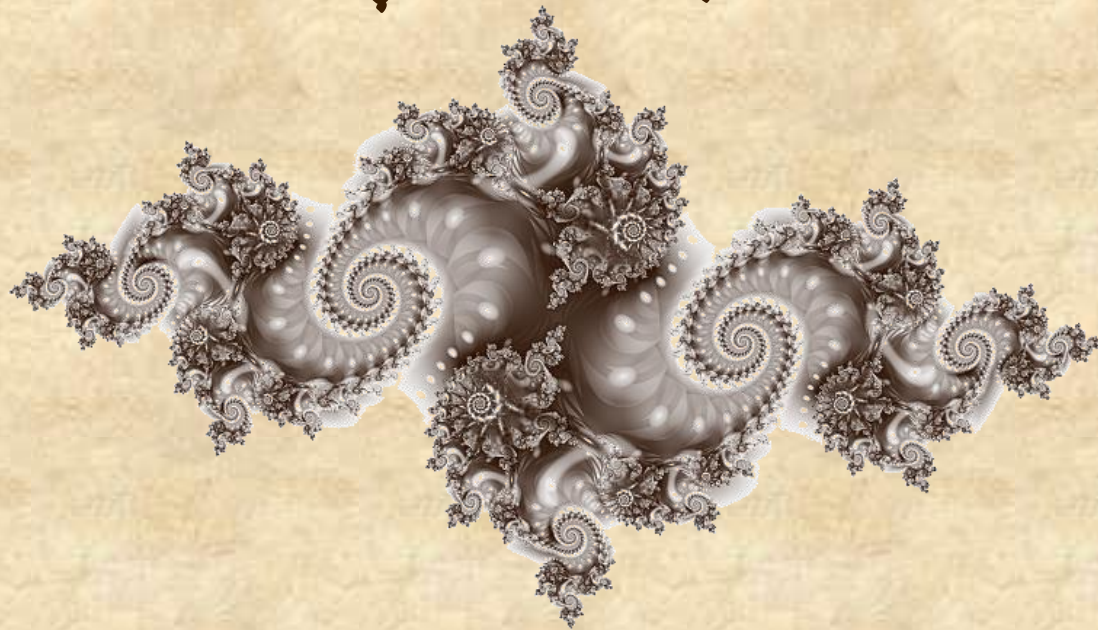


دینامیک غیر خطی و آشوب

و کاربردهای آن در مهندسی پزشکی



مبحث سوم - بخش اول

دینامیک در فضای حالت یک بعدی

فهرست مطالب

❑ فضای حالت ←

❑ سیستم‌های توصیف‌شده با معادلات دیفرانسیل مرتبه اول

❑ قضیه‌ی No-Intersection

❑ سیستم‌های باتلف و جاذب‌ها

❑ فضای حالت یک‌بعدی

❑ خطی‌سازی سری تیلور در نزدیکی نقاط ثابت

❑ تراژکتوری‌ها در فضای حالت یک‌بعدی

❑ بازنگری مفهوم اتلاف



اصطلاحات فضای حالت

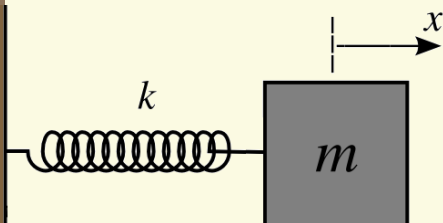
❖ متغیر حالت

❖ فضای حالت

❖ بُعد فضای حالت

تعداد متغیرهای مورد نیاز برای تعیین حالت دینامیکی سیستم.

مثال: سیستم جرم - فنر



یک سیستم جرم - فنر با جرم نقطه‌ای و فنر ایده‌ال در نظر بگیرید. m نشانگر جرم ذره و k ثابت فنر است.

معادلات حاکم بر حرکت ذره را بنویسید و با شرایط اولیه‌ی داده شده، موقعیت و سرعت ذره را تعیین نمایید.

$$x|_{t=0} = x_0, \quad \dot{x}|_{t=0} = \dot{x}_0$$

$$F(x) = m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx, \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

با حل معادله دیفرانسیل داریم:

$$\Rightarrow x(t) = x_0 \cos \omega t + \frac{\dot{x}_0}{\omega} \sin \omega t$$

$$\Rightarrow \dot{x}(t) = -\omega x_0 \sin \omega t + \dot{x}_0 \cos \omega t$$

با مشتق‌گیری از $\dot{x}$ و به دست آوردن

$\dot{x}$ نشان دهید که پاسخ در معادله دیفرانسیل سیستم صدق می‌کند.



این سیستم **دو درجه آزادی** است زیرا $x(t)$ و $\dot{x}(t)$ به طور کامل رفتار سیستم را توصیف می‌کند. $x(t)$ و $\dot{x}(t)$ نشانگر متغیرهای حالت سیستم هستند. به عبارت دیگر، **بعد فضای حالت** این سیستم ۲ است.

❖ بازنمود فاز (phase portrait) برای سیستم جرم-فنر:

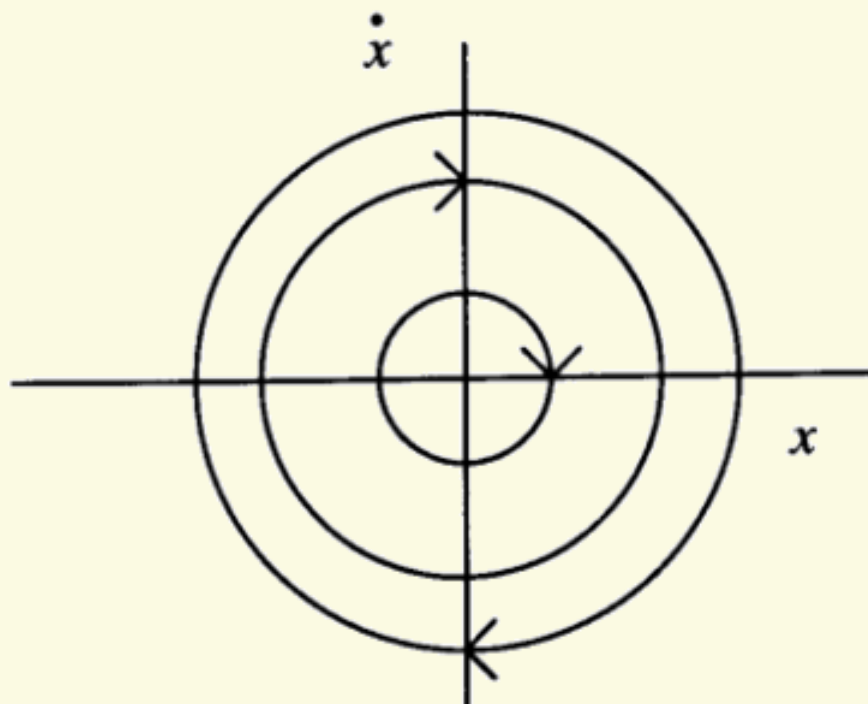


Fig. 3.1. Phase portrait for the mass on a spring. The ellipses are state space trajectories for the system. The larger the ellipse, the larger the total mechanical energy associated with the trajectory.

تراژکتوری:

سیکل (cycle): تراژکتوری‌های متناوب بسته

Phase portrait: مجموعه‌ای از تراژکتوری‌های آغاز شده از نقاط اولیه متفاوت.

نکاتی در رابطه با اصطلاحات

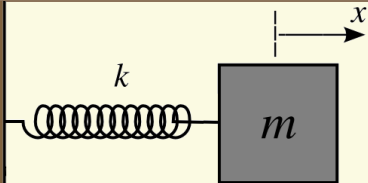
❖ فضای حالت و فضای فاز

1. In the literature on dynamical systems and chaos, the terms *phase space* and *state space* are often used interchangeably. The term phase space was borrowed from Josiah Willard Gibbs in his treatment of statistical mechanics. The use of this notion in dynamical systems and chaos is somewhat more general than that used by Poincaré and Gibbs; so, we prefer (and will use) the term *state space*.

