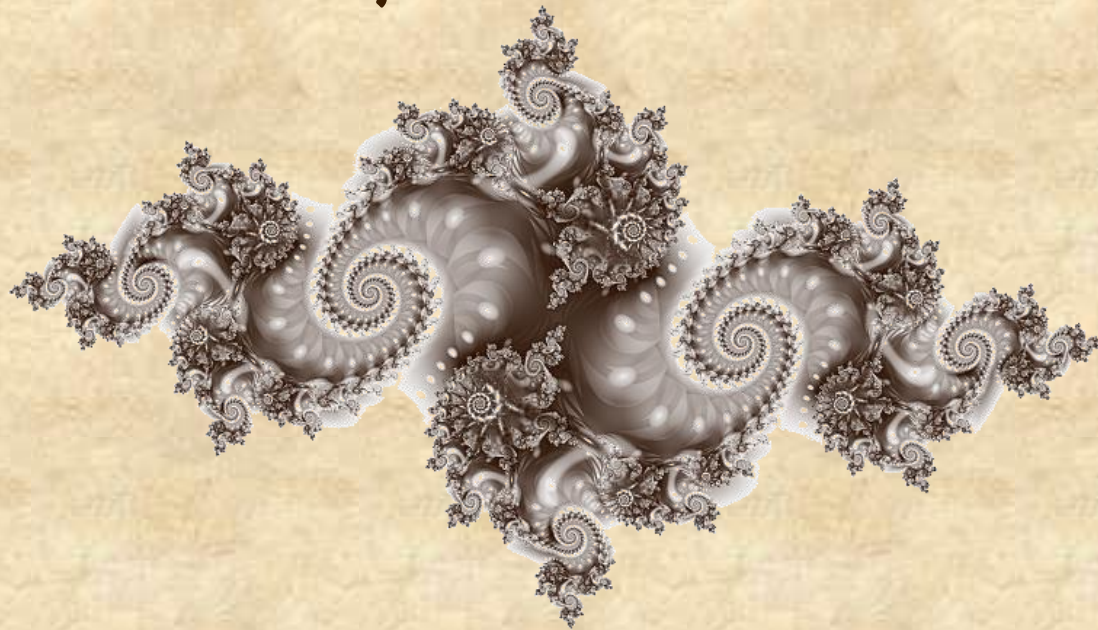


دینامیک غیرخطی و آشوب

و کاربردهای آن در مهندسی پزشکی



مبحث دوم

جهان شمولی آشوب

فهرست مطالب

☐ مقدمه

☐ عدد دلتای Feigenbaum (نسبت همگرایی)

☐ نسبت همگرایی در سیستم‌های واقعی

☐ پیش‌بینی با استفاده از دلتای Feigenbaum

☐ عدد آلفای Feigenbaum (مقیاس اندازه)

☐ خود همانندی

☐ دیگر ویژگی‌های جهان شمول

☐ مدل‌ها و جهان شمولی آشوب

☐ کامپیوترها و آشوب



در مبحث قبل، به برخی ویژگی‌های کیفی مشترک در چند سیستم غیرخطی اشاره شد.

در این مبحث، به طور اجمالی به معرفی برخی ویژگی‌های کمی جهان‌شمول این سیستم‌ها می‌پردازیم.

در این مبحث نیز مطالب به شیوه‌ی توصیفی ارائه شده است نه به شیوه‌ی استدلال از کل به جزء (استدلال قیاسی)!

فهرست مطالب

☒ مقدمه

☐ عدد دلتای Feigenbaum (نسبت همگرایی) ←

☐ نسبت همگرایی در سیستم‌های واقعی

☐ پیش‌بینی با استفاده از دلتای Feigenbaum

☐ عدد آلفای Feigenbaum (مقیاس اندازه)

☐ خود همانندی

☐ دیگر ویژگی‌های جهان شمول

☐ مدل‌ها و جهان شمولی آشوب

☐ کامپیوترها و آشوب



تاریخچه:



Mitchell Feigenbaum: 1944-

ویژگی‌های کمی جهان‌شمول در دو برابر شدن تناوب به آشوب (period-doubling route to chaos) برای اولین بار توسط فیزیکدان نظری، **Mitchell feigenbaum** کشف گردید.

پشتوانه‌ی این کشف، مشاهده‌ی شواهدی از وجود جهان‌شمولی کمی در توابع مختلف بود.

$$x_{n+1} = Ax_n(1 - x_n)$$

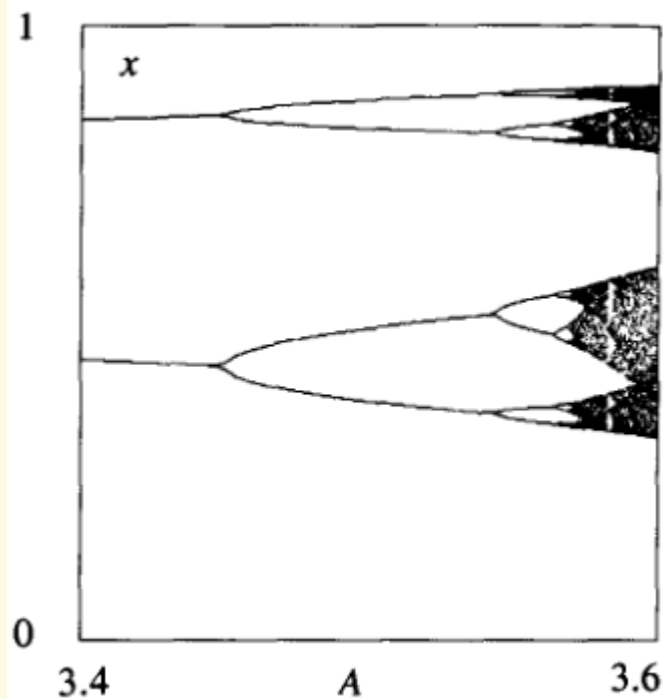


Fig. 2.1. A portion of the bifurcation diagram for the logistic map function, Eq. (2.2-1) showing the period-doublings leading to chaos indicated by the fuzzy bands at the right of the diagram.

$$x_{n+1} = B \sin(\pi x_n)$$

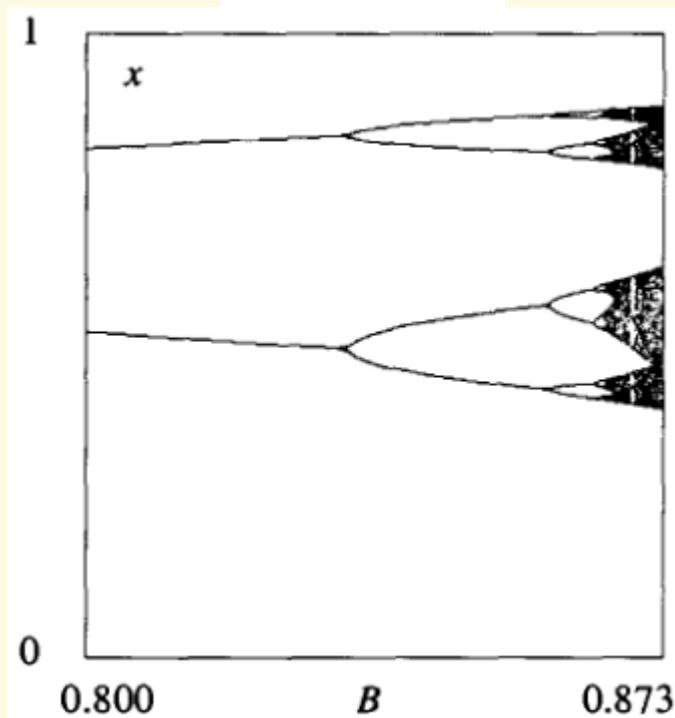


Fig. 2.2. Part of the bifurcation diagram for the sine map, Eq. (2.2-2).

