 1.18. State space projections onto the YZ plane for trajectories in the Lorenz model with $r = 2$. One attractor corresponds to clockwise rotation, the other to counterclockwise rotation of the fluid at a particular spatial location.

وقتی r اندکی از یک بیشتر می شود دیگر $X = Y = Z = 0$ یک نقطه‌ی ثابت دافع می گردد و این یعنی ناپایدار شدن حالت هدایتی.

- ❖ Repelling fixed point: $X = Y = Z = 0$
- ❖ Attractive fixed points: $X = Y = \pm \sqrt{b(r-1)}, Z = r-1$

یعنی همرفت ماندگار، یکی با جهت گردش ساعتگرد و دیگری با جهت پادساعتگرد.

بستر جذب هر کدام از این جاذب ها کجاست؟



نحوی تغییر این نواحی (بستر جذب) با تغییر پارامتر سیستم چگونه است؟



برای پرداختن به این موارد، به مفهوم هندسی **فرکتال** نیاز است!

❖ برای مقادیر پارامتر $r > 13.93$

❖ Initial States: $X = 0, Y = -5, Z = 15$

❖ Rayleigh number: $r = 25$

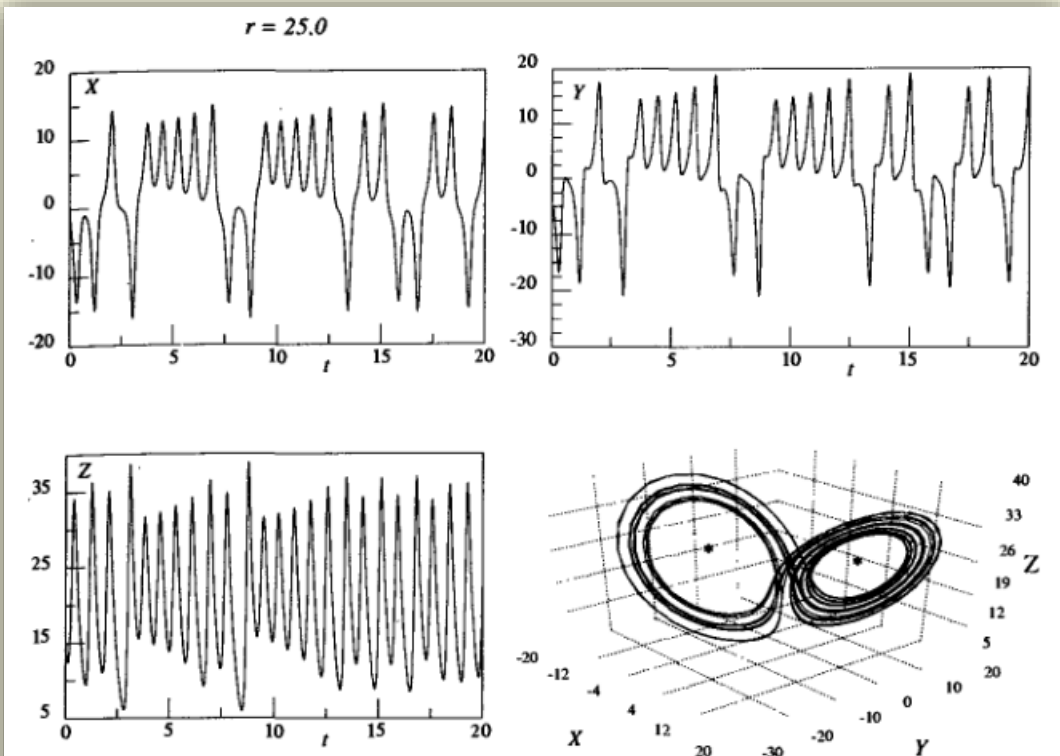


Fig. 1.19. Solutions to the Lorenz equations for $r = 25$. The initial point was $X = 0, Y = -5, Z = 15$. In the state space diagram in the lower right panel, the two off-origin fixed points at $Z = 24, X = 8$ and $Y = 8$ are indicated by asterisks.

در اطراف دو نقطه‌ی ثابت دیگر
نیز ناحیه‌های دافع شکل
می‌گیرد و گسترش می‌یابد و
بستر جذب آنها کاهش می‌یابد.

نقاط ثابت غیر مبدا، در شکل
با ستاره مشخص شده‌اند:

❖ $X = Y = 8, Z = 24$

❖ $X = Y = -8, Z = 24$

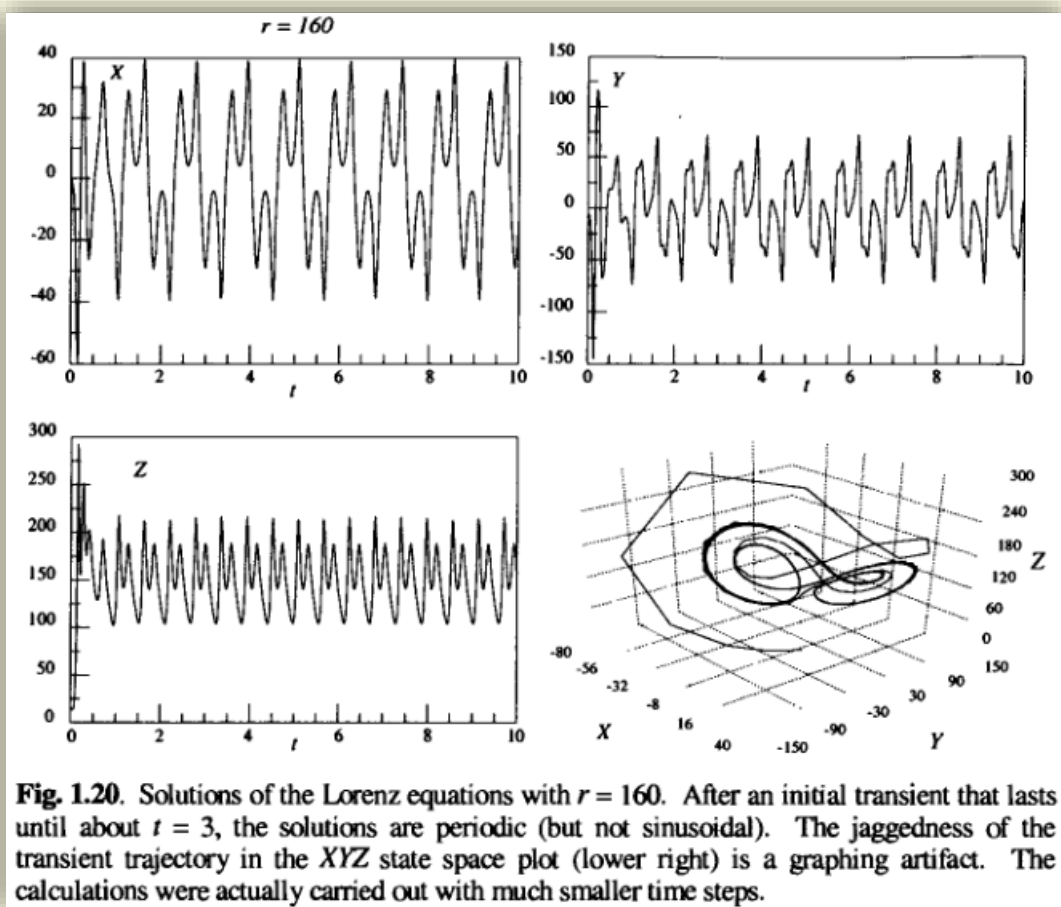
در این حالت، تغییرات وابسته

به زمان در جریان سیال و تغییرات دمایی متناظر ملاحظه می‌گردد. این در حالی است که
اختلاف دمای اعمالی خارجی مستقل از زمان است.

در ادامه به بررسی رفتار سیستم در چند حالت متمایز می پردازیم:

❖ Initial States: $X = 0, Y = -5, Z = 15$

❖ Rayleigh number: $r = 160$



پس از حدود ۳ ثانیه، رفتار
متناوب غیر سینوسی دیده
می شود!