نکاتی در رابطه با اصطلاحات: درجه آزادی

2. There is also some ambiguity about the use of the term *degree of freedom*. In the classical mechanics of point particles a degree of freedom refers to a pair of variables, such as the position coordinate along the x axis and the corresponding component of the linear momentum p_x . In this usage, our simple mass on a spring has one degree of freedom. (We shall use this definition in Chapter 8.) In dynamical systems theory, the number of degrees of freedom is usually defined as the number of independent variables needed to specify the dynamical state of the system (or alternately, but equivalently, as the number of independent initial conditions that can be specified for the system). We will use the latter definition of degree of freedom (except in Chapter 8). In the first sense of “degrees of freedom,” the corresponding phase space must always have an even number (2, 4, 6, ...) of dimensions. However, in the theory of dynamical systems and chaos, it will often be useful to have state spaces with an odd number of dimensions. The Lorenz model of Chapter 1 is one such example.

مثال



برای سیستم جرم-فنر و با استفاده از روابط $x(t)$ و $\dot{x}(t)$ ،

الف: نشان دهید تراژکتوری‌ها در فضای حالت به صورت بیضی‌هایی خواهند بود.

ب: کران‌های موقعیت در حرکت جرم متناظر با کدام نقاط سیکل است؟

ج: بیشترین سرعت جرم متناظر با کدام نقاط سیکل است؟

د: تبادل انرژی‌های جنبشی-پتانسیل چگونه است؟

$$x(t) = x_0 \cos \omega t + \frac{\dot{x}_0}{\omega} \sin \omega t$$

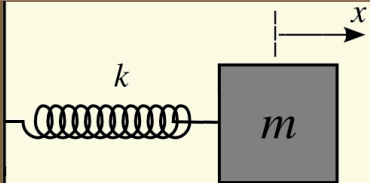
$$\dot{x}(t) = -\omega x_0 \sin \omega t + \dot{x}_0 \cos \omega t \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\omega} \dot{x}(t) = -x_0 \sin \omega t + \frac{\dot{x}_0}{\omega} \cos \omega t$$

$$\Rightarrow (x(t))^2 + \left(\frac{1}{\omega} \dot{x}(t) \right)^2 = \left(x_0 \cos \omega t + \frac{\dot{x}_0}{\omega} \sin \omega t \right)^2 + \left(-x_0 \sin \omega t + \frac{\dot{x}_0}{\omega} \cos \omega t \right)^2$$

$$= (x_0 \cos \omega t)^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega} \sin \omega t \right)^2 + 2 \frac{x_0 \dot{x}_0}{\omega} \cos \omega t \sin \omega t$$

$$+ (-x_0 \sin \omega t)^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega} \cos \omega t \right)^2 - 2 \frac{x_0 \dot{x}_0}{\omega} \cos \omega t \sin \omega t = (x_0)^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega} \right)^2$$

مثال



- برای سیستم جرم-فنر و با استفاده از روابط $x(t)$ و $\dot{x}(t)$ ،
- الف: نشان دهید تراژکتوری‌ها در فضای حالت به صورت بیضی‌هایی خواهند بود.
- ب: کران‌های موقعیت در حرکت جرم متناظر با کدام نقاط سیکل است؟
- ج: بیشترین سرعت جرم متناظر با کدام نقاط سیکل است؟
- د: تبادل انرژی‌های جنبشی-پتانسیل چگونه است؟

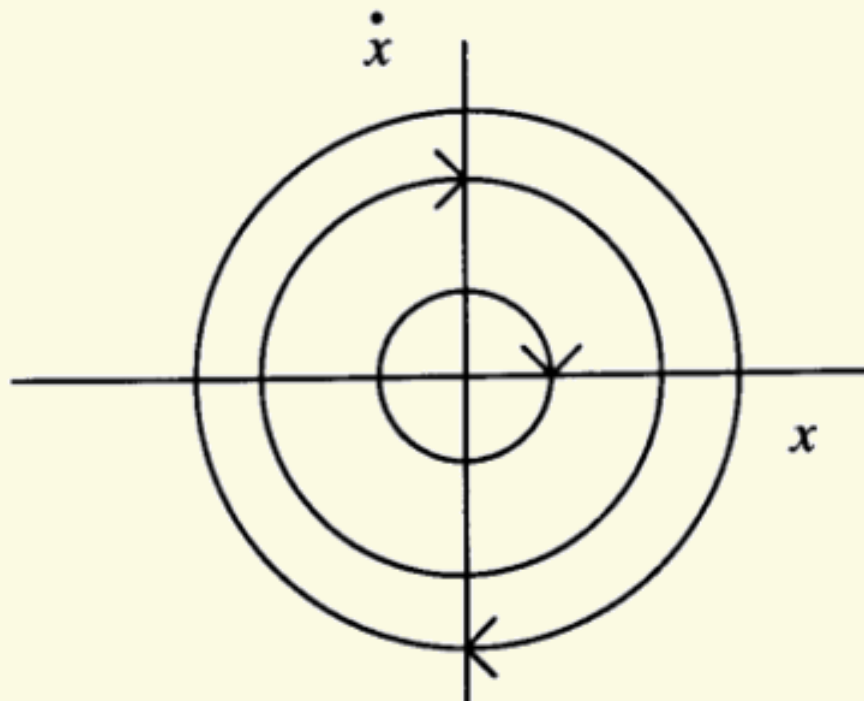


Fig. 3.1. Phase portrait for the mass on a spring. The ellipses are state space trajectories for the system. The larger the ellipse, the larger the total mechanical energy associated with the trajectory.

فهرست مطالب

☒ فضای حالت

☐ سیستم‌های توصیف‌شده با معادلات دیفرانسیل مرتبه اول 

☐ قضیه‌ی No-Intersection

☐ سیستم‌های باتلف و جاذب‌ها

☐ فضای حالت یک‌بعدی

☐ خطی‌سازی سری تیلور در نزدیکی نقاط ثابت

☐ تراژکتوری‌ها در فضای حالت یک‌بعدی

☐ بازنگری مفهوم اتلاف



توصیف سیستم با معادلات دیفرانسیل مرتبه اول

سیستمی با سه درجه آزادی در نظر بگیرید. به سه متغیر حالت جهت توصیف حالت سیستم نیاز است. فرض کنید دینامیک سیستم در قالب سه معادله دیفرانسیل مرتبه اول قابل توصیف باشد.

$$\dot{u} = f(u, v, w)$$

$$\dot{v} = g(u, v, w)$$

$$\dot{w} = h(u, v, w)$$

توابع f ، g و h به متغیرهای u ، v و w (ولی نه به مشتق زمانی آنها) و یک یا چند پارامتر کنترلی (که صراحتاً ذکر نشده) وابسته‌اند.

از آنجا که در حالت کلی، هر سه متغیر u ، v و w در توابع f ، g و h حضور دارند به آن **دستگاه معادلات دیفرانسیل کوپل شده** اطلاق می‌گردد.

سیستم‌های خودمختار و غیر خودمختار

در سیستم‌های توصیف شده با دستگاه معادله دیفرانسیل مرتبه اول، چنانچه زمان در توابع ظاهر نشده باشد سیستم را **خودمختار** (**autonomous**) و در غیر این صورت، سیستم را **غیر خودمختار** (**nonautonomous**) می‌نامیم.

مثال: سیستم خودمختار

$$\dot{u} = f(u, v, w)$$

$$\dot{v} = g(u, v, w)$$

$$\dot{w} = h(u, v, w)$$

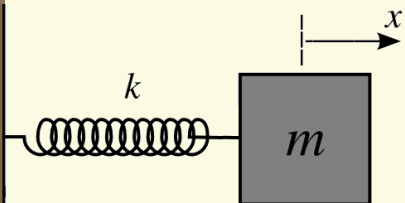
مثال: سیستم غیر خودمختار

$$\dot{u} = f(u, v, t)$$

$$\dot{v} = g(u, v, t)$$

مثال: توصیف سیستم جرم-فنر به فرم استاندارد

سیستم جرم-فنر با جرم نقطه‌ای و فنر ایده‌آل که پیش‌تر معادله دیفرانسیل حاکم بر آن تعیین گردید را به صورت دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبه اول بازنمایی کنید.



$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = \frac{-k}{m} x \end{cases}$$

تمرین: توصیف به فرم استاندارد

معادلات دیفرانسیل زیر را به فرم استاندارد (دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبه اول) تبدیل نمایید. در مورد خودمختار / غیر خودمختار بودن هر سیستم نظر دهید.