توصیف A_n و d_n بر اساس نمودار دوشاخه شدن

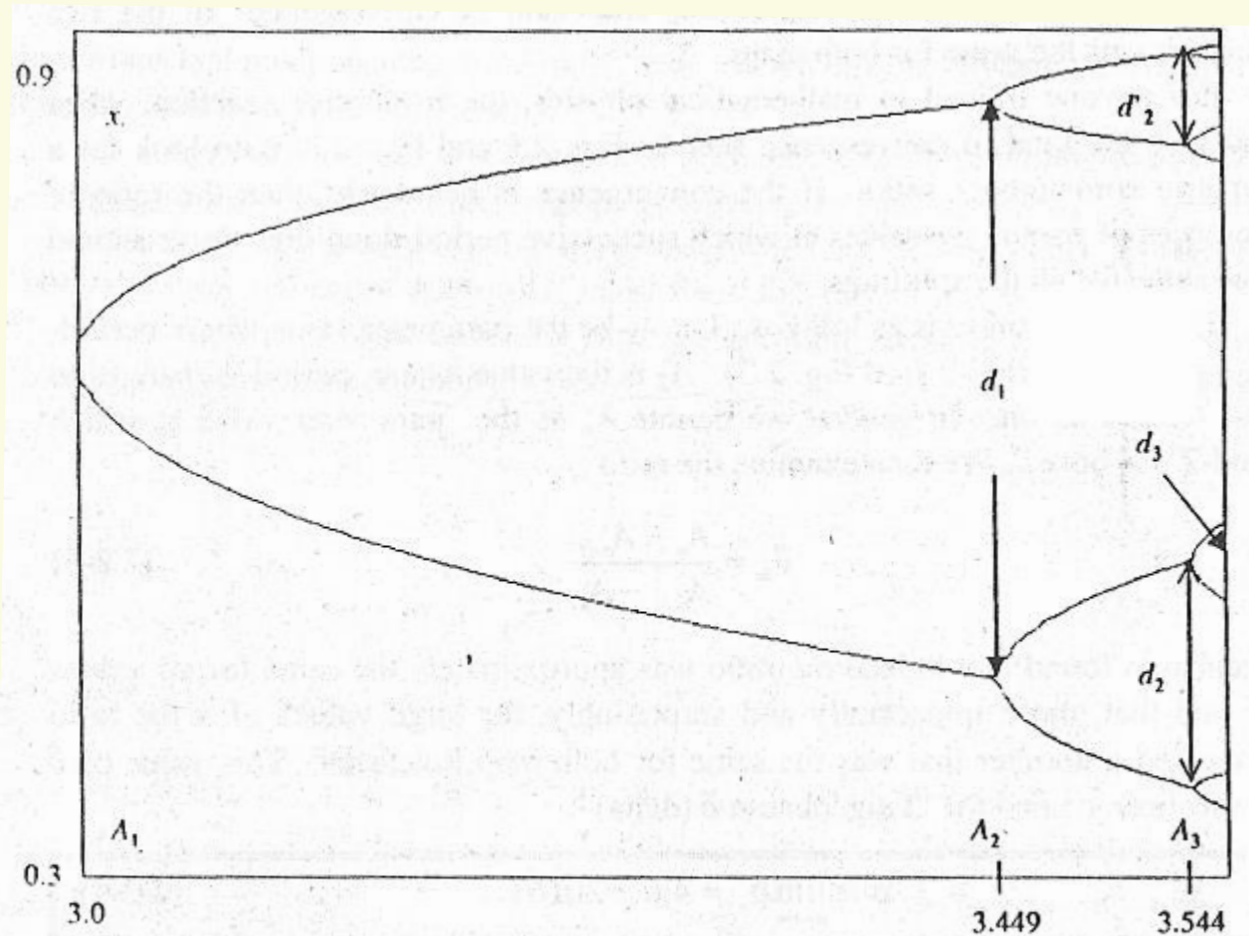


Fig. 2.3. A portion of the bifurcation diagram for the logistic map. The λ s indicate the parameter values at which period-doubling bifurcations occur. The d s indicate the relative sizes of the bifurcation patterns at the bifurcation points.

