

دینامیک غیر خطی و آشوب

و کاربردهای آن در مهندسی پزشکی



مبحث سوم - بخش دوم

دینامیک در فضای حالت دوبعدی

فهرست مطالب

- ← فضای حالت دو بعدی – حالت خاص
- فضای حالت دو بعدی – حالت عام
- مقادیر مشخصه مختلط
- تلف و قضیه‌ی دیورژانس
- ماتریس ژاکوبین برای مقادیر مشخصه
- سیکل حدی (limit cycle)
- قطع پوانکاره و پایداری سیکل حدی
- قضیه‌ی دوشاخه شدن
- (bifurcation theorem)



فضای حالت دوبعدی

$$\begin{cases} \dot{X}_1 = f_1(X_1, X_2) \\ \dot{X}_2 = f_2(X_1, X_2) \end{cases}$$

نقاط ثابت :

$$\begin{cases} f_1(X_1, X_2) = 0 \\ f_2(X_1, X_2) = 0 \end{cases}$$

مشابه فضای حالت یک بعدی، انتظار داریم ماهیت نقطه‌ی ثابت و رفتار تراژکتوری‌ها در همسایگی نقاط ثابت با مشتق f_1 و f_2 در نقاط ثابت قابل تعیین باشد.

→ $\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial X_1} & \frac{\partial f_1}{\partial X_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial X_1} & \frac{\partial f_2}{\partial X_2} \end{bmatrix}$

ولی چگونه؟!

فضای حالت دو بعدی - حالت خاص

در حالت خاص، فرض کنید (فقط در مجاورت نقطه ثابت):

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f_1}{\partial X_1} = \lambda_1 \quad , \quad \frac{\partial f_1}{\partial X_2} = 0 \\ \frac{\partial f_2}{\partial X_1} = 0 \quad , \quad \frac{\partial f_2}{\partial X_2} = \lambda_2 \end{array} \right.$$

در این شرایط، محوره‌های X_1 و X_2 جهت‌های مشخصه (characteristic directions) با مقادیر مشخصه متناظر λ_1 و λ_2 می‌باشند.

اگر λ_1 و λ_2 مقادیر حقیقی غیر صفر باشند.

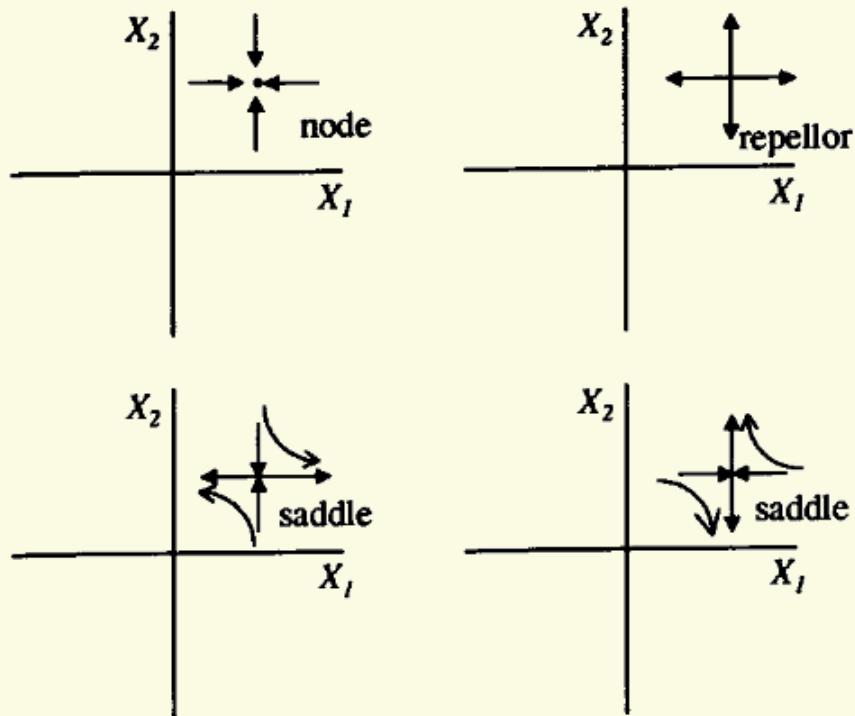


Fig. 3.8. Sample trajectories near each of the four types of fixed points with real characteristic values in two dimensions.