الف: $\frac{d^2x}{dt^2} = -kx + \gamma\dot{x}$

حل الف:
$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = -kx + \gamma v \end{cases} \quad \text{autonomous}$$

ب: $\frac{d^3x}{dt^3} = bx^2$

حل ب:
$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = w \\ \dot{w} = bx^2 \end{cases} \quad \text{autonomous}$$

ج: $\frac{d^2x}{dt^2} = kx + b \sin \omega t$

حل ج:
$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = kx + b \sin \omega t \end{cases} \quad \text{nonautonomous}$$

تبدیل دستگاه معادلات غیرخودمختار به خودمختار

برای این منظور، زمان را به عنوان متغیر حالت جدیدی تعریف نموده و بعد فضای حالت را یکی افزایش می‌دهیم.

$$\begin{cases} \dot{u} = f(u, v, t) \\ \dot{v} = g(u, v, t) \end{cases}$$

$$\dot{w} = \frac{dt}{dt} = 1 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dot{u} = f(u, v, w) \\ \dot{v} = g(u, v, w) \\ \dot{w} = 1 \end{cases}$$

با این تکنیک، امکان پرداختن به سیستم غیرخودمختار با روش‌های مربوط به سیستم‌های خودمختار فراهم می‌گردد. در مقابل این **فایده**، افزایش بعد فضای حالت، **هزینه**‌ای است که باید پرداخت گردد.



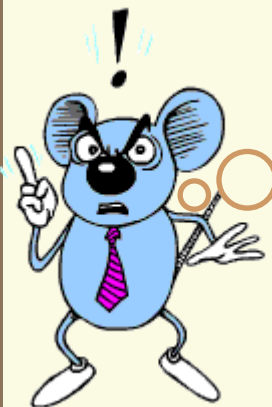
سوال:

علت استفاده از فرم استاندارد (دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبه اول) برای معادلات دینامیکی چیست؟

علت اصلی، فراهم شدن امکان تعیین سریع نقاط ثابت (**fixed points**) سیستم است.

یادآوری:

نقاط ثابت، نقاطی در فضای حالت است که مشتق زمانی تمام متغیرهای حالت در آنها برابر صفر است.



روش تعیین نقاط ثابت در توصیف به فرم استاندارد

$$\begin{cases} \dot{u} = f(u, v, w) \\ \dot{v} = g(u, v, w) \\ \dot{w} = h(u, v, w) \end{cases}$$

در نقاط ثابت، مشتق زمانی متغیرهای حالت برابر صفر است یعنی:

$$\dot{u} = \dot{v} = \dot{w} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(u, v, w) = 0 \\ g(u, v, w) = 0 \\ h(u, v, w) = 0 \end{cases}$$



سوال:

Question: What happens for a nonautonomous system? If we have used our “trick” to write the dynamical equations as suggested above, it should be clear that we can never have a fixed point because the derivative for the time variable is never zero. (The time variable never stops changing!) Thus, we will need special techniques to handle such systems. See Section 3.16.



سوال:

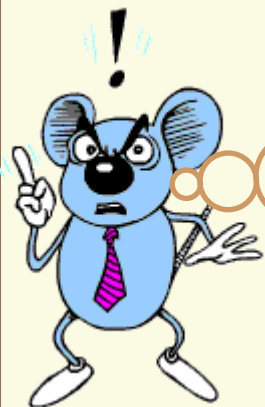
آیا می توان معادلات دینامیکی هر سیستمی را به فرم استاندارد (دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبه اول) بازنمایی کرد؟

بله! ولی ممکن است تعداد متغیرهای حالت سیستم بی نهایت شود. نظیر:

✓ سیستم های توصیف شده با معادلات دیفرانسیل جزئی (مشتق جزئی!)

✓ سیستم های توصیف شده با معادلات انتگرالی - مشتقی خاص

✓ سیستم های با معادلات تاخیر زمانی

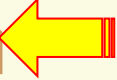


خوشبختانه! در این شرایط نیز معمولاً تنها چند مورد از بی نهایت درجه آزادی سیستم فعال (**active**) است. از این رو، می توان سیستم را با تعداد محدودی معادله **مدل** کرد. مانند آنچه برای مدل لورنز انجام شد.

فهرست مطالب

☒ فضای حالت

☒ سیستم‌های توصیف‌شده با معادلات دیفرانسیل مرتبه اول

☐ قضیه‌ی No-Intersection 

☐ سیستم‌های باتلف و جاذب‌ها

☐ فضای حالت یک‌بعدی

☐ خطی‌سازی سری تیلور در نزدیکی نقاط ثابت

☐ تراژکتوری‌ها در فضای حالت یک‌بعدی

☐ بازنگری مفهوم اتلاف



قضیه عدم تلاقی (No-Intersection theorem):

The No-Intersection Theorem: Two distinct state space trajectories cannot intersect (in a finite period of time). Nor can a single trajectory cross itself at a later time.

عبارت داخل پرانتز، حالت‌هایی که تراژکتوری‌های متمایز در $t \rightarrow \infty$ به نقطه‌ی یکسانی می‌روند را مستثنی می‌کند. از این رو، اصطلاحاً می‌گوییم تراژکتوری‌ها **به صورت مجانبی** به آن نقطه نزدیک می‌شوند.

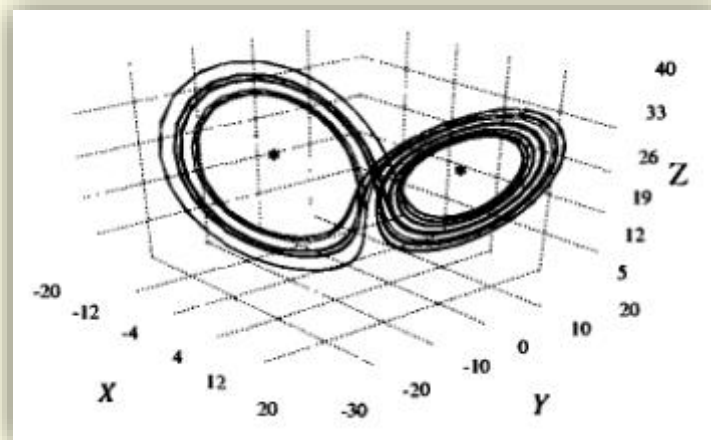
❖ تخطی ظاهری از قضیه‌ی عدم تلاقی:

چنانچه تراژکتوری به دلایلی نظیر عدم اطلاع از بُعد سیستم، به فضای حالت با بُعد پایین تر تصویر گردد ممکن است تراژکتوری بارها خودش را قطع کند. این در حالی است که در بُعد کامل، تراژکتوری با خود تلاقی پیدا نمی کند.

✓ مثال: سیستم لورنز با پارامترهای...

❖ Initial States: $X = 0, Y = -5, Z = 15$

❖ Rayleigh number: $r = 25$

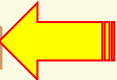


فهرست مطالب

☒ فضای حالت

☒ سیستم‌های توصیف‌شده با معادلات دیفرانسیل مرتبه اول

☒ قضیه‌ی No-Intersection

☐ سیستم‌های باتلف و جاذب‌ها 

☐ فضای حالت یک‌بعدی

☐ خطی‌سازی سری تیلور در نزدیکی نقاط ثابت

☐ تراژکتوری‌ها در فضای حالت یک‌بعدی

☐ بازنگری مفهوم اتلاف



سیستم‌های باتلف (Dissipative systems):

رفتار طولانی مدت سیستم‌های باتلف، **تقریباً** مستقل از نحوه‌ی آغاز به کار سیستم است. در سیستم‌های باتلف، با گذر زمان، تراژکتوری در فضای حالت به چند نقطه، منحنی، ناحیه یا موجودیت هندسی ختم می‌شود که **جاذب (attractor)** نامیده می‌شود.