تعریف عدد دلتای Feigenbaum

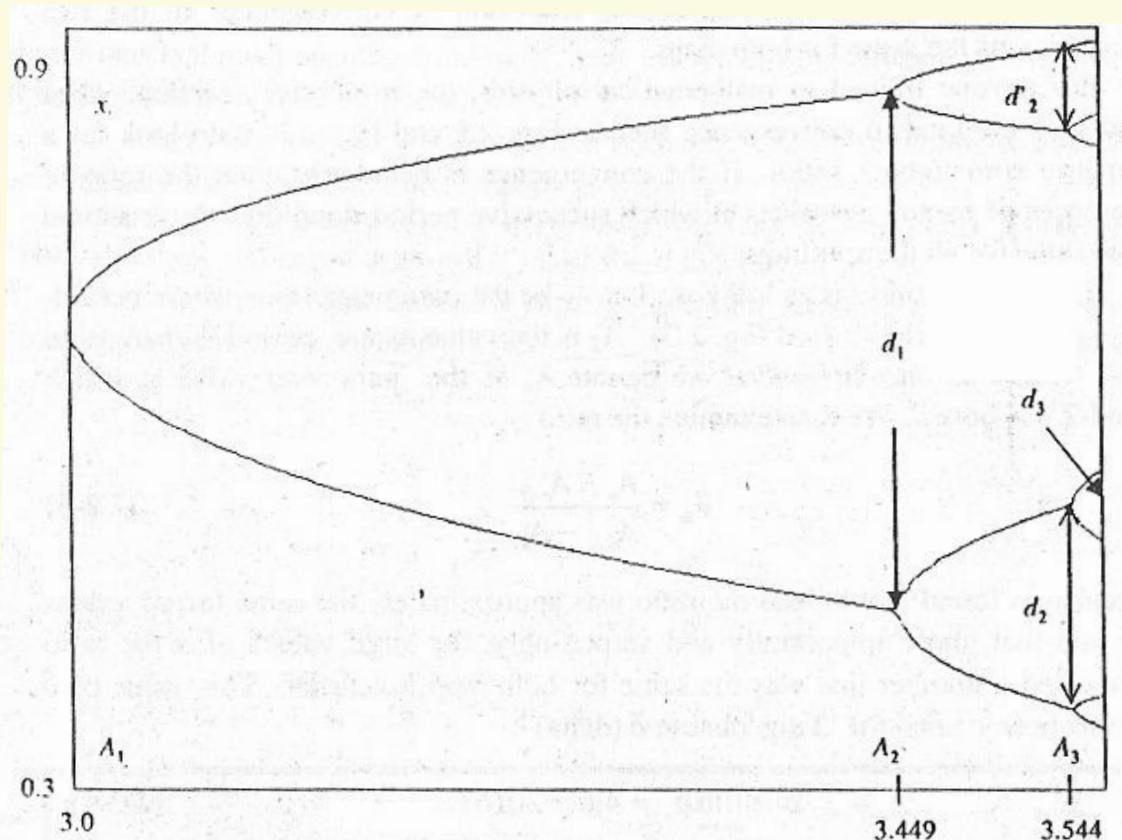


Fig. 2.3. A portion of the bifurcation diagram for the logistic map. The λ s indicate the parameter values at which period-doubling bifurcations occur. The d s indicate the relative sizes of the bifurcation patterns at the bifurcation points.

$$\delta_n = \frac{A_n - A_{n-1}}{A_{n+1} - A_n} \Rightarrow \delta \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 4.66920161 \dots$$

Research Problem: Relate the Feigenbaum δ value, 4.669..., to some other fundamental numbers, for example, π , e (2.718...), the golden mean ratio $(\sqrt{5} - 1)/2$, and so on (no known solution).

پارامتر supercycle

Feigenbaum برای محاسبه δ از پارامتر **supercycle** استفاده نمود.
Supercycle تناوب خاص به orbit با آن تناوب اطلاق می گردد که طول بیشینه ی تابع نگاشت (x_{max}) را شامل باشد.
برای logistic map ، مقدار $x_{max} = 0.5$ است.
 A_n^s مقداری از پارامتر که به ازای آن، x_{max} بخشی از orbit تناوب 2^n است.

از دیدگاه محاسبات عددی، پیاده سازی تعریف supercycle آسان تر است.
در موارد آزمایشگاهی، تنها مقادیر نقاط دوشاخه شدن قابل تعیین است زیرا تابع نگاشت و x_{max} آن نامعین است.

مثال:

مقدار پارامتر در نقاط دوشاخه شدن و supercycle برای logistic map به همراه مقدار پارامتر supercycle برای sine map در جدول زیر داده شده است. مقادیر δ_n را محاسبه نموده و با $\delta = 4.66920161 \dots$ مقایسه کنید.

Table 2.1.
Bifurcation and Supercycle Values
for the Logistic Map and the Sine Map

n	A_n	A_n^S	B_n^S
1	3.00000	3.23607	0.77734
2	3.4931	3.49856	0.84638
3	3.54402	3.55463	0.86145
4	3.56437	3.56667	0.86469
5	3.56875	3.56924	0.86539
∞	3.569946...	—	—

n	A_n	A_n^s	B_n^s
1	3.00000	3.23607	0.77734
2	3.4931	3.49856	0.84638
3	3.54402	3.55463	0.86145
4	3.56437	3.56667	0.86469
5	3.56875	3.56924	0.86539
∞	3.569946...	—	—

حل مثال: □

$$\delta_2 = \frac{A_2 - A_1}{A_3 - A_2} \Rightarrow \delta_2 = \frac{3.4931 - 3.00000}{3.54402 - 3.4931} = 9.68382$$

$$\delta_3 = \frac{A_3 - A_2}{A_4 - A_3} \Rightarrow \delta_3 = \frac{3.54402 - 3.4931}{3.56437 - 3.54402} = 2.50221$$

$$\delta_4 = \frac{A_4 - A_3}{A_5 - A_4} \Rightarrow \delta_4 = \frac{3.56437 - 3.54402}{3.56875 - 3.56437} = 4.64611$$

$$\delta_2 = \frac{A_2^s - A_1^s}{A_3^s - A_2^s} = 4.68147$$

$$\delta_3 = \frac{A_3^s - A_2^s}{A_4^s - A_3^s} = 4.65698$$

$$\delta_4 = \frac{A_4^s - A_3^s}{A_5^s - A_4^s} = 4.68482$$

$$\delta_2 = \frac{B_2^s - B_1^s}{B_3^s - B_2^s} = 4.57825$$

$$\delta_3 = \frac{B_3^s - B_2^s}{B_4^s - B_3^s} = 4.65432$$

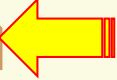
$$\delta_4 = \frac{B_4^s - B_3^s}{B_5^s - B_4^s} = 4.62857$$

Note that δ is defined in such a way that it is independent of the units in which the parameter is measured (that is, we can multiply all the parameter values by a common factor and still get the same δ value). It is also independent of a shift in the zero of the scale on which the parameter values are measured (that is, we can add to or subtract from the parameter values a common number and still get the same δ value).

فهرست مطالب

☒ مقدمه

☒ عدد دلتای Feigenbaum (نسبت همگرایی)

☐ نسبت همگرایی در سیستم‌های واقعی 

☐ پیش‌بینی با استفاده از دلتای Feigenbaum

☐ عدد آلفای Feigenbaum (مقیاس اندازه)

☐ خود همانندی

☐ دیگر ویژگی‌های جهان شمول

☐ مدل‌ها و جهان شمولی آشوب

☐ کامپیوترها و آشوب



Table 2.2.
Voltage values for bifurcations in the diode circuit.

n	V_n (30 kHz)	V_n (85 kHz)
1	-3.470(8)	-0.946(1)
2	-2.505(8)	-0.438(1)
3	-2.234(7)	-0.330(1)

Two comments are in order:

1. It is important (and, in fact, crucial) to take into account experimental uncertainties in calculating these ratios. We see that for the higher-order bifurcations, the experimental uncertainties become as large as the parameter differences, and the resulting relative uncertainty in δ becomes quite large.
2. The experimentally determined values for δ_n are close to but often do not agree with the Feigenbaum value of 4.669 even within the range of experimental uncertainties.