علت تضرس (شکستگی)

ترسیمه‌ی فاز چیست؟

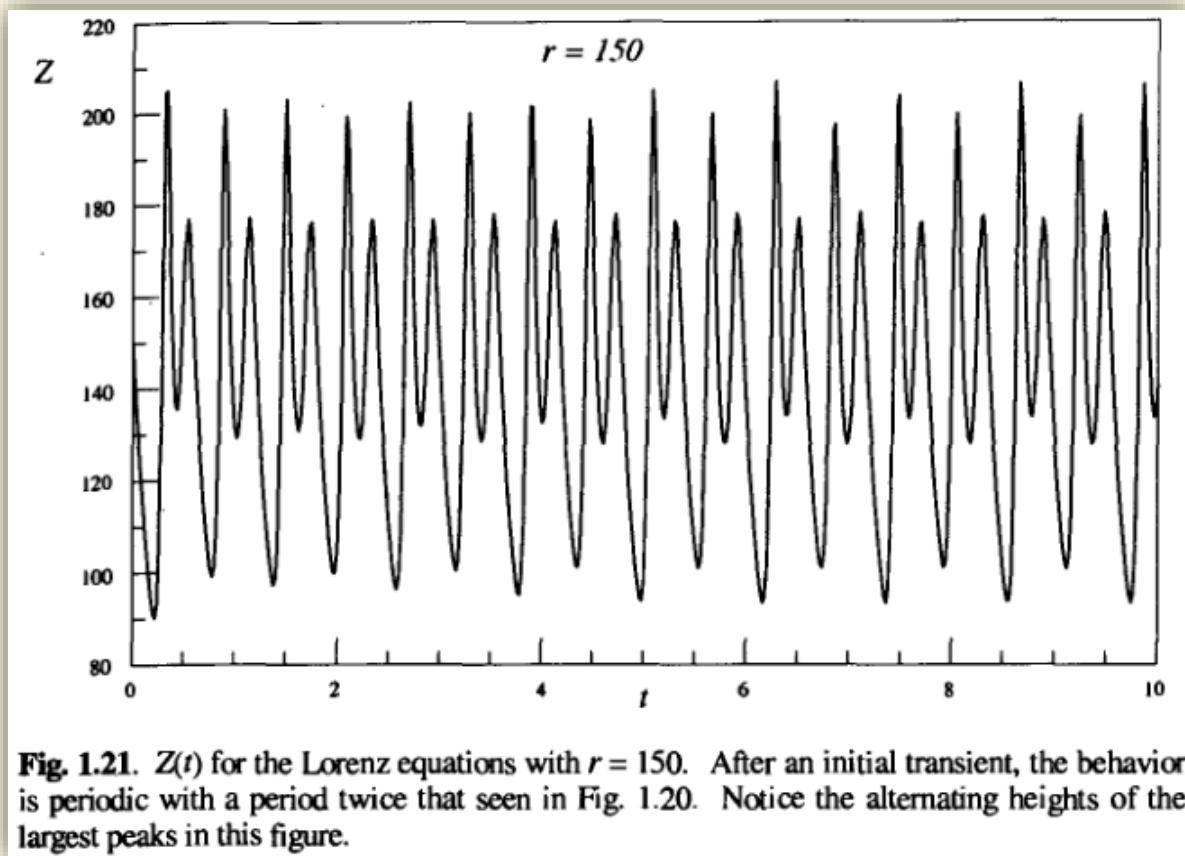


نوسان متقارن X و Y حول صفر به چه مفهوم است؟

جهت همرفت (ساعتگرد-پادساعتگرد) پی در پی عوض می شود.

Exercise 1.5-3. Show explicitly that the Lorenz equations are unchanged under time translation, that is, if t is replaced by $t + \tau$ then the equations are the same. Thus, we say that the Lorenz equations have time translation symmetry.

- ❖ Initial States: $X = 0, Y = -5, Z = 15$
- ❖ Rayleigh number: $r = 150$



مشاهده‌ی تغییرات ناگهانی در رفتار تناوبی Z :

رفتار پریود ۲ (period-doubling bifurcation)

- ❖ Initial States: $X = 0, Y = -5, Z = 15$
 - ❖ Rayleigh number: $r = 146$
-

رفتار پریود ۴

با کاهش r ، این روند ادامه می یابد تا ...

- ❖ Initial States: $X = 20, Y = 0, Z = 163$
- ❖ Initial States: $X = 20, Y = 0, Z = 166$
- ❖ Rayleigh number: $r = 143$

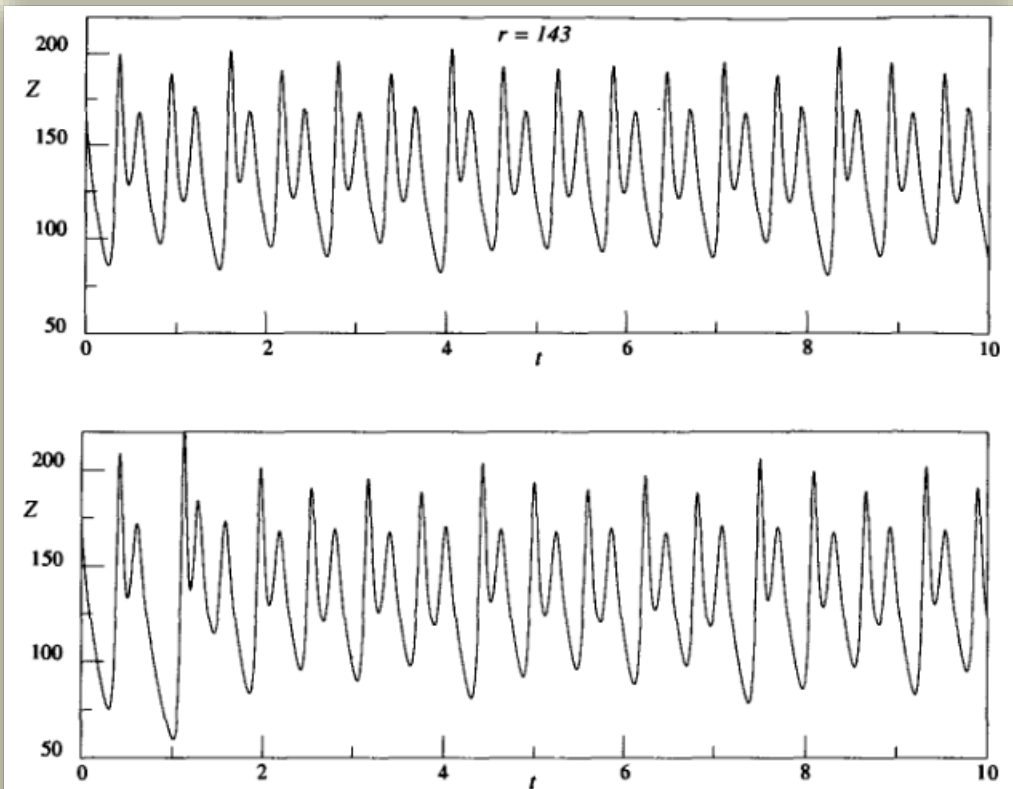


Fig. 1.22. Two trajectories in the Lorenz model showing divergence of nearby trajectories for $r = 143$. The trajectory in the upper panel starts with the initial conditions $X = 20, Y = 0, Z = 163$. In the lower panel the nearby trajectory starts with $X = 20, Y = 0, Z = 166$. After only a few oscillations the trajectories are completely different.

رفتار همه‌ی متغیرها، کاملاً
غیر تناوبی می‌شود!

آیا این رفتار نشانگر
آشوب است؟



واگرایی تراژکتوری‌های نزدیک
به هم!

این یعنی آشوب و period-doubling route to chaos

معین ولی غیر قابل پیش بینی!

- ❖ با این که سیستم‌های آشوبناک **deterministic** هستند ولی آینده‌ی آنها **غیر قابل پیش بینی** است!
- ❖ سیستم‌های آشوبناک **پاسخ بسته (closed form solution)** ندارند.
- ❖ در سیستم‌های آشوبناک، برای تعیین رفتار آینده‌ی سیستم لازم است **انتگرال گیری گام به گام** انجام گردد.
- ❖ در سیستم‌های آشوبناک ممکن است اندکی تغییر در شرایط اولیه، حتی جاذبی که پروفایل به آن ختم می شود را نیز دچار تغییر نماید.

سیستم‌های آشوبناک **deterministic** هستند از این رو، اگر شرایط اولیه را **دقیقا** بدانیم می توانیم رفتار آینده‌ی تراژکتوری را پیش بینی نماییم.