معرفی اصطلاحات:

- **Attractor**
- **Basin of attraction**
- **Fractal basin boundaries**
- **Riddled basin of attraction**
- **Separatrix**

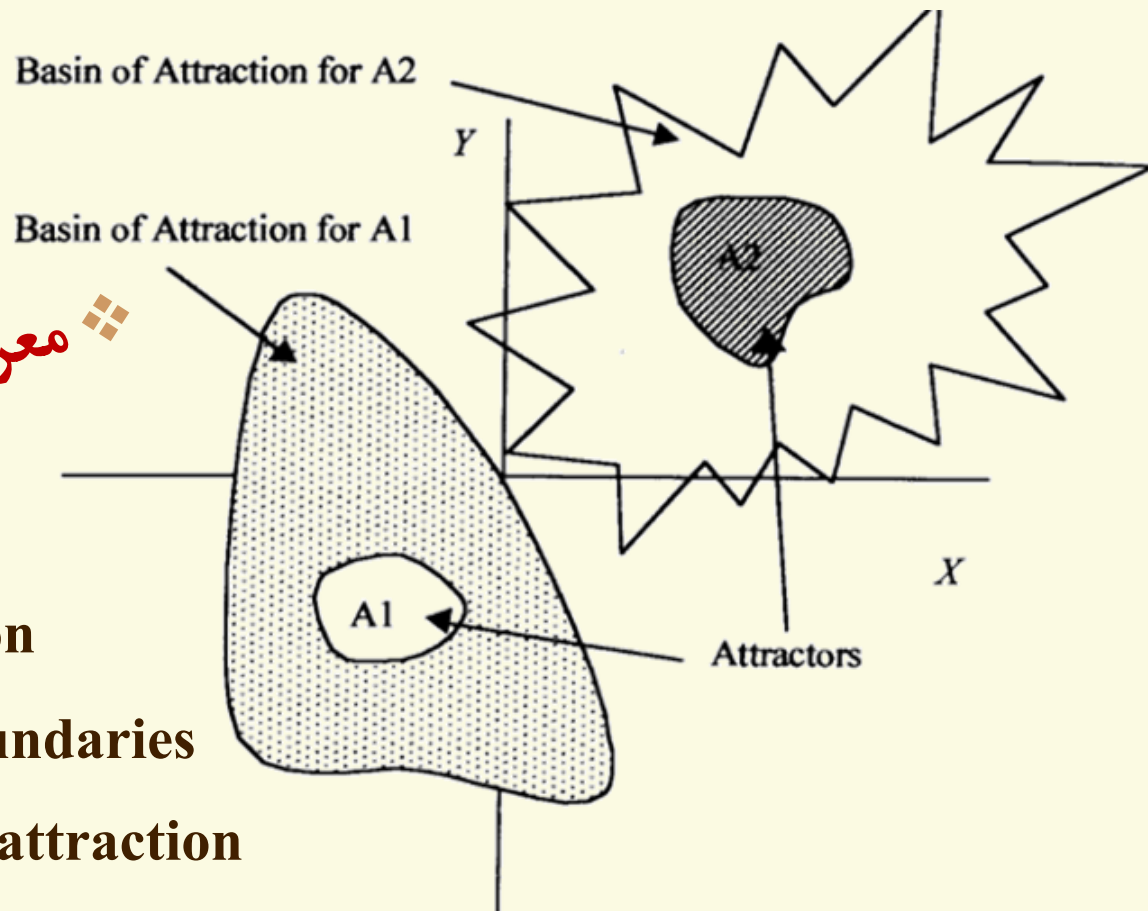


Fig. 3.2. A sketch of attractors A_1 and A_2 and basins of attraction in state space. Trajectories starting inside the dotted basin eventually end up in the attractor region inside the dotted region. Trajectories starting in the other basin head for the other attractor. For starting points outside these two basins, the trajectories may go toward a third attractor (not shown). The line bounding a basin of attraction forms a separatrix.

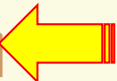
فهرست مطالب

☒ فضای حالت

☒ سیستم‌های توصیف‌شده با معادلات دیفرانسیل مرتبه اول

☒ قضیه‌ی No-Intersection

☒ سیستم‌های باتلف و جاذب‌ها

☐ فضای حالت یک‌بعدی 

☐ خطی‌سازی سری تیلور در نزدیکی نقاط ثابت

☐ تراژکتوری‌ها در فضای حالت یک‌بعدی

☐ بازنگری مفهوم اتلاف



فضای حالت یک بعدی:

معادله دینامیکی سیستم : $\dot{x} = f(x)$

تعیین نقاط ثابت : $\dot{x} = 0 \rightarrow \dots$

❖ نکاتی در رابطه با فضای حالت یک بعدی:

- فضای حالت یک بعدی، یک خط (محور x) است.
- نقاط ثابت، محور x (فضای حالت) را به تعدادی ناحیه بدون تعامل تقسیم می کند. به عبارت دیگر، اگر نقطه‌ی اولیه بین دو نقطه‌ی ثابت باشد تراژکتوری هرگز این ناحیه را ترک نخواهد کرد.

Noninteracting region

ناحیه بدون تعامل

واژه نامه:

انواع نقاط ثابت در فضای حالت یک بعدی:

➤ جاذب (sink یا node)

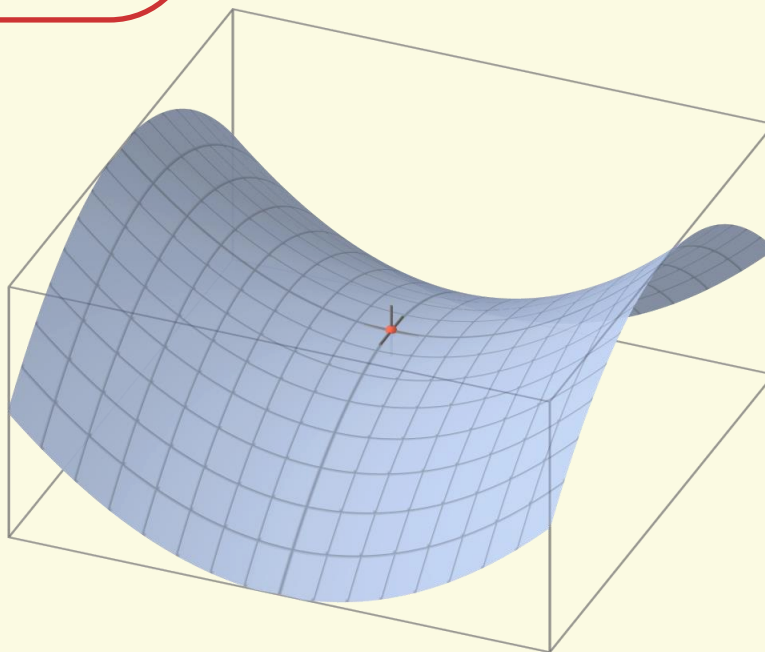
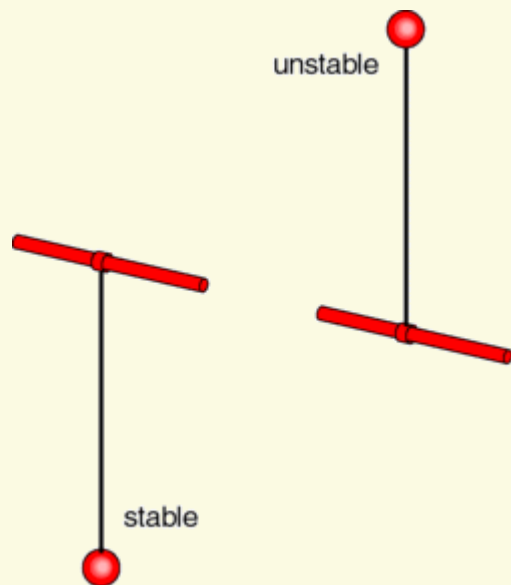
➤ دافع (repellor یا source)

➤ نقطه زینی (saddle point)

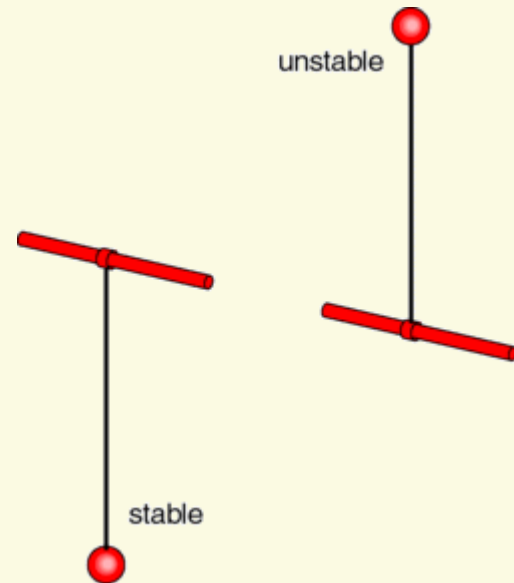
جاذب، نقطه‌ی ثابتی است که تراژکتوری‌های نزدیک را جذب می‌کند.