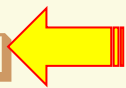
Table 2.3. Feigenbaum δ Values Determined by Experiment				
Experiment	Ref.	Max $n+1$ observed	Value of δ_n	Difference From 4.669
Fluid convection	GMP81	4	4.3(8)	-0.3(8)
Diode circuit	TPJ82	5	4.3(1)	-0.3(1)
Optical bistability	HKG82	3	4.3(3)	-0.3(3)
Acoustic waves in helium	STF82	3	4.8(6)	+0.2(6)
Josephson-junction analog	YEK82	3	4.4(3)	-0.2(3)

فهرست مطالب

☒ مقدمه

☒ عدد دلتای Feigenbaum (نسبت همگرایی)

☒ نسبت همگرایی در سیستم‌های واقعی

☐ پیش‌بینی با استفاده از دلتای Feigenbaum 

☐ عدد آلفای Feigenbaum (مقیاس اندازه)

☐ خود همانندی

☐ دیگر ویژگی‌های جهان شمول

☐ مدل‌ها و جهان شمولی آشوب

☐ کامپیوترها و آشوب



پیش‌بینی شرایط بروز آشوب:

مثال: با استفاده از رابطه‌ی تقریبی تعریف عدد دلتای Feigenbaum، رابطه‌ای برای پیش‌بینی مقدار پارامتر A در شرایط بروز آشوب به دست آورید.

$$\delta \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_n - A_{n-1}}{A_{n+1} - A_n}$$

$$\delta \cong \frac{A_n - A_{n-1}}{A_{n+1} - A_n}$$

Exercise 2.4-1. (a) Verify the calculation leading from Eq. (2.4-3) to Eq. (2.4-4). (b) Prove that

$$(A_\infty - A_n)\delta^n = (A_2 - A_1)\frac{\delta^2}{\delta - 1}$$

Note that the right-hand-side is independent of n . *N.B.* This result will be used several times in later chapters.

$$\Rightarrow \delta = \frac{A_2 - A_1}{A_3 - A_2} \Rightarrow A_3 = (A_2 - A_1) \frac{1}{\delta} + A_2$$

$$\Rightarrow \delta = \frac{A_3 - A_2}{A_4 - A_3} \Rightarrow A_4 = (A_3 - A_2) \frac{1}{\delta} + A_3$$

$$\Rightarrow A_4 = \left((A_2 - A_1) \frac{1}{\delta} + A_2 - A_2 \right) \frac{1}{\delta} + (A_2 - A_1) \frac{1}{\delta} + A_2$$

$$\Rightarrow A_4 = (A_2 - A_1) \left(\frac{1}{\delta} + \frac{1}{\delta^2} \right) + A_2$$

$$\Rightarrow \delta = \frac{A_4 - A_3}{A_5 - A_4} \Rightarrow A_5 = (A_4 - A_3) \frac{1}{\delta} + A_4$$

$$\Rightarrow A_5 = \left((A_2 - A_1) \left(\frac{1}{\delta} + \frac{1}{\delta^2} \right) + A_2 - \left((A_2 - A_1) \frac{1}{\delta} + A_2 \right) \right) \frac{1}{\delta} + A_4$$

$$\Rightarrow A_5 = \left((A_2 - A_1) \frac{1}{\delta^2} \right) \frac{1}{\delta} + (A_2 - A_1) \left(\frac{1}{\delta} + \frac{1}{\delta^2} \right) + A_2$$

$$\Rightarrow A_5 = (A_2 - A_1) \left(\frac{1}{\delta} + \frac{1}{\delta^2} + \frac{1}{\delta^3} \right) + A_2$$

$$\Rightarrow A_{\infty} = (A_2 - A_1) \left(\frac{1}{\delta - 1} \right) + A_2$$

می دانیم: □

$$\delta = \frac{A_n - A_{n-1}}{A_{n+1} - A_n}$$

$$(A_{\infty} - A_n)\delta^n = (A_2 - A_1) \left(\frac{\delta^2}{\delta - 1} \right)$$

مثال: ثابت کنید

دقت کنید که عبارت سمت راست مستقل از n است. از این رابطه به دفعات در مباحث بعدی استفاده خواهد شد.

$$A_3 = (A_2 - A_1) \frac{1}{\delta} + A_2$$

□ بر اساس محتوای اسلاید قبل داریم:

$$A_4 = (A_2 - A_1) \left(\frac{1}{\delta} + \frac{1}{\delta^2} \right) + A_2$$

$$A_5 = (A_2 - A_1) \left(\frac{1}{\delta} + \frac{1}{\delta^2} + \frac{1}{\delta^3} \right) + A_2$$

$$\Rightarrow A_n = (A_2 - A_1) \left(\frac{1}{\delta} + \frac{1}{\delta^2} + \cdots + \frac{1}{\delta^{n-2}} \right) + A_2$$

$$\Rightarrow A_n = (A_2 - A_1) \left(\frac{1 - \delta^{-n+2}}{\delta - 1} \right) + A_2$$

$$\Rightarrow A_{\infty} = (A_2 - A_1) \left(\frac{1}{\delta - 1} \right) + A_2$$

$$\Rightarrow (A_{\infty} - A_n)\delta^n = (A_2 - A_1) \left(\frac{\delta^2}{\delta - 1} \right)$$

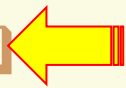
فهرست مطالب

☒ مقدمه

☒ عدد دلتای Feigenbaum (نسبت همگرایی)

☒ نسبت همگرایی در سیستم‌های واقعی

☒ پیش‌بینی با استفاده از دلتای Feigenbaum

☐ عدد آلفای Feigenbaum (مقیاس اندازه) 