از آنجا که در عمل یا محاسبات عددی، همواره اندکی **نادقیقی** وجود دارد، رفتار آینده‌ی سیستم آشوبناک **عملا** غیر قابل پیش بینی است.



اثر پروانه‌ای (Butterfly effect)

اثر واگرایی تراژکتوری‌های نزدیک به هم،
در استعاره‌ای نغز، **اثر پروانه‌ای** نامیده می‌شود.
این استعاره را اولین بار **لورنز** در سال ۱۹۷۲
در عنوان سخنرانی خود استفاده نمود:

**Predictability: Does the Flap of a
Butterfly's Wings in Brazil set off
a Tornado in Texas?**



Edward Lorenz
1917 -2008

چالش معینی و اراده!

چالش تضاد و ابهام بین معینی (Determinism) و اراده (free will) که ظاهراً در مقابل آن است قدمتی طولانی در فلسفه دارد!

بر اساس مکانیک نیوتونی، آینده بر اساس قوانین نیرو و شرایط اولیه موجودیتهای عالم قابل تعیین است. از این دیدگاه، تمام اعمال ما کاملاً معین است و اراده جایگاهی ندارد!



ریاضی‌دان فرانسوی **Pierre Simon Laplace** (۱۷۴۹–۱۸۲۷) در مقدمه‌ی کتاب **Theory of Probability** می‌نویسد:

Let us imagine an Intelligence who would know at a given instant of time all forces acting in nature and the position of all things of which the world consists; let us assume, further, that this Intelligence would be capable of subjecting all these data to mathematical analysis. Then it could derive a result that would embrace in one and the same formula the motion of the largest bodies in the universe and of the lightest atoms. Nothing would be uncertain for this Intelligence. The past and the future would be present to its eyes.

لاپلاس جایگاهی برای شانس و اراده قائل نبود!

شواهدی تاریخی وجود دارد که **اسحاق نیوتن** که خود ...

~~future. There is no room for chance or free will².~~ There is even some historical evidence that Isaac Newton himself, the creator of Newtonian mechanics, drew back from the deterministic picture that seemed to emerge from his discoveries. Newton wanted to leave room for the active participation of God in the evolution of the universe.

مکانیک کوانتومی (Quantum Mechanics)

در قرن بیستم، **مکانیک کوانتومی** با دیدگاهی کاملاً متفاوت (روابط نامعینی و احتمالات ذاتی) مطرح گردید که **نگرش لاپلاسی** را سست کرد. رابطه‌ی بین مکانیک کوانتومی و آشوب در فصل ۱۲ کتاب مورد بحث قرار گرفته است.

آیه ۳۲ سوره مائده

مِنْ أَجْلِ ذَلِكَ كَتَبْنَا عَلَىٰ بَنِي إِسْرَائِيلَ أَنَّهُ مَنْ قَتَلَ نَفْسًا بِغَيْرِ
نَفْسٍ أَوْ فَسَادٍ فِي الْأَرْضِ فَكَأَنَّمَا قَتَلَ النَّاسَ جَمِيعًا وَمَنْ أَحْيَاهَا
فَكَأَنَّمَا أَحْيَا النَّاسَ جَمِيعًا ۖ وَلَقَدْ جَاءَتْهُمْ رُسُلُنَا بِالْبَيِّنَاتِ ثُمَّ إِنَّ
كَثِيرًا مِّنْهُمْ بَعْدَ ذَلِكَ فِي الْأَرْضِ لَمُسْرِفُونَ ﴿٣٢﴾

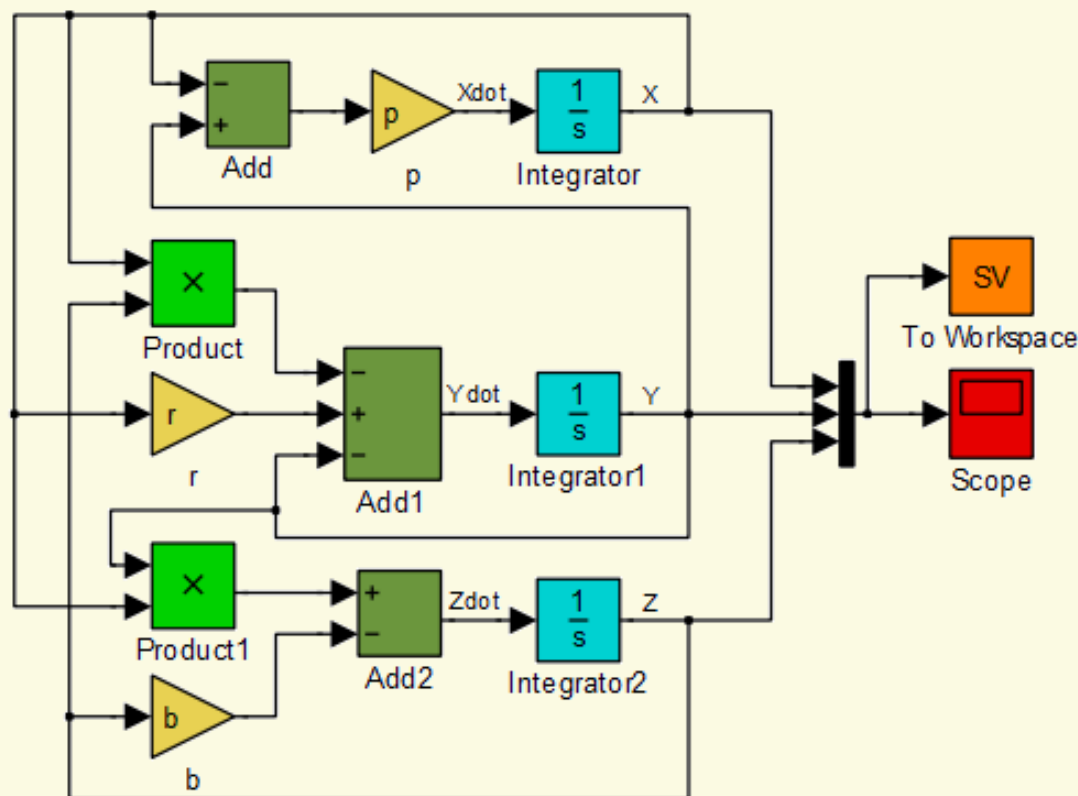
به این جهت بر بنی اسرائیل مقرر داشتیم که هرکس کسی را جز به قصاص قتل، یا به جزای
فساد در روی زمین، بکشد مانند این است که همه مردم را کشته باشد، و هرکس کسی را
زنده بدارد مانند این است که همه مردم را زنده داشته باشد، و پیامبران ما معجزاتی برای
آنان آوردند آنگاه بسیاری از آنان در سرزمین خویش زیاده روی پیشه کردند (۳۲)

توصیف مدل لورنز در سیمولینک

$$\dot{X} = p(Y - X)$$

$$\dot{Y} = -XZ + rX - Y$$

$$\dot{Z} = XY - bZ$$



Function Block Parameters: Integrator

Integrator

Continuous-time integrator

Parameters

External reset: none

Initial condition source:

Initial condition: X0

☐ Limit output

Upper saturation limit: inf

Lower saturation limit: -inf

☐ Show saturation port

☐ Show state port

Absolute tolerance: auto

☐ Ignore limit and reset when linearizing

Function Block Parameters: Integrator1

Integrator

Continuous-time integrator

Parameters

External reset: none

Initial condition source:

Initial condition: Y0

☐ Limit output

Upper saturation limit: inf

Lower saturation limit: -inf

☐ Show saturation port

☐ Show state port

Absolute tolerance: auto

☐ Ignore limit and reset when linearizing

Function Block Parameters: Integrator2

Integrator

Continuous-time integration of the input signal.

Parameters

External reset: none

Initial condition source: internal

Initial condition: Z0

☐ Limit output

Upper saturation limit: inf

Lower saturation limit: -inf

☐ Show saturation port

☐ Show state port

Absolute tolerance: auto

☐ Ignore limit and reset when linearizing

OK Cancel Help Apply

 Sink Block Parameters: To Workspace ✕

To Workspace

Write input to specified array or structure in a workspace. For menu based simulation, data is written in the MATLAB base workspace. Data is not available until the simulation is stopped or paused. For command line simulation using sim command, the workspace is specified using DstWorkspace field in the option structure.