دافع، نقطه‌ی ثابتی است که تراژکتوری‌های نزدیک را دفع می‌کند.

نقطه زینی، نقطه‌ی ثابتی است که تراژکتوری‌های یک سو را جذب و تراژکتوری‌های سوی دیگر را دفع می‌کند.



Node را نقطه ثابت پایدار و repeller
را نقطه ثابت ناپایدار گویند.



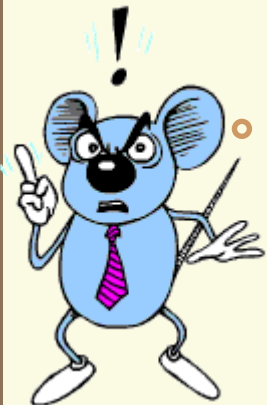
واژه نامه:

Stable fixed point

Unstable fixed point

نقطه ثابت پایدار

نقطه ثابت ناپایدار



روش تعیین نوع نقطه‌ی ثابت:

محاسبه‌ی شیب تابع $f(x)$ نسبت به x در نقطه‌ی ثابت (x_0) :

$$\lambda = \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_0}$$

λ مقدار مشخصه (characteristic value) یا مقدار ویژه (eigen value) نقطه ثابت نامیده می‌شود.

Table 3.1
Characteristic Values

$\lambda < 0$	fixed point is a node
$\lambda > 0$	fixed point is a repellor

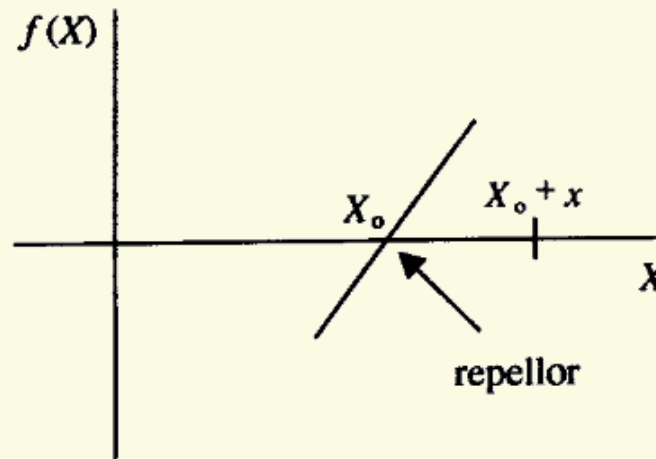
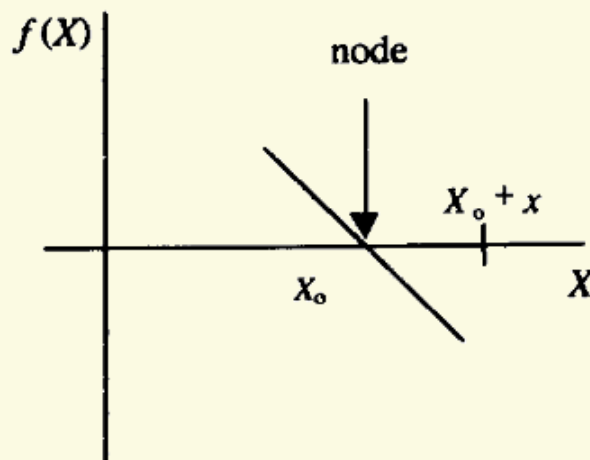


Fig. 3.3. On the left, $f(X)$ in the neighborhood of a node located at X_0 . On the right, $f(X)$ in the neighborhood of a repellor located at X_0 .

آیا می‌دانید پشتوانه‌ی این روش چیست؟



تحلیل شرایط $\lambda = 0$:

در این شرایط، مشتق دوم $f(x)$ نسبت به x را تعیین می‌کنیم،

اگر دارای مقدار مثبت در سمت چپ و مقدار منفی در سمت راست باشد **node** است.

اگر دارای مقدار منفی در سمت چپ و مقدار مثبت در سمت راست باشد **repeller** است.

اگر دارای مقدار مثبت در سمت چپ و مقدار مثبت در سمت راست باشد **type-1 saddle point** است.

اگر دارای مقدار منفی در سمت چپ و مقدار منفی در سمت راست باشد **type-2 saddle point** است.

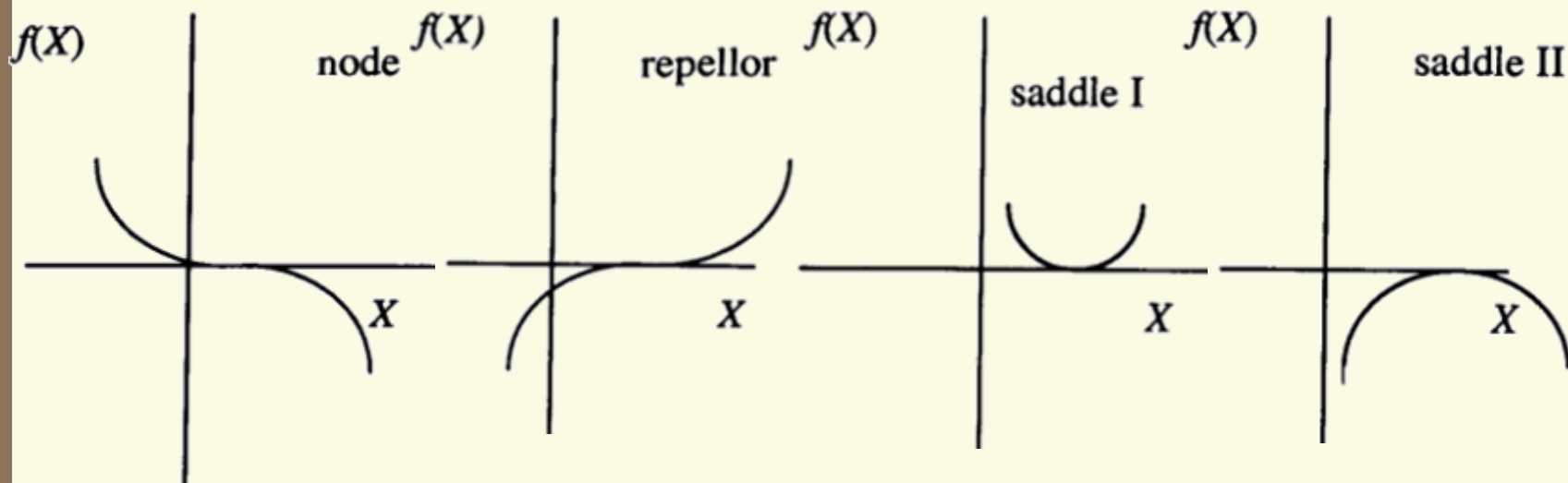


Fig. 3.4. Four possible types of fixed points in one-dimension with characteristic value $\lambda=0$. These fixed points are structurally unstable.

پایداری ساختاری نقاط ثابت

اگر اندکی تغییر در شکل یا موقعیت تابع (مثلا با تغییر پارامتر کنترلی)، ماهیت نقطه‌ی ثابت دچار تغییر نشود نقطه‌ی ثابت را **پایدار ساختاری (structurally stable)** گوییم.

در مقابل، چنانچه با اندکی تغییر، نقطه‌ی ثابت ناپدید گردد یا تغییر ماهیت دهد آن را **ناپایدار ساختاری (structurally unstable)** گوییم.