☐ خود همانندی

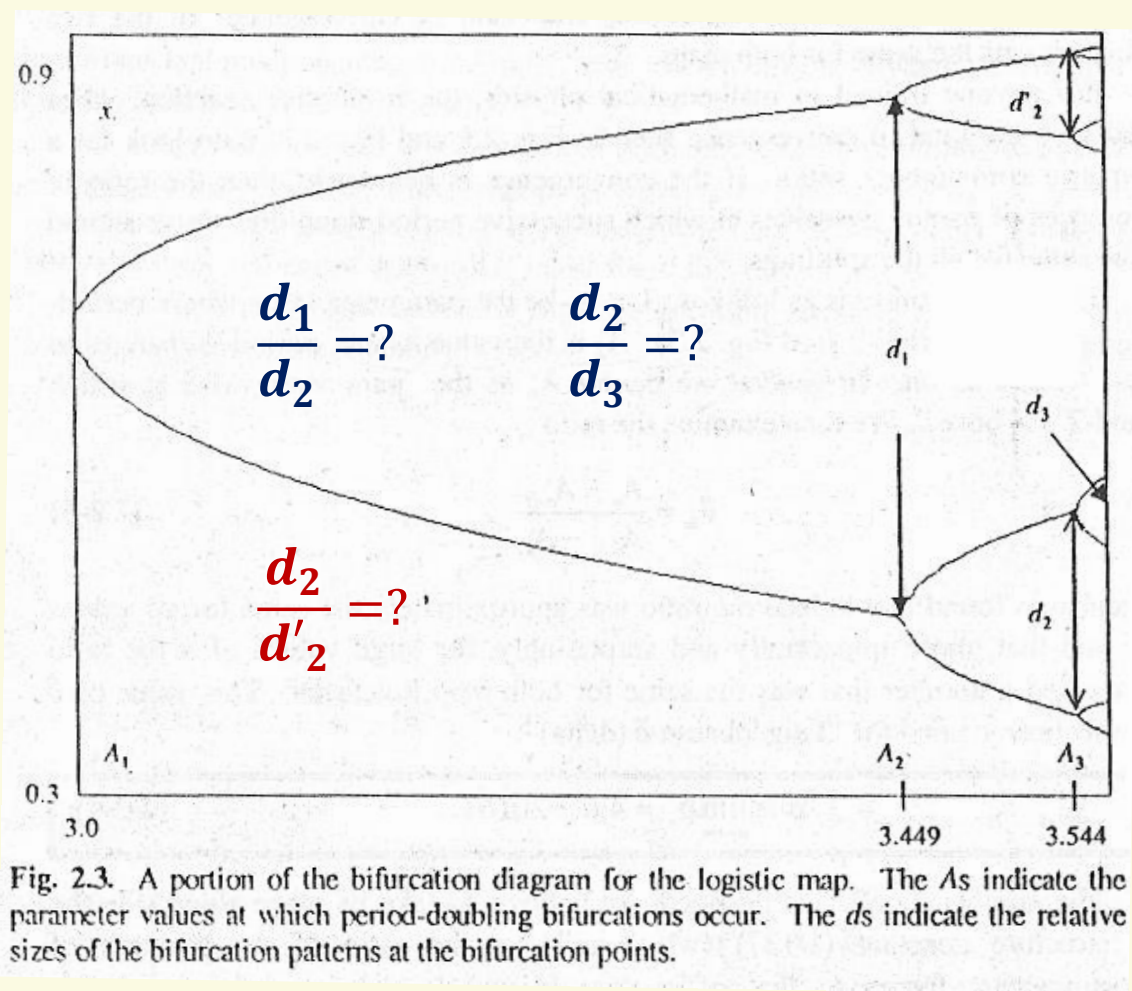
☐ دیگر ویژگی‌های جهان شمول

☐ مدل‌ها و جهان شمولی آشوب

☐ کامپیوترها و آشوب



جهان شمولی در نسبت اندازه!



تعريف عدد آلفاي Feigenbaum

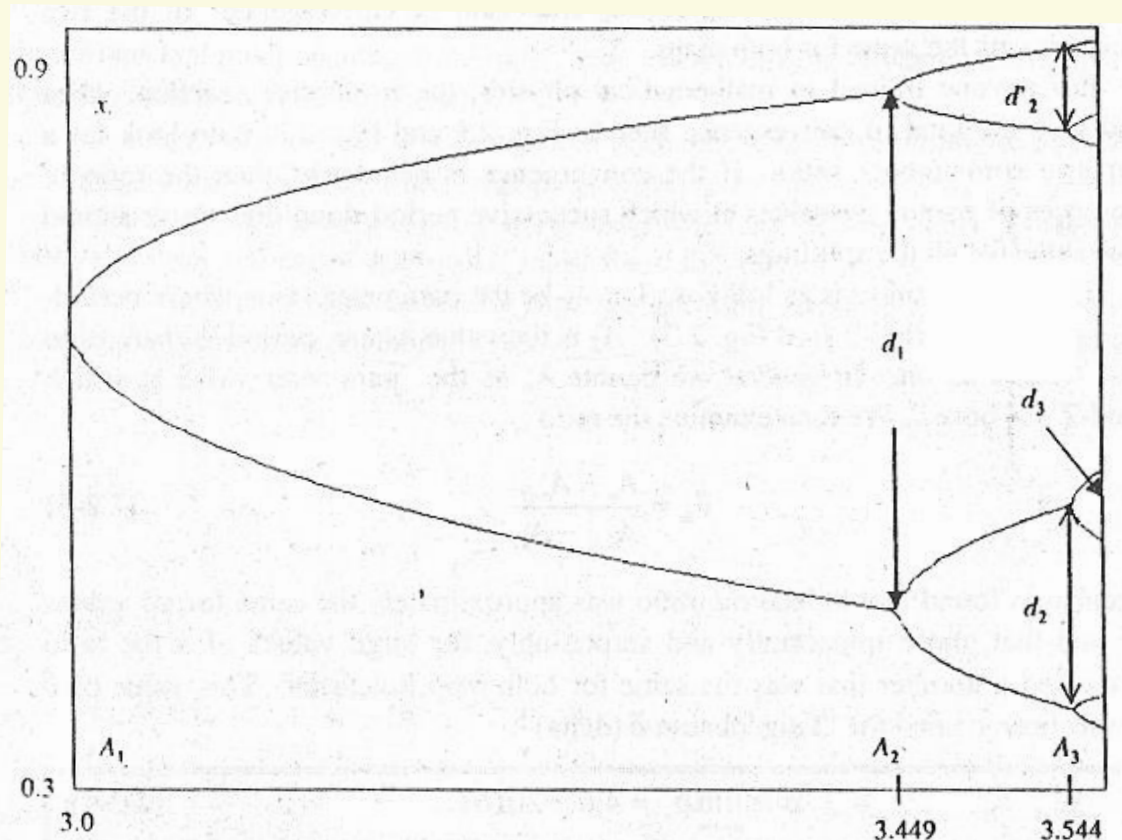
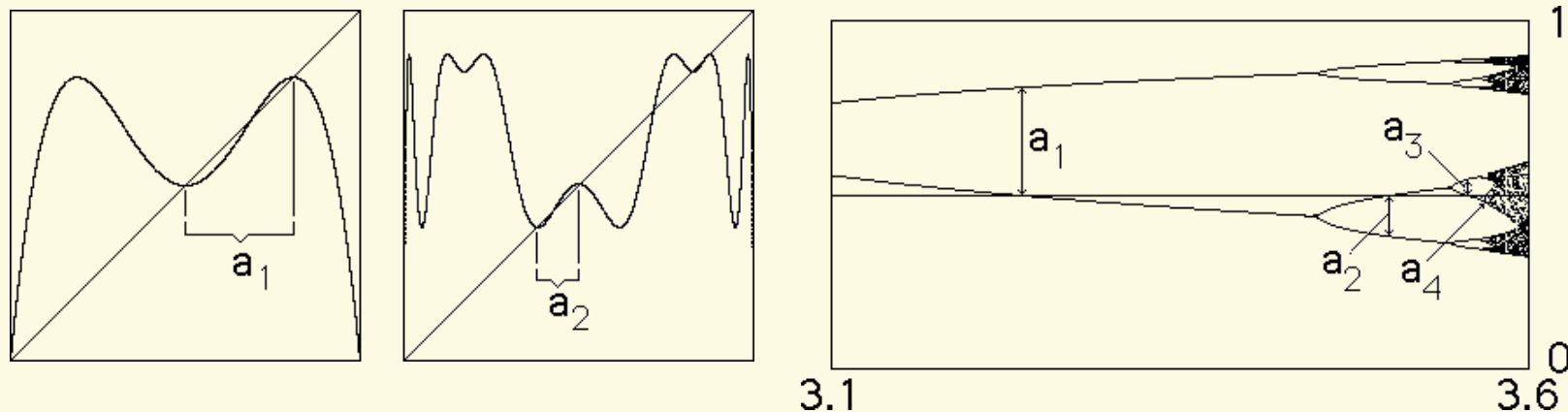