Parameters

Variable name:

Limit data points to last:

Decimation:

Sample time (-1 for inherited):

Save format:

☐ Log fixed-point data as an fi object

Configuration Parameters: LorenzCS/Configuration (Active)

Select:

- Solver
- Data Import/Export
- Optimization
- Diagnostics
 - Sample Time
 - Data Validity
 - Type Conversion
 - Connectivity
 - Compatibility
 - Model Referencing
 - Saving
 - Stateflow
- Hardware Implementati...
- Model Referencing
- Simulation Target
 - Symbols
 - Custom Code
- Real-Time Workshop
 - Report
 - Comments
 - Symbols
 - Custom Code
 - Debug
 - Interface

Simulation time

Start time: 0.0 Stop time: 20.0

Solver options

Type: Variable-step Solver: ode45 (Dormand-Prince)

Max step size: 0.0002 Relative tolerance: 1e-3

Min step size: auto Absolute tolerance: auto

Initial step size: auto Shape preservation: Disable all

Number of consecutive min steps: 1

Tasking and sample time options

Tasking mode for periodic sample times: Auto

☐ Automatically handle rate transition for data transfer

☐ Higher priority value indicates higher task priority

Zero-crossing options

Zero-crossing control: Use local settings Algorithm: Nonadaptive

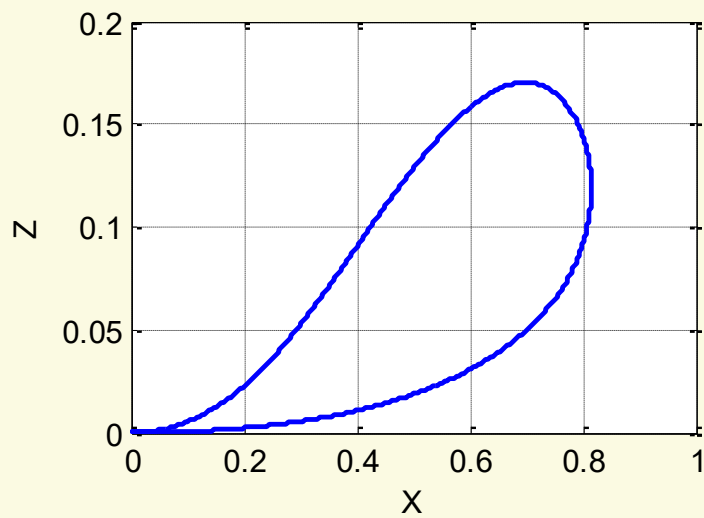
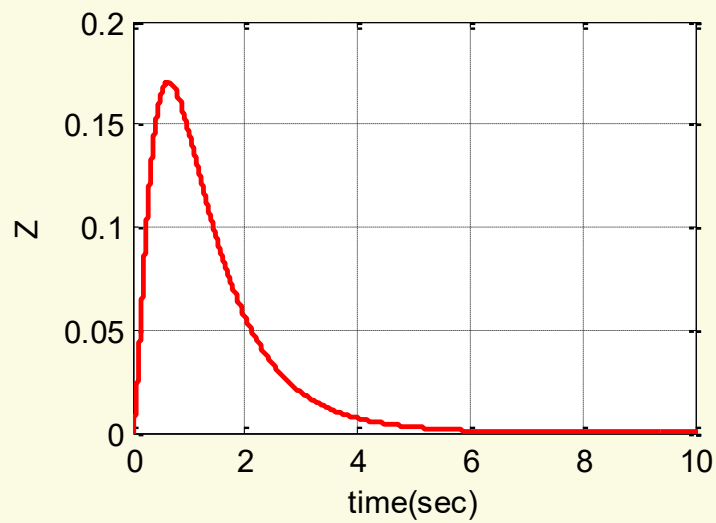
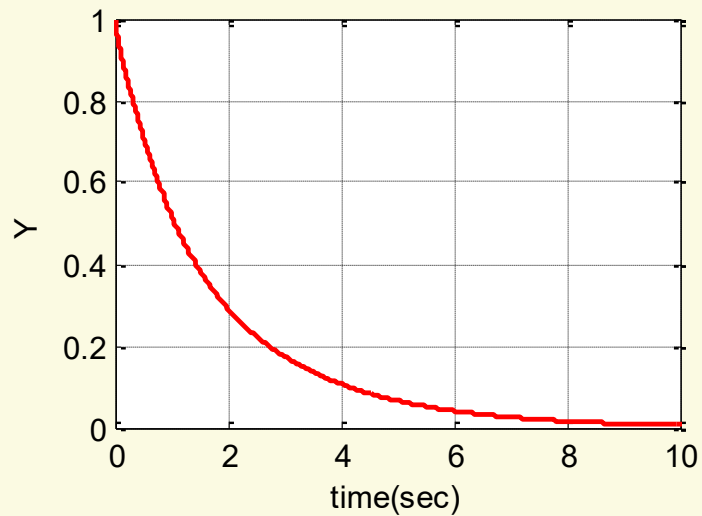
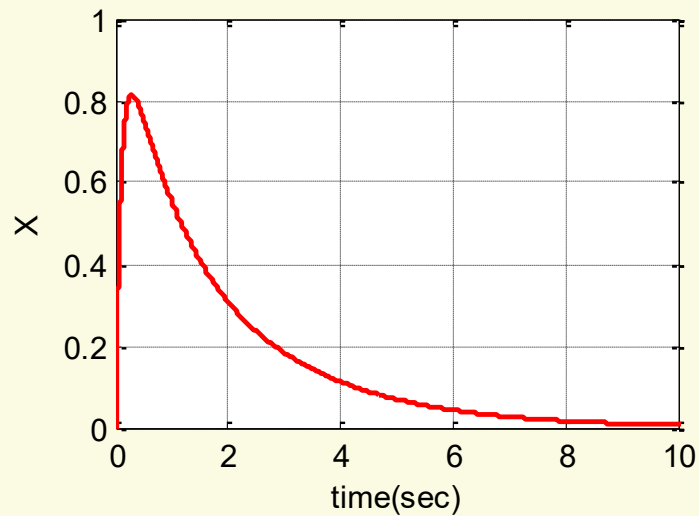
Time tolerance: 10*128*eps Signal threshold: auto

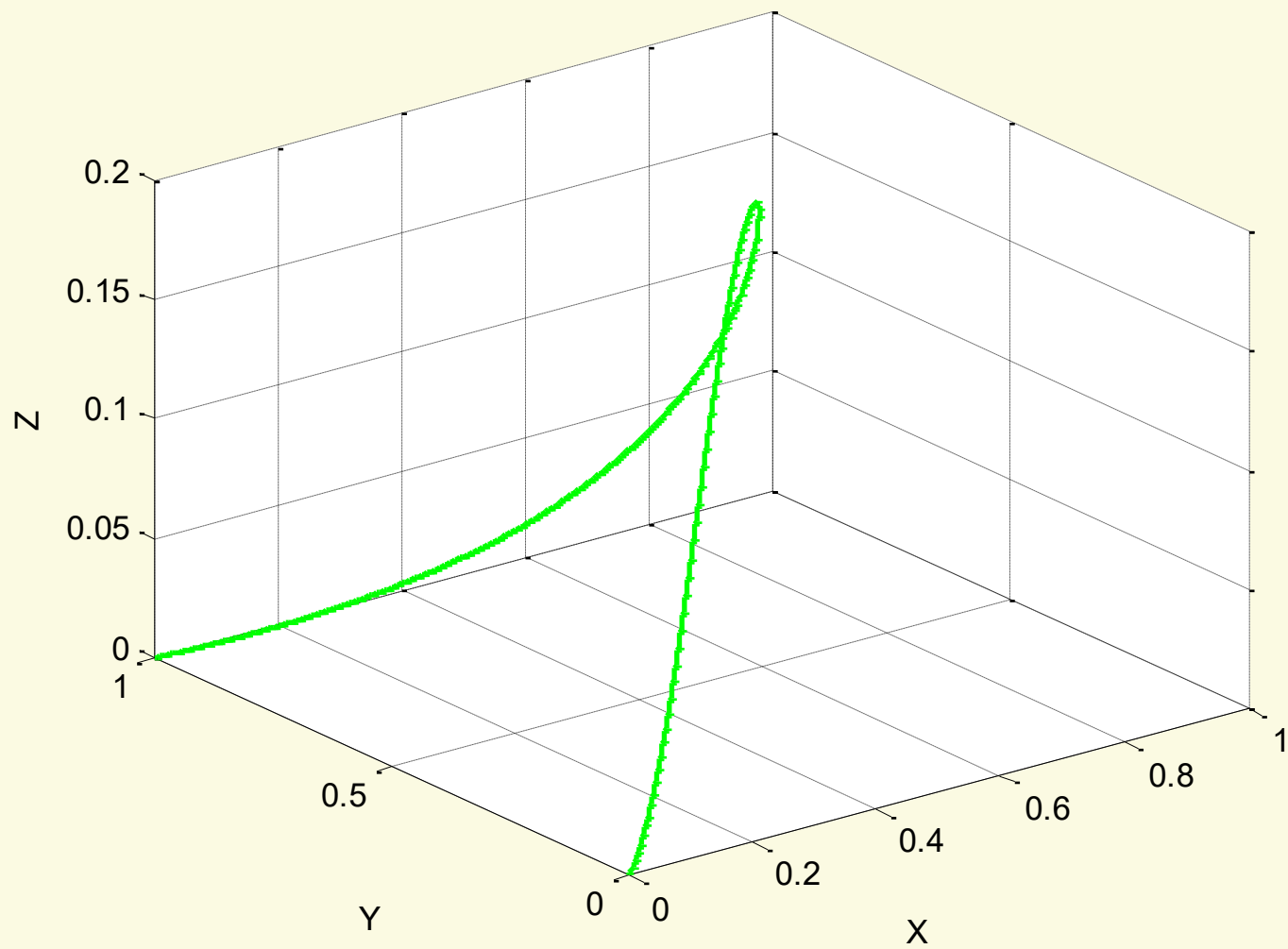
Number of consecutive zero crossings: 1000