Structural stability

پایداری ساختاری

واژه‌نامه:

❖ مثال: پایداری ساختاری



نقاط ثابت شکل زیر پایدار ساختاری است یا ناپایدار ساختاری؟

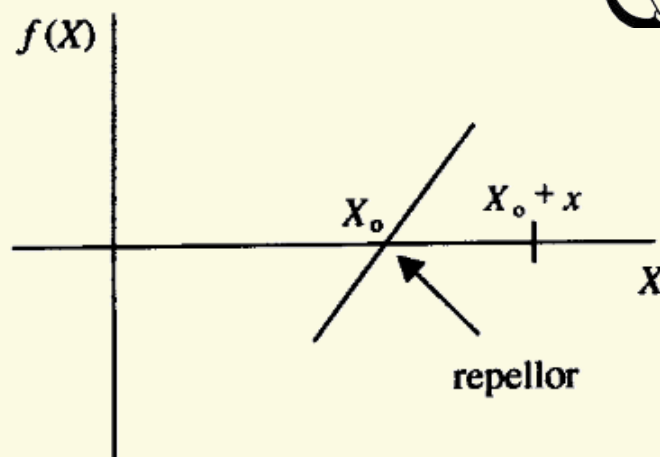
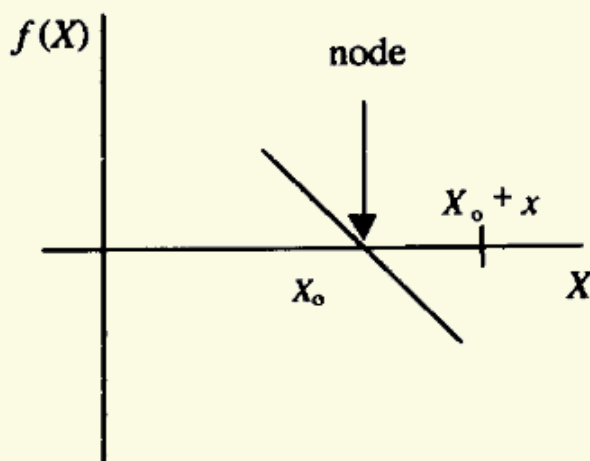


Fig. 3.3. On the left, $f(X)$ in the neighborhood of a node located at X_0 . On the right, $f(X)$ in the neighborhood of a repellor located at X_0 .

نقاط ثابت، **پایدار ساختاری (structurally stable)** است زیرا با اندکی تغییر در تابع نظیر بالا یا پایین بردن یا حتی با اندکی تغییر شکل آن، ماهیت نقطه‌ی ثابت بدون تغییر باقی می‌ماند.

❖ مثال: ناپایداری ساختاری



نقاط ثابت شکل زیر پایدار ساختاری است یا ناپایدار ساختاری؟ چرا؟

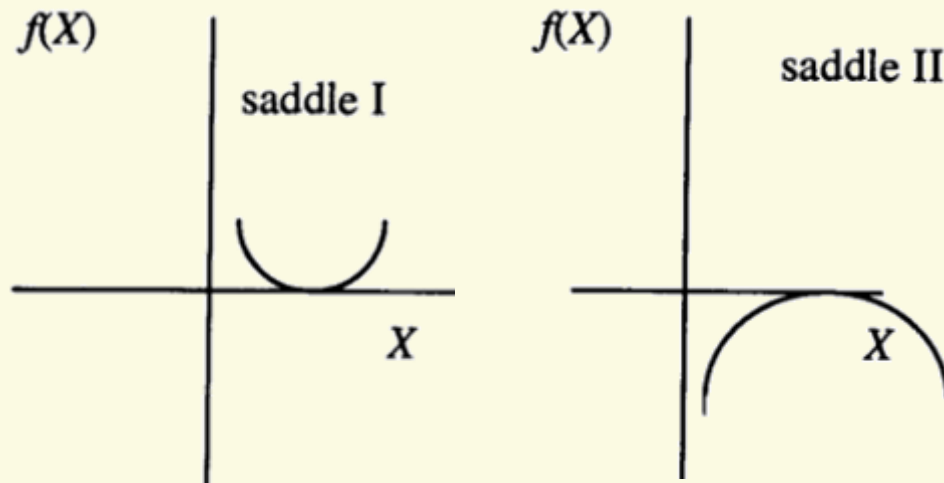


Fig. 3.4. Four possible types of fixed points in one-dimension with characteristic value $\lambda = 0$. These fixed points are structurally unstable.

نقاط ثابت، ناپایدار ساختاری (structurally unstable) است زیرا اندکی تغییر در تابع نظیر بالا یا پایین بردن موجب ناپدید شدن نقطه ثابت یا تبدیل آن به زوج جاذب-دافع می‌گردد.

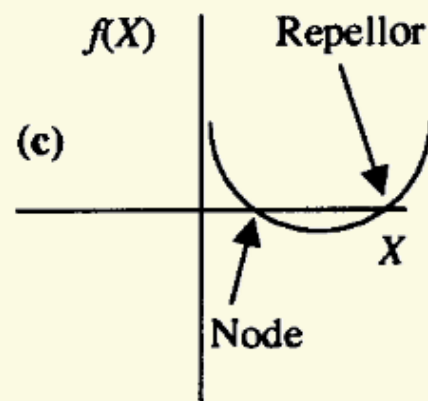
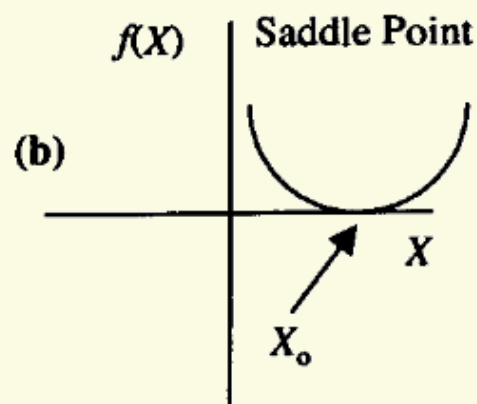
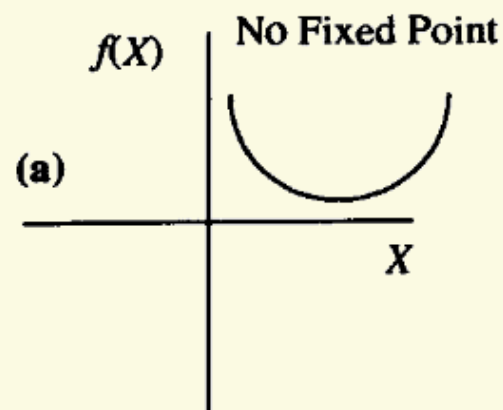
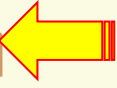


Fig. 3.5. In one-dimensional state spaces, a saddle point, the point X_0 in (b), is structurally unstable. A small change in the function $f(X)$, for example pushing it up or down along the vertical axis, either removes the fixed point (a), or changes it into a node and a repellor (c).

فهرست مطالب

- ☒ فضای حالت
- ☒ سیستم‌های توصیف‌شده با معادلات دیفرانسیل مرتبه اول
- ☒ قضیه‌ی No-Intersection
- ☒ سیستم‌های باتلف و جاذب‌ها
- ☒ فضای حالت یک‌بعدی
- ☐ خطی‌سازی سری تیلور در نزدیکی نقاط ثابت 
- ☐ تراژکتوری‌ها در فضای حالت یک‌بعدی
- ☐ بازنگری مفهوم اتلاف



خطی سازی سری تیلور در نزدیکی نقطه ثابت

بسط سری تیلور تابع $f(X)$ را در همسایگی نقطه ثابت (X_0) :

$$\dot{X} = f(X)$$

$$f(X) = f(X_0) + \frac{1}{1!}(X - X_0) \left. \frac{df}{dX} \right|_{X=X_0} + \frac{1}{2!}(X - X_0)^2 \left. \frac{d^2f}{dX^2} \right|_{X=X_0} + \dots$$

$$f(X_0) = 0$$

با توجه به این که X_0 نقطه ثابت سیستم دینامیکی است:

$$\Rightarrow \dot{X} = \frac{1}{1!}(X - X_0) \left. \frac{df}{dX} \right|_{X=X_0} + \frac{1}{2!}(X - X_0)^2 \left. \frac{d^2f}{dX^2} \right|_{X=X_0} + \dots$$

بخش‌های متمایز شده
مقادیر ثابتی هستند.