Fig. 2.3. A portion of the bifurcation diagram for the logistic map. The λ s indicate the parameter values at which period-doubling bifurcations occur. The d s indicate the relative sizes of the bifurcation patterns at the bifurcation points.

$$\Rightarrow \alpha \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d_n}{d_{n+1}} = 2.5029 \dots$$

روش Feigenbaum برای محاسبه نسبت اندازه



Feigenbaum actually used a slightly different definition of d_n in his determination of α . As in the definition of δ , the d s refer to distances in the bifurcation diagram when the point $x_{\max}$ is part of the trajectory. We shall make use of this choice of distance in Chapter 5 and Appendix F. We intuitively expect that the two definitions give the same numerical values for high-order bifurcations.

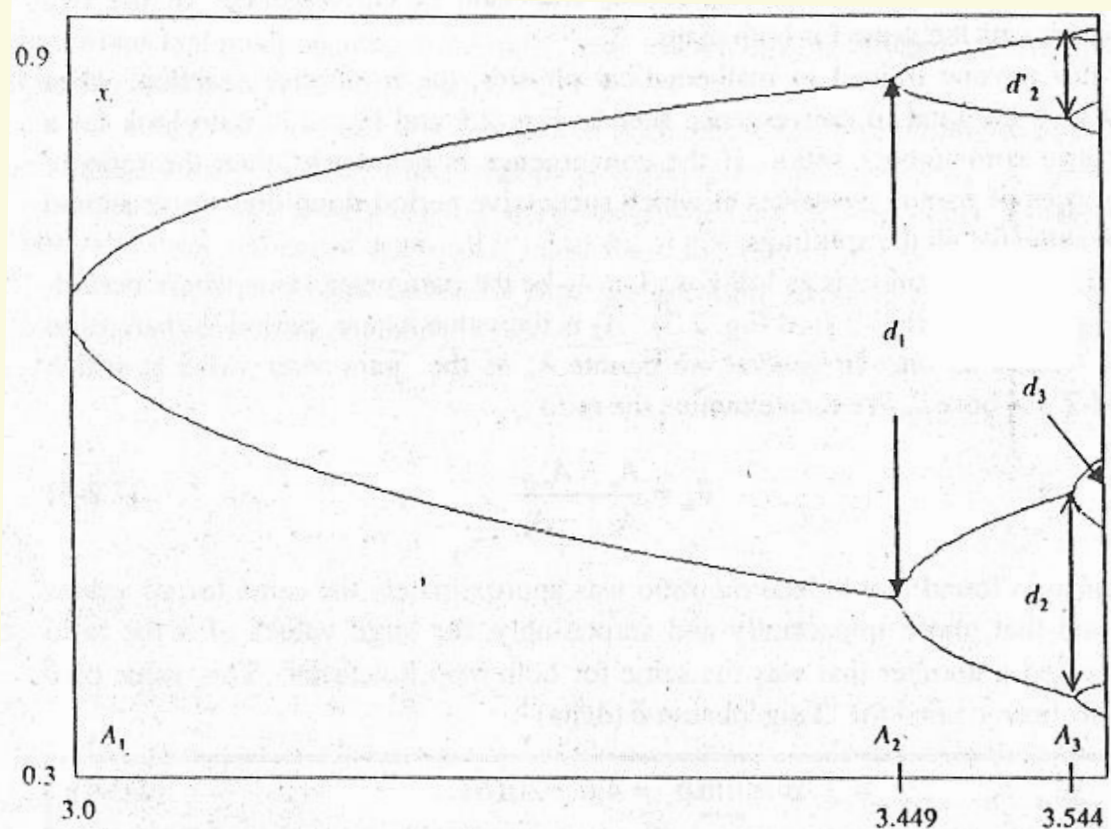


Fig. 2.3. A portion of the bifurcation diagram for the logistic map. The A s indicate the parameter values at which period-doubling bifurcations occur. The d s indicate the relative sizes of the bifurcation patterns at the bifurcation points.

Exercise 2.5-1. Use a ruler to measure the appropriate lengths in Fig. 2.3 to determine the Feigenbaum α value. Estimate your measurement uncertainties.

Exercise 2.5-2. Use numerically generated values from the logistic map to estimate α . Estimate numerical uncertainties due to the finite precision of your computer's arithmetic.

بحث: مناسب بودن مقدار دلتای Feigenbaum

عدد دلتای Feigenbaum **درست عدد مناسبی** است.

الف: اگر مقدار δ به مراتب **بزرگ تر** باشد (مثلا ۴۰ یا ۵۰)، شرایط را تحلیل کنید!

ب: اگر مقدار δ به مراتب **کوچک تر** باشد (مقداری نزدیک به ۱)، شرایط را تحلیل کنید.

در این شرایط، دو برابر شدن تناوب با تغییر مقدار پارامتر چنان سریع رخ خواهد داد که مشاهده‌ی آزمایشگاهی آن بسیار مشکل خواهد بود.

مثلا برای $\delta = 50$ ، اختلاف $A_3 - A_2$ حدود 0.02% اختلاف $A_2 - A_1$ است و اختلاف $A_4 - A_3$ حدود 0.0004% اختلاف $A_2 - A_1$ می‌باشد.

تحلیل الف:

در این شرایط، دو برابر شدن تناوب با تغییر مقدار پارامتر بسیار پخش و گسترده خواهد بود. از این رو لازم خواهد بود محدوده‌ای وسیع از پارامتر دنبال شود تا همگرایی مشاهده گردد. این موضوع در مواردی نظیر مدار دیودی می‌تواند محدود کننده باشد.

تحلیل ب:

تمرین: مناسب بودن مقدار آلفای Feigenbaum

Exercise 2.5-3. Carry through the same kind of argument to show that the Feigenbaum α is also about the “right size.”

سوال: ارتباط مقادیر دلتا و آلفای Feigenbaum

Question: Is there a connection between the values for δ and α ? The answer is given in Chapter 5 and Appendix F.

تعیین α بر اساس دادگان آزمایشگاهی

در توصیف **نظری** نسبت اندازه، محدودیت **دو شاخه شدن مرتبه بالا** لحاظ می‌گردد:

$$\alpha \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d_n}{d_{n+1}} = 2.5029 \dots$$

در حالی که،

در تعیین **آزمایشگاهی** نسبت اندازه با محدودیت **دو شاخه شدن مرتبه پایین** مواجه هستیم.