OK Cancel Help Apply

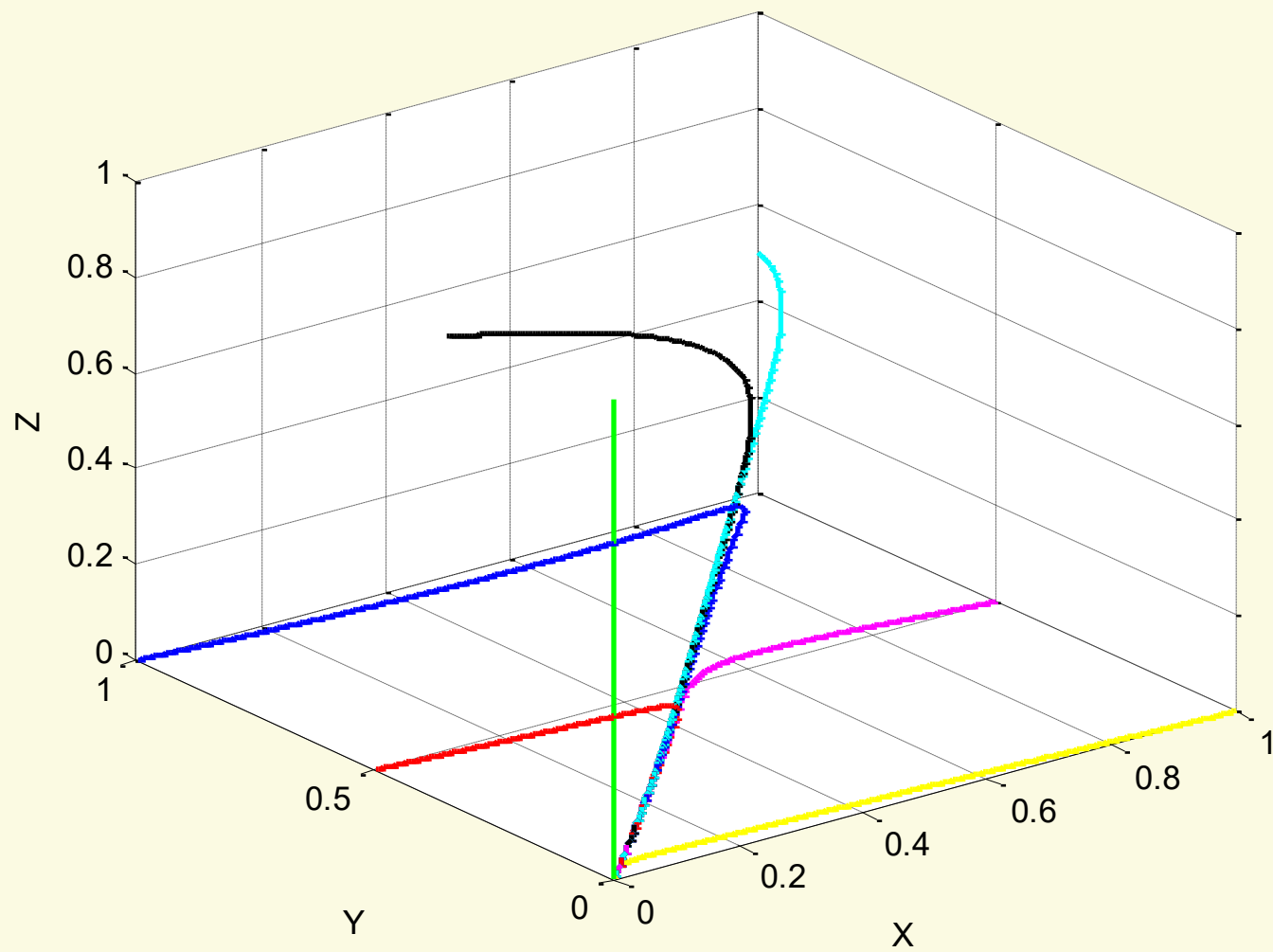
```
b=8/3; p=10; r=0.5;
X0=0; Y0=1; Z0=0;
sim('LorenzCS.mdl'),
t = SV.time;
X=SV.signals.values(:,1);
Y=SV.signals.values(:,2);
Z=SV.signals.values(:,3);
figure, set(gcf,'Position',[100 100 700 500]), % Figure 1.17
subplot(221), plot(t,X,'r','LineWidth',2),
    axis([0 10 0 1]), xlabel('time(sec)'), ylabel('X'), grid,
subplot(222), plot(t,Y,'r','LineWidth',2),
    axis([0 10 0 1]), xlabel('time(sec)'), ylabel('Y'), grid,
subplot(223), plot(t,Z,'r','LineWidth',2),
    axis([0 10 0 0.2]), xlabel('time(sec)'), ylabel('Z'), grid,
subplot(224), plot(X,Z,'b','LineWidth',2),
    axis([0 1 0 0.2]), xlabel('X'), ylabel('Z'), grid,

figure, plot3(X,Y,Z,'g','LineWidth',2), grid,
    xlabel('X'), ylabel('Y'), zlabel('Z'),
```