با تعریف متغیر x به عنوان فاصله تراژکتوری از نقطه‌ی ثابت داریم:

$$x = X - X_0 \quad \Rightarrow \quad \dot{x} = \dot{X} \quad \Rightarrow \quad \dot{x} = \frac{1}{1!}x \left. \frac{df}{dX} \right|_{X=X_0} + \frac{1}{2!}x^2 \left. \frac{d^2f}{dX^2} \right|_{X=X_0} + \dots$$

در نزدیکی نقطه‌ی ثابت، با تقریب می‌توان از جملات دوم و به بعد چشم‌پوشی کرد.

$$\Rightarrow \dot{x} \cong x \left. \frac{df}{dX} \right|_{X=X_0}$$

$$\lambda \equiv \left. \frac{df}{dX} \right|_{X=X_0}$$

مقدار مشخصه
یا مقدار ویژه

$$\Rightarrow \dot{x} \cong \lambda x$$

با حل این معادله دیفرانسیل داریم:

$$x(t) = x(0) e^{\lambda t}$$



سوال:

با در نظر داشتن تعریف x (فاصله از نقطه‌ی ثابت) و فرض نزدیک بودن به نقطه‌ی ثابت، رابطه‌ی به دست آمده برای $x(t)$ را تحلیل کنید!

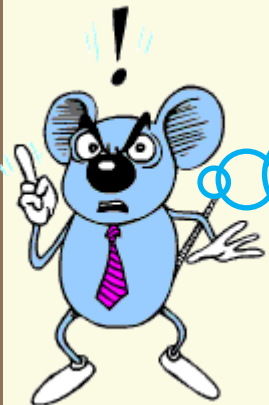
$$x(t) = x(0) e^{\lambda t}$$

✓ اگر $\lambda < 0$ باشد فاصله‌ی تراژکتوری از نقطه‌ی ثابت کاهش می‌یابد تا به صفر برسد.

به عبارت دیگر، تراژکتوری به نقطه‌ی ثابت می‌رود.

✓ اگر $\lambda > 0$ باشد فاصله‌ی تراژکتوری با نقطه‌ی ثابت افزایش می‌یابد. به عبارت دیگر،

تراژکتوری از نقطه‌ی ثابت دور می‌شود (دفع می‌شود).



لازم به تاکید است که این نتایج تنها در همسایگی نقطه‌ی ثابت که تقریب بسط تیلور با دو جمله‌ی نخست، توصیف قابل قبولی است معتبر می‌باشد.

$$\lambda \equiv \left. \frac{df}{dX} \right|_{X=X_0}$$

مقدار مشخصه
یا مقدار ویژه

λ به نام **نمای لیاپانوف** (*Lyapunov exponent*) نیز نامیده می شود.

Definition: The Lyapunov exponent for a region of one-dimensional state space near a fixed point is the characteristic value λ of that fixed point.

$$\lambda \equiv \left. \frac{df(X)}{dX} \right|_{X_0}$$

فهرست مطالب

☒ فضای حالت

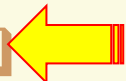
☒ سیستم‌های توصیف‌شده با معادلات دیفرانسیل مرتبه اول

☒ قضیه‌ی No-Intersection

☒ سیستم‌های باتلف و جاذب‌ها

☒ فضای حالت یک‌بعدی

☒ خطی‌سازی سری تیلور در نزدیکی نقاط ثابت

☐ تراژکتوری‌ها در فضای حالت یک‌بعدی 

☐ بازنگری مفهوم اتلاف



بررسی رفتار تراژکتوری‌ها:

رفتار سراسری (global) تراژکتوری‌ها

بر اساس

ارتباط بین موقعیت نقاط ثابت

رفتار محلی (local) تراژکتوری‌ها

در حوالی نقطه ثابت

بر اساس

مشتق زمانی تابع در نقطه ثابت

با فرض پیوستگی تابع،

❖ دو نقطه‌ی ثابت پشت سر هم نمی‌توانند هر دو node باشند.

❖ دو نقطه‌ی پشت سر هم نمی‌توانند هر دو repeller باشند.

❖ دو نقطه‌ی ثابت پشت سر هم نمی‌توانند saddle I و saddle II باشند.

مثال:

در فضای حالت یک بعدی، بین دو nodes (که با برچسب‌های X_0 و X_1 مشخص شده‌اند) باید یک repeller وجود داشته باشد.

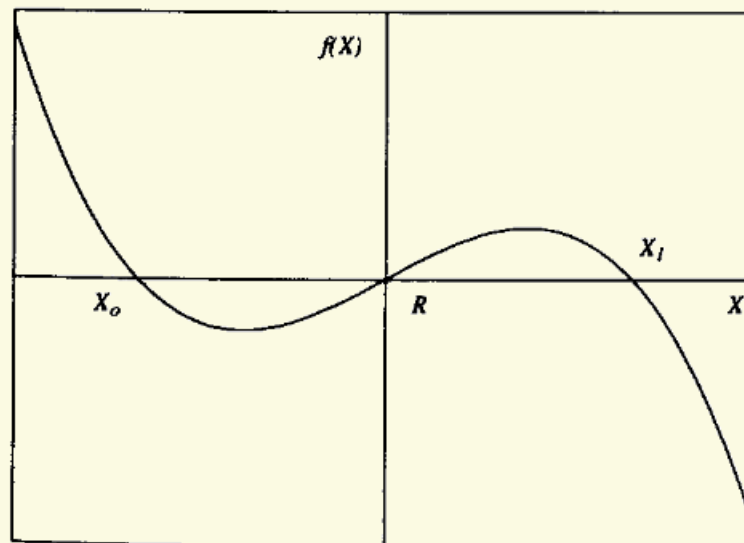


Fig. 3.6. In a one-dimensional state space, two nodes (here labeled X_0 and X_1) must have a repeller R located between them.

با فرض پیوستگی تابع و محدودیت کران دار (bounded) بودن تراژکتوری‌ها،

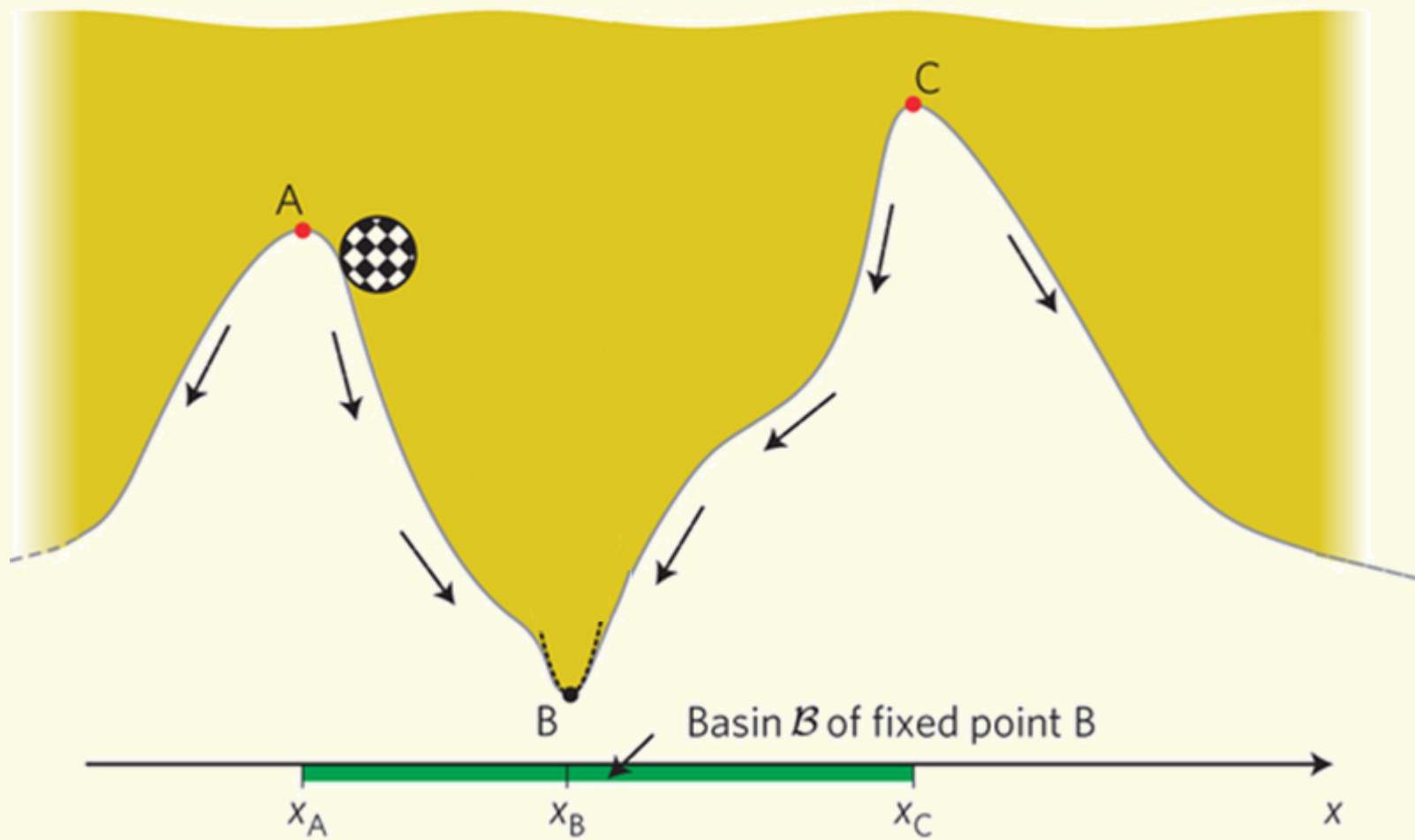
❖ بیرونی‌ترین نقاط ثابت روی محور x باید node باشد یا saddle I در سمت چپ و saddle II در سمت راست.