واژه‌نامه:

High-order bifurcation

Low-order bifurcation

دو شاخه شدن مرتبه بالا

دو شاخه شدن مرتبه پایین

فهرست مطالب

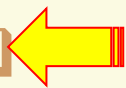
☒ مقدمه

☒ عدد دلتای Feigenbaum (نسبت همگرایی)

☒ نسبت همگرایی در سیستم‌های واقعی

☒ پیش‌بینی با استفاده از دلتای Feigenbaum

☒ عدد آلفای Feigenbaum (مقیاس اندازه)

☐ خود همانندی 

☐ دیگر ویژگی‌های جهان شمول

☐ مدل‌ها و جهان شمولی آشوب

☐ کامپیوترها و آشوب



خودهمانندی (self-similarity)

با فرض دو شاخه شدن مرتبه بالا (high-order bifurcation)،

چه دستکاری‌هایی لازم است تا بخش آبی‌رنگ همانند بخش سبز رنگ گردد؟

چه دستکاری‌هایی لازم است تا بخش قرمز رنگ همانند بخش سبز رنگ گردد؟

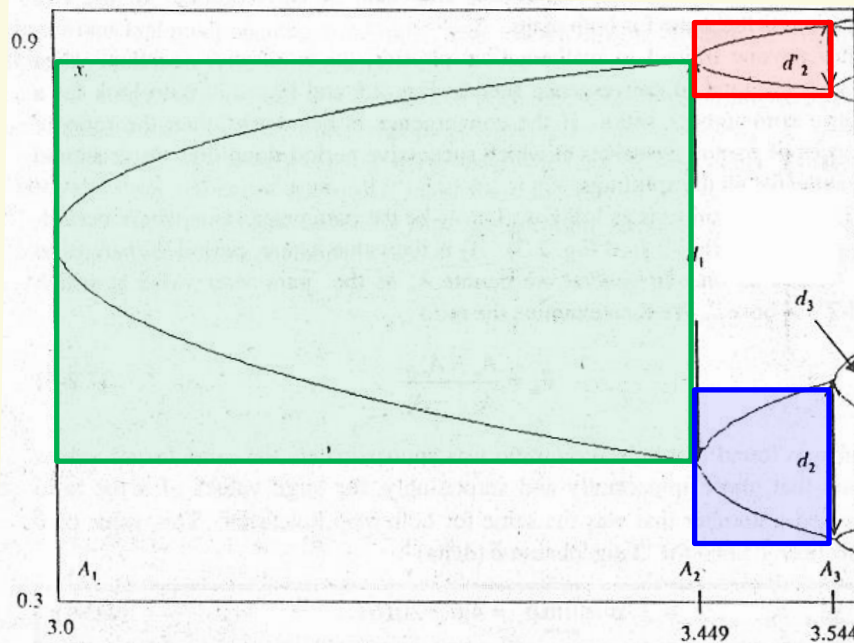


Fig. 2.3. A portion of the bifurcation diagram for the logistic map. The A s indicate the parameter values at which period-doubling bifurcations occur. The d s indicate the relative sizes of the bifurcation patterns at the bifurcation points.

موجودیت‌های خودهمانند اصطلاحاً

فرکتال نامیده می‌شوند زیرا اغلب

بعد هندسی آنها غیر صحیح است!

خودهمانندی (self-similarity)

❖ اهمیت خودهمانندی در چیست؟

بسیاری از ویژگی‌های ساختار هندسی، مستقل از جزئیاتی از مدل است که از آن حاصل شده است.

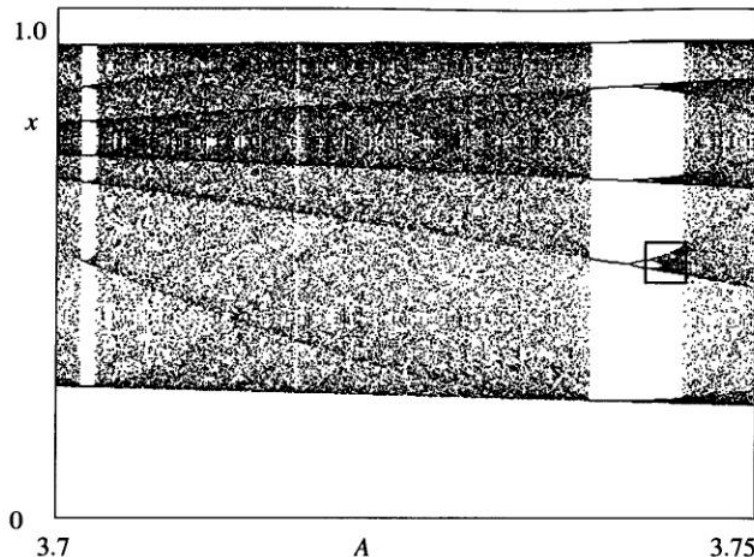


Fig. 2.4. An expanded view of the bifurcation diagram for the logistic map near the period-5 window. An expanded view of the region inside the box is shown in Fig. 2.5.

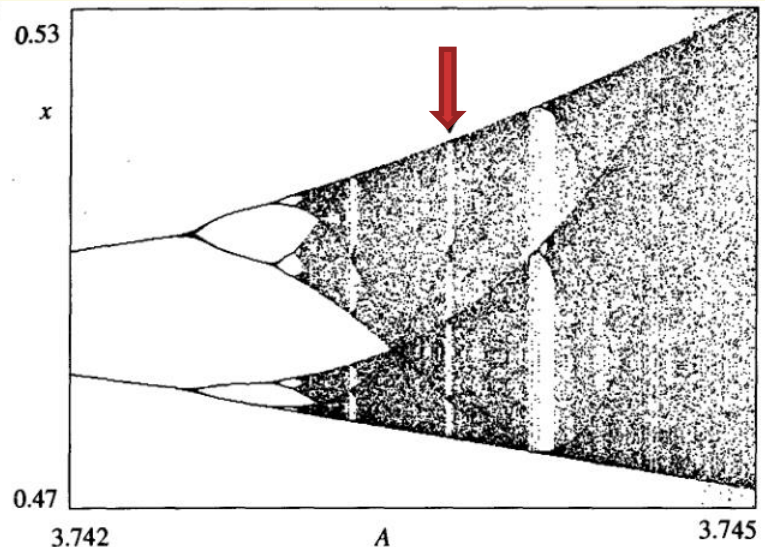


Fig. 2.5. An expanded view of the region inside the box in Fig. 2.4. The self-similarity of the bifurcation diagram is indicated by the existence of yet another period-5 window, indicated by the arrow, inside the chaotic band.

مثالی دیگر!

❖ یک انسان! یک سلول فرد! ژن‌ها!

فهرست مطالب

☒ مقدمه

☒ عدد دلتای Feigenbaum (نسبت همگرایی)

☒ نسبت همگرایی در سیستم‌های واقعی

☒ پیش‌بینی با استفاده از دلتای Feigenbaum

☒ عدد آلفای Feigenbaum (مقیاس اندازه)

☒ خود همانندی

☐ دیگر ویژگی‌های جهان شمول 

☐ مدل‌ها و جهان‌شمولی آشوب

☐ کامپیوترها و آشوب



دیگر ویژگی‌های جهان شمول

ویژگی‌های جهان شمول کشف شده برای سیستم‌های غیرخطی به اعداد Feigenbaum محدود نمی‌شود.