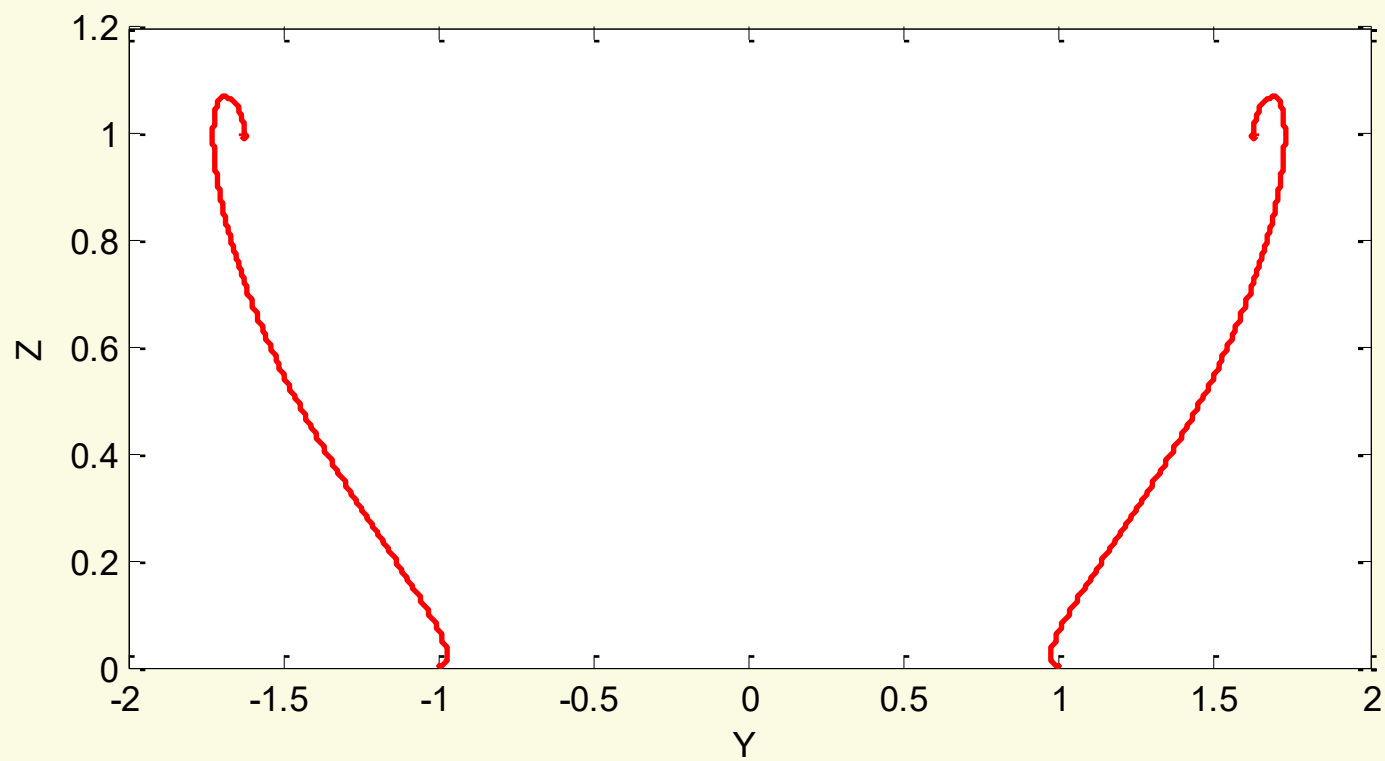
```
IS = [0 1 0; 0 0 1; 0 0.5 0; 1 0 0; 1 1 0.5; 1 0.5 0; 0.5 1 0.5];
ColorCode = [0 0 1; 0 1 0; 1 0 0; 1 1 0; 0 1 1; 1 0 1; 0 0 0];
figure,
for i=1:size(IS,1),
    X0=IS(i,1); Y0=IS(i,2); Z0=IS(i,3);
    sim('LorenzCS.mdl'),
    t = SV.time;
    X=SV.signals.values(:,1);
    Y=SV.signals.values(:,2);
    Z=SV.signals.values(:,3);
    plot3(X,Y,Z,'LineWidth',2,'Color',ColorCode(i,:)), hold on,
end
grid, xlabel('X'), ylabel('Y'), zlabel('Z'),
```



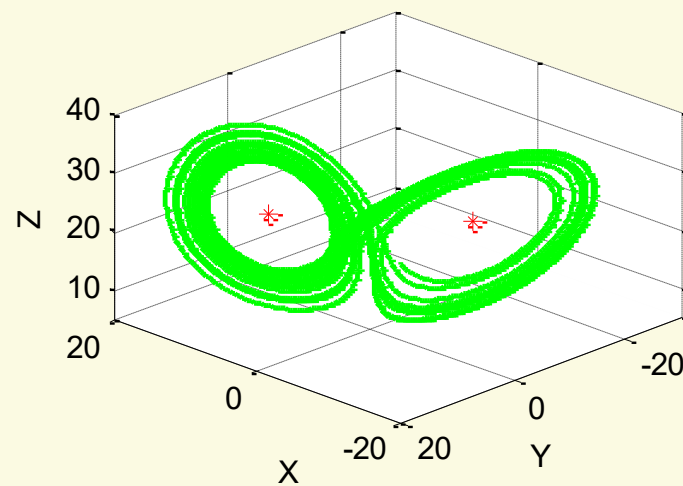
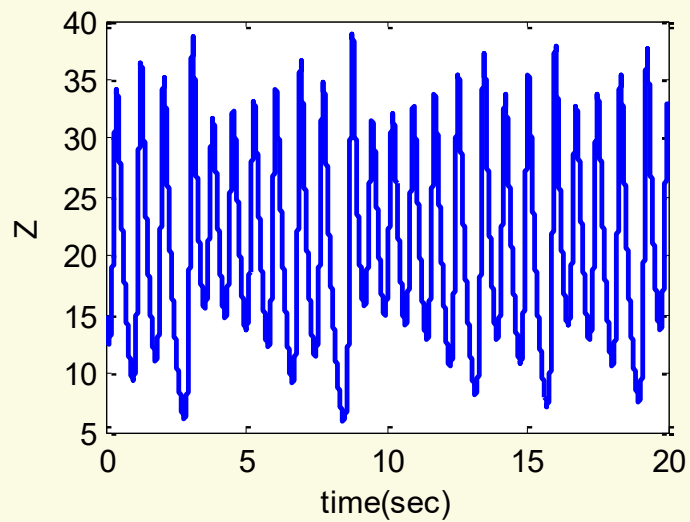
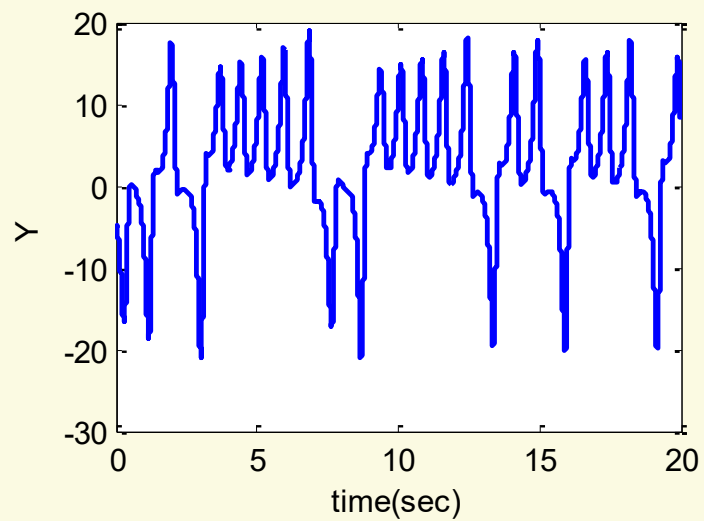
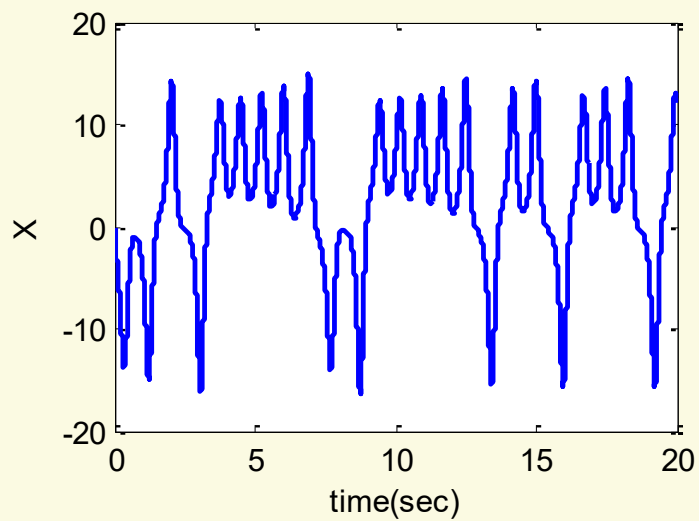
```
b=8/3; p=10; r=2; X0=0; Y0=1; Z0=0;
sim('LorenzCS.mdl'),
t = SV.time;
X=SV.signals.values(:,1);
Y=SV.signals.values(:,2);
Z=SV.signals.values(:,3);
figure, plot(Y,Z,'r','LineWidth',2), hold on,

X0=0; Y0=-1; Z0=0;
sim('LorenzCS.mdl'),
t = SV.time;
X=SV.signals.values(:,1);
Y=SV.signals.values(:,2);
Z=SV.signals.values(:,3);
plot(Y,Z,'r','LineWidth',2),

axis([-2 2 0 1.2]), xlabel('Y'), ylabel('Z'),
set(gcf,'Position',[200 200 600 300])
```