❖ اگر سیستم دارای saddle است بایستی سمت دافع آن یک node هم باشد.

تعیین رفتار تراژکتوری‌ها با دانستن نقاط ثابت:

جهت تراژکتوری‌ها از repeller یا سمت دافع saddle به سمت node یا سمت جاذب saddle رسم می‌گردد.

Exercise 3.8-2. Is it possible to have trajectories that represent oscillatory (repetitive) motion for a system with a one-dimensional state space?



Exercise 3.8-3. The logistic differential equation. The following differential equation has a “force” term that is identical to the logistic map function introduced in Chapter 1

$$\dot{X} = AX(1 - X)$$

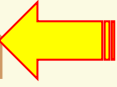
- (a) Find the fixed points for this differential equation.
- (b) Determine the characteristic value and type of each of the fixed points.

Exercise 3.8-4. (a) Show that the solution of the differential equation given in Ex. 3.8-3 is

$$X(t) = \frac{X_0}{X_0 - (X_0 - 1)e^{-At}}$$

where X_0 is the initial ($t = 0$) value of X . (b) Sketch the solution $X(t)$ as a function of time for several values of X_0 and relate the behavior of the solutions to the nature of the fixed points. (c) Why are the solutions to the logistic differential equation relatively simple while the behavior of the trajectories for the logistic map equation in Chapter 1 are very complicated?

فهرست مطالب

- ☒ فضای حالت
- ☒ سیستم‌های توصیف‌شده با معادلات دیفرانسیل مرتبه اول
- ☒ قضیه‌ی No-Intersection
- ☒ سیستم‌های باتلف و جاذب‌ها
- ☒ فضای حالت یک‌بعدی
- ☒ خطی‌سازی سری تیلور در نزدیکی نقاط ثابت
- ☒ تراژکتوری‌ها در فضای حالت یک‌بعدی
- ☐ بازنگری مفهوم اتلاف 



بازنگری مفهوم اتلاف

چگونه می توان با تلف یا بدون تلف بودن سیستمی که با معادلات دینامیکی توصیف شده است را تعیین نمود؟



اگر سیستم فیزیکی دارای **اصطکاک**، **ویسکوزیته** و ... باشد می توان در مورد با تلف بودن سیستم نظر داد ولی اینجا به دنبال **ابزاری ریاضی** هستیم که امکان ارزیابی با تلف / بی تلف بودن سیستم از **معادلات دینامیکی حاکم بر سیستم** را فراهم سازد.

دسته‌ای (**cluster**) از شرایط اولیه را در نظر بگیرید.
در فضای حالت یک بعدی، دسته‌ای از شرایط اولیه را می‌توان با یک پاره‌خط به نسبت کوچک نشان داد.

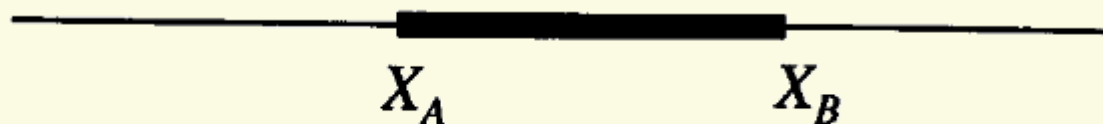


Fig. 3.7. A “cluster of initial conditions,” indicated by the heavy line, along the X axis.

می‌خواهیم ببینیم با گذر زمان و جابجایی نقاط تراژکتوری در فضای حالت، طول پاره‌خط $L = X_B - X_A$ چه تغییری می‌کند.

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt}(X_B - X_A) = \frac{d}{dt}X_B - \frac{d}{dt}X_A = \dot{X}_B - \dot{X}_A = f(X_B) - f(X_A)$$

مشخص است اگر $f(X_B) < f(X_A)$ باشد طول پاره خط با گذر زمان کاهش می یابد.

چنانچه طول پاره خط به اندازه‌ی کافی کوتاه باشد از بسط تیلور داریم:

$$f(X_B) = f(X_A) + \frac{1}{1!}(X_B - X_A) \left. \frac{df}{dX} \right|_{X_A} + \frac{1}{2!}(X_B - X_A)^2 \left. \frac{d^2f}{dX^2} \right|_{X_A} + \dots$$

$$\Rightarrow f(X_B) \cong f(X_A) + (X_B - X_A) \left. \frac{df}{dX} \right|_{X_A} \quad \Rightarrow f(X_B) - f(X_A) \cong L \left. \frac{df}{dX} \right|_{X_A}$$

با جایگزینی این رابطه در رابطه‌ی بالای اسلاید داریم:

$$\Rightarrow \frac{1}{L} \frac{dL}{dt} \cong \left. \frac{df}{dX} \right|_{X_A}$$

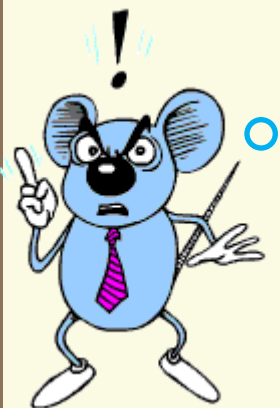
$$\frac{1}{L} \frac{dL}{dt} \cong \left. \frac{df}{dX} \right|_{X_A}$$

دقت کنید عبارت سمت راست مشابه تعریف مقدار ویژه (مقدار مشخصه یا نمای لیاپانوف) در نقطه ثابت است.

در $\frac{df}{dx}$ node منفی است و به واسطه پیوستگی، در همسایگی آن نیز منفی خواهد بود (نقاط ثابت با ناپایداری ساختاری را از بحث کنار بگذارید)؛ بنابراین در حوالی node ، طول پاره خط کاهش می یابد

تا اینجا بحث را متمرکز در حوالی نقطه‌ی ثابت مطرح کردیم.
در حالت کلی، مجموعه‌ای از شرایط اولیه ابتدا هنگام دور شدن از repeller گسترش می یابند و در ادامه، با نزدیک شدن به node فشرده می شوند.

آنچه در اینجا مطرح شد حالت ساده شده‌ای از **قضیه دیورژانس (divergence theorem)** است. قضیه دیورژانس در بخش فضای حالت دو بعدی مطرح خواهد شد.



فهرست مطالب

- ✓ فضای حالت
- ✓ سیستم‌های توصیف‌شده با معادلات دیفرانسیل مرتبه اول
- ✓ قضیه‌ی No-Intersection
- ✓ سیستم‌های باتلف و جاذب‌ها
- ✓ فضای حالت یک‌بعدی
- ✓ خطی‌سازی سری تیلور در نزدیکی نقاط ثابت
- ✓ تراژکتوری‌ها در فضای حالت یک‌بعدی
- ✓ بازنگری مفهوم اتلاف



ای پادشہ خوبان، داد از غم تنہائی
دل بی توبہ جان آمد، وقت است کہ باز آئی