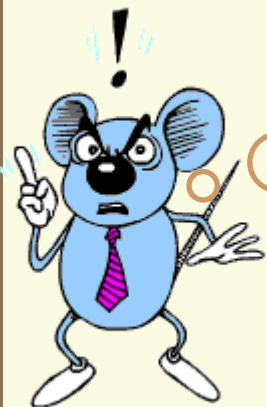
در مباحث بعدی
مطرح خواهد شد.

❖ جهان شمولی در طیف توان سیستم‌های آشوبناک

❖ جهان شمولی در اثر نویز سیستم‌های آشوبناک

طرح یک سوال مهم!

آیا این ویژگی‌های کمی برای تمام سیستم‌های
غیرخطی برقرار است؟



فهرست مطالب

☒ مقدمه

☒ عدد دلتای Feigenbaum (نسبت همگرایی)

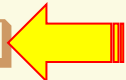
☒ نسبت همگرایی در سیستم‌های واقعی

☒ پیش‌بینی با استفاده از دلتای Feigenbaum

☒ عدد آلفای Feigenbaum (مقیاس اندازه)

☒ خود همانندی

☒ دیگر ویژگی‌های جهان شمول

☐ مدل‌ها و جهان شمولی آشوب 

☐ کامپیوترها و آشوب



مدل‌ها و جهان‌شمولی آشوب

در مبحث نخست، مدل‌هایی مورد بحث قرار گرفت:

❖ مدل logistic map برای رشد جمعیت بیولوژیکی

❖ مدل Lorenz برای همرفت میال

تعریف مدل؟!

مزیت‌های استفاده از مدل؟!

ملاحظات استفاده از مدل؟!



فهرست مطالب

☒ مقدمه

☒ عدد دلتای Feigenbaum (نسبت همگرایی)

☒ نسبت همگرایی در سیستم‌های واقعی

☒ پیش‌بینی با استفاده از دلتای Feigenbaum

☒ عدد آلفای Feigenbaum (مقیاس اندازه)

☒ خود همانندی

☒ دیگر ویژگی‌های جهان شمول

☒ مدل‌ها و جهان شمولی آشوب

☐ کامپیوترها و آشوب



کامپیوترها و آشوب

پیشرفت‌ها در حوزه‌ی آشوب و دینامیک غیرخطی مدیون ۲ پدیده است:

❖ کامپیوترهای دیجیتال سرعت بالا

❖ گرافیک کامپیوتری

✓ برای دستیابی به حل عددی معادلات دینامیک غیرخطی به کامپیوتر نیاز است.

✓ گرافیک کامپیوتری راهی برای به تصویر کشیدن رفتار سیستم‌های غیرخطی فراهم می‌سازد تا چگونگی تغییر رفتار سیستم با تغییر پارامترهای سیستم مشهود گردد.

✓ هرچند مفاهیمی نظری نیز نیاز است تا به آنچه در انبوه رفتارهای پیچیده‌ی سیستم‌های غیرخطی مشاهده می‌گردد سازمان داده شود.

طرح یک مسئله‌ی چالشی

با توجه به «واگرایی تراژکتوری‌های نزدیک به هم» از یک سو و
«نویز گرد کردن در محاسبات کامپیوتری» از سوی دیگر،
چگونه می‌توان به نتایج محاسبات تراژکتوری‌ها جهت دستیابی
به نتایج قابل اعتماد امید داشت؟



فهرست مطالب

✓ مقدمه

✓ عدد دلتای Feigenbaum (نسبت همگرایی)

✓ نسبت همگرایی در سیستم‌های واقعی

✓ پیش‌بینی با استفاده از دلتای Feigenbaum

✓ عدد آلفای Feigenbaum (مقیاس اندازه)

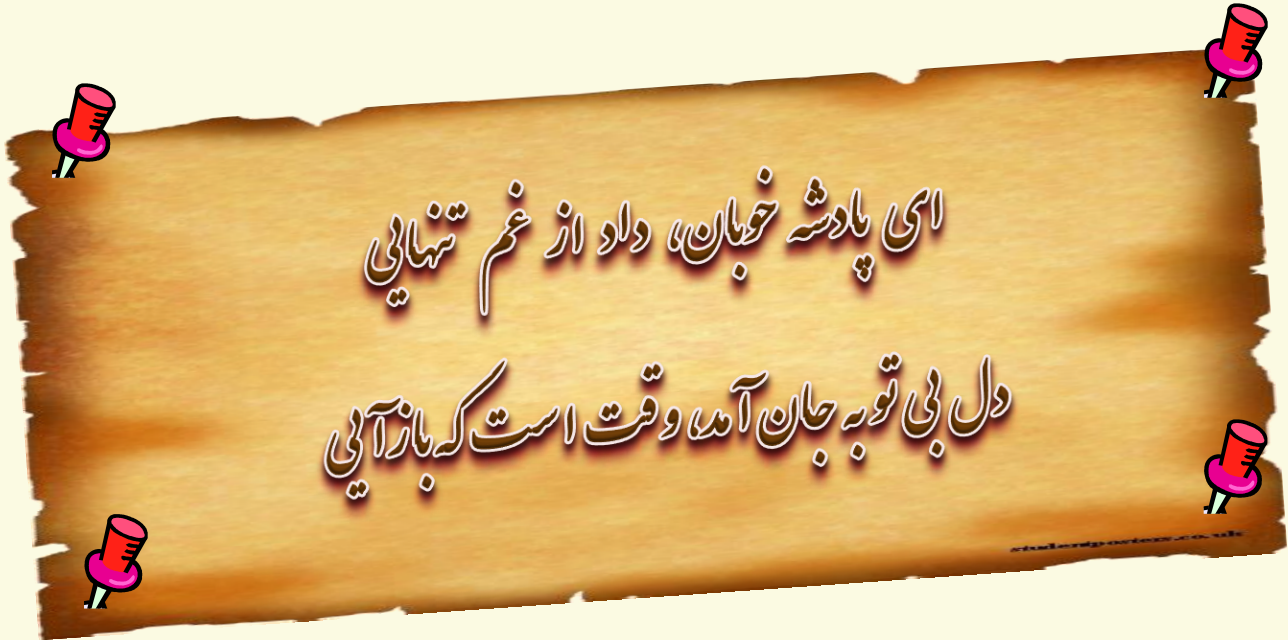
✓ خود همانندی

✓ دیگر ویژگی‌های جهان شمول

✓ مدل‌ها و جهان شمولی آشوب

✓ کامپیوترها و آشوب





ای پادشہ خوبان، دلد از غم تنهایی
دل بی توبه جان آمد وقت است که باز آیی