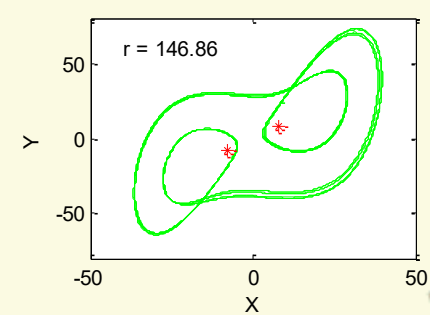
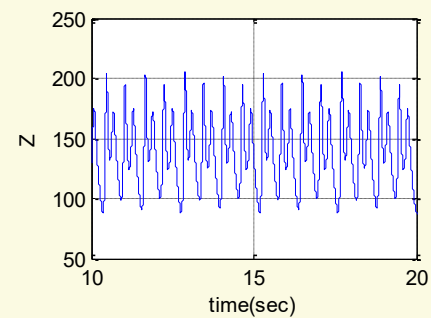
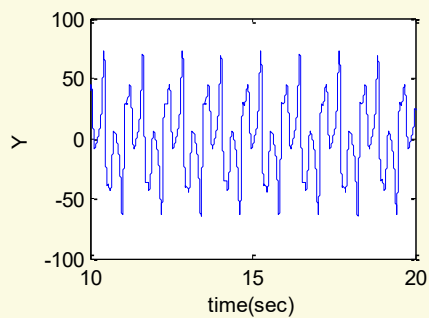
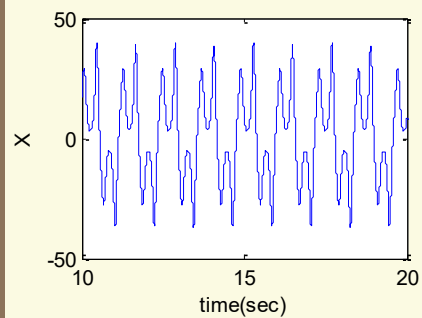
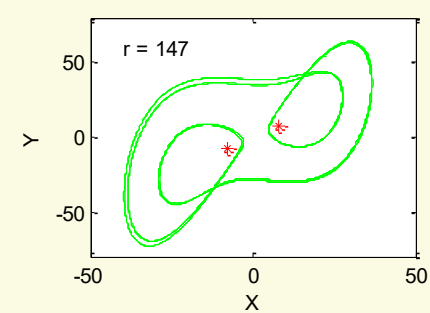
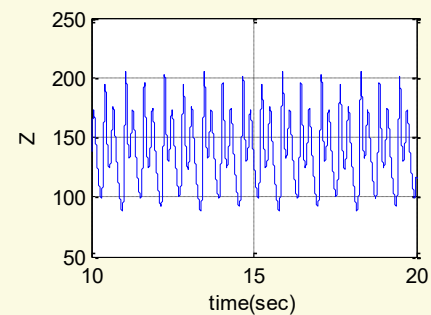
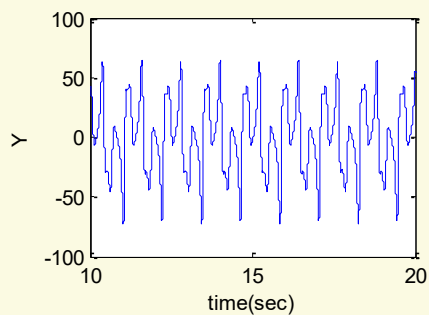
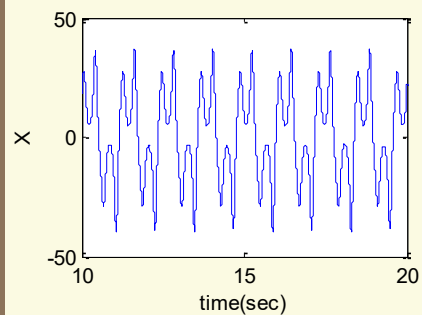
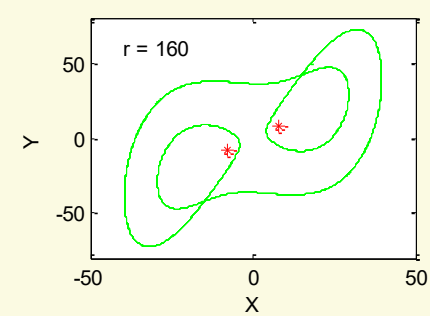
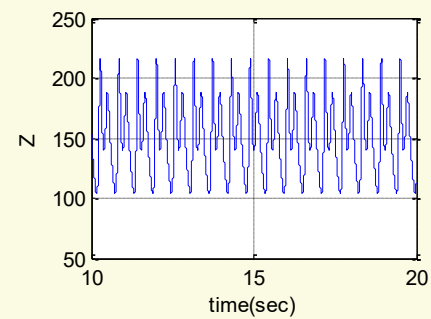
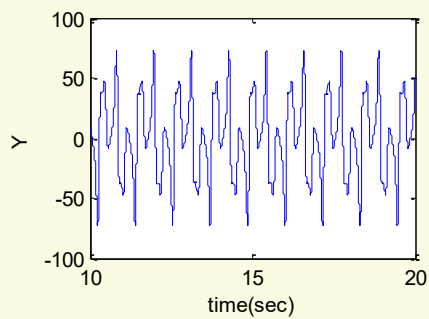
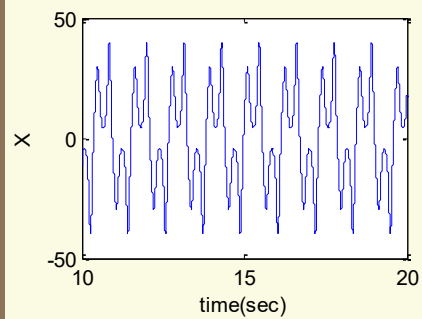
```
b=8/3; p=10; r=25; X0=0; Y0=-5; Z0=15;
sim('LorenzCS.mdl'),
t = SV.time;
X=SV.signals.values(:,1);
Y=SV.signals.values(:,2);
Z=SV.signals.values(:,3);
figure, set(gcf, 'Position', [100 100 700 500])
subplot(221), plot(t,X, 'b', 'LineWidth', 2),
    axis([0 20 -20 20]), xlabel('time(sec)'), ylabel('X'),
subplot(222), plot(t,Y, 'b', 'LineWidth', 2),
    axis([0 20 -30 20]), xlabel('time(sec)'), ylabel('Y'),
subplot(223), plot(t,Z, 'b', 'LineWidth', 2),
    axis([0 20 5 40]), xlabel('time(sec)'), ylabel('Z'),
subplot(224), plot3(X,Y,Z, 'g', 'LineWidth', 2), axis([-20 20 -30 20
5 40]),
hold on, plot3([8 -8], [8 -8], [24 24], 'r*')
set(gca, 'CameraPosition', [-200 250 200])
xlabel('X'), ylabel('Y'), zlabel('Z'), grid
```



برنامه‌ای برای مسیر دوشاخه شدن به آشوب

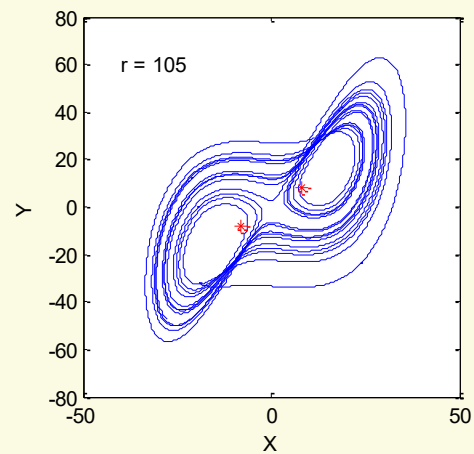
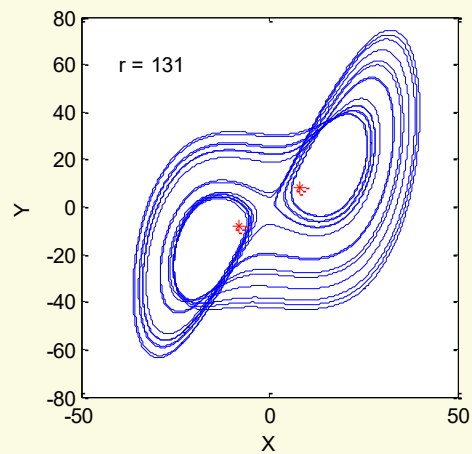
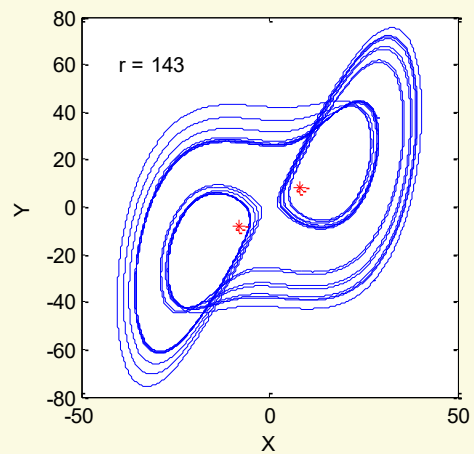
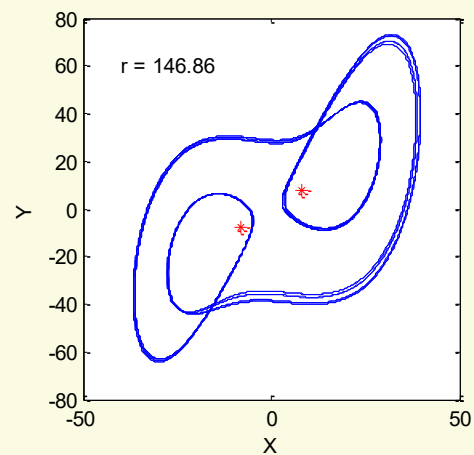
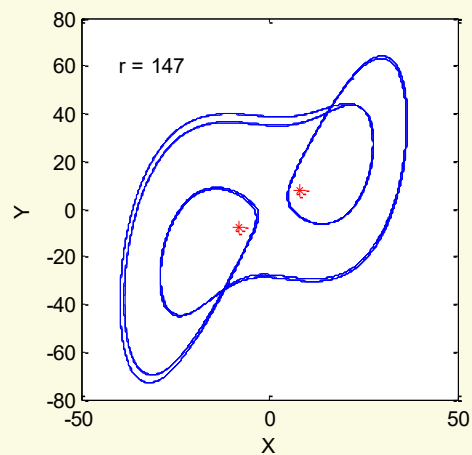
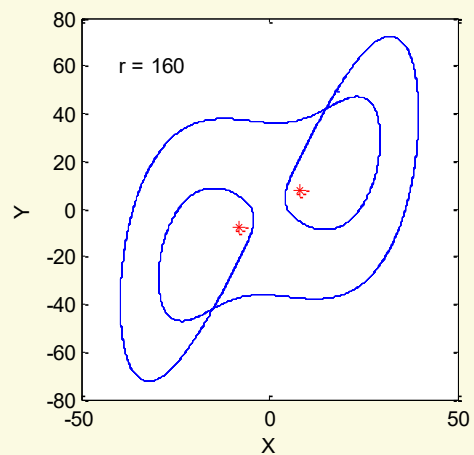
```
b=8/3; p=10; r=160; X0=0; Y0=-5; Z0=15;
sim('LorenzCS.mdl'),
t = SV.time;
X=SV.signals.values(:,1);
Y=SV.signals.values(:,2);
Z=SV.signals.values(:,3);
figure, set(gcf, 'Position', [20 20 1300 700])
subplot(3,4,1), plot(t,X,'b','LineWidth',1),
    axis([10 20 -50 50]), xlabel('time(sec)'), ylabel('X'),
subplot(3,4,2), plot(t,Y,'b','LineWidth',1),
    axis([10 20 -100 100]), xlabel('time(sec)'), ylabel('Y'),
subplot(3,4,3), plot(t,Z,'b','LineWidth',1),
    axis([10 20 50 250]), xlabel('time(sec)'), ylabel('Z'), grid,
subplot(3,4,4), plot(X(50000:end),Y(50000:end),'g','LineWidth',1),
    axis([-50 50 -80 80]), xlabel('X'), ylabel('Y'),
    text(-40,60,'r = 160')
hold on, plot([8 -8],[8 -8],'r*')

r=147; r=146.86;
```



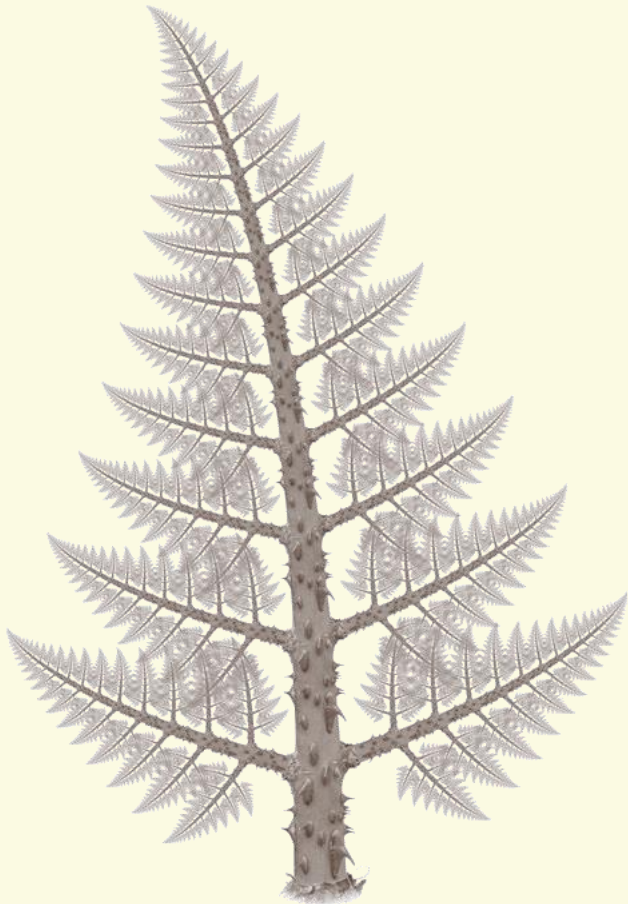
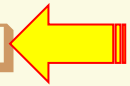
برنامه‌ای برای مسیر دوشاخه شدن به آشوب

```
b=8/3; p=10; r=160; x0=0; y0=-5; z0=15;
sim('LorenzCS.mdl'),
t = SV.time;
X=SV.signals.values(:,1);
Y=SV.signals.values(:,2);
Z=SV.signals.values(:,3);
figure, set(gcf,'Position',[20 20 1100 700])
subplot(2,3,1),plot(X(50000:end),Y(50000:end),'b'),
    axis([-50 50 -80 80]), xlabel('X'), ylabel('Y'),
    text(-40,60,'r = 160')
hold on, plot([8 -8],[8 -8],'r*')
...
r=147;    r=146.86;    r=143; r=131; r=105;
```



فهرست مطالب

- ☒ معرفی مفاهیم و اصطلاحات
- ☒ سیستم الکتریکی غیر خطی
- ☒ مدلی از رشد جمعیت بیولوژیکی
- ☒ مدل همرفت سیال: مدل لورنز
- ☐ جمع بندی



جمع‌بندی مبحث:

- ❖ سیستم‌هایی ساده با رفتارهایی پیچیده
- ❖ شباهت‌های مهم در رفتارهای این سیستم‌ها با وجود کاملاً متفاوت بودن آنها
- ❖ بروز تغییرات چشم‌گیر ناگهانی (دوشاخه شدن) تنها با اندکی تغییر پارامتر
- ❖ بروز رفتارهای غیرتناوبی با ظاهری تصادفی در شرایط خاص
- ❖ واگرایی تراژکتوری‌های نزدیک به هم (که آشوب را از نویز متمایز می‌سازد)
- ❖ عدم نیاز به پیچیدگی یا نویز خارجی برای بروز رفتار پیچیده‌ی آشوب
- ❖ روند پریود ۲ به آشوب (period-doubling route to chaos)

در مبحث بعد به برخی ویژگی‌های جهان‌شمول کمی آشوب می‌پردازیم.

(Universal Quantitative Features of Chaos)

فهرست مطالب

- ✓ معرفی مفاهیم و اصطلاحات
- ✓ سیستم الکتریکی غیر خطی
- ✓ مدلی از رشد جمعیت بیولوژیکی
- ✓ مدل همرفت سیال: مدل لورنز
- ✓ جمع بندی