Table 3.2.
Possible Fixed Point Characters
with Real Characteristic Values

λ_1	λ_2	Type of Fixed Point
< 0	< 0	attracting node
> 0	> 0	repellor
> 0	< 0	saddle point
< 0	> 0	saddle point

Types of Fixed Points in Two Dimensions

توصیف مفهومی «نقطه زینی» (saddle point)

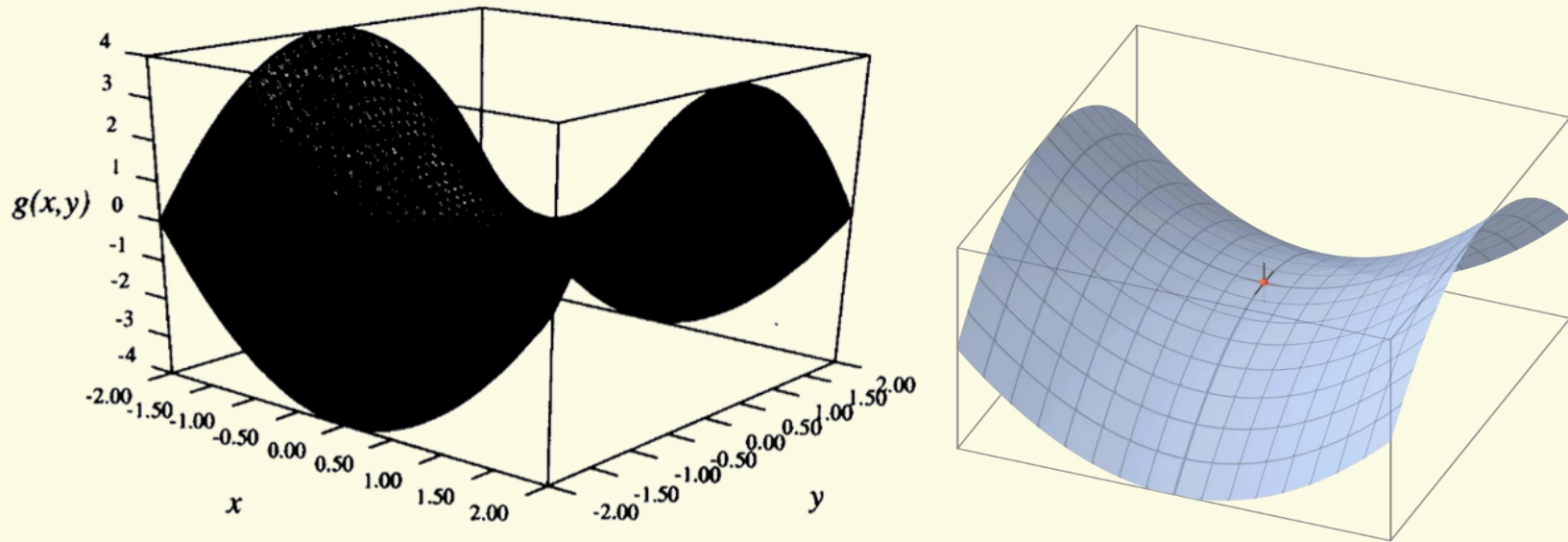


Fig. 3.9. A saddle-type surface for a two-dimensional state space. The saddle point is located at $(x,y) = (0,0)$.

$$f_1(x, y) = -\frac{\partial g(x, y)}{\partial x}$$

$$f_2(x, y) = -\frac{\partial g(x, y)}{\partial y}$$

معرفی چند اصطلاح:

❖ منیفردهای تغییرناپذیر یک نقطه‌ی زینی:

مجموعه‌ای از نقاط که تراژکتوری‌هایی را می‌سازند که مستقیماً به سمت نقطه‌ی زینی می‌روند یا مستقیماً از آن دور می‌شوند.

❖ منیفرلد پایدار:

مجموعه‌ای از نقاط که تراژکتوری‌هایی را می‌سازند که مستقیماً به سمت نقطه‌ی زینی می‌روند.

❖ منیفرلد ناپایدار:

مجموعه‌ای از نقاط که تراژکتوری‌هایی را می‌سازند که مستقیماً از نقطه‌ی زینی دور می‌شوند.

invariant manifold

stable manifold

Unstable manifold

منیفرلد تغییرناپذیر

منیفرلد پایدار

منیفرلد ناپایدار

واژه‌نامه:

اهمیت نقطه زینی و in-set و out-set های آن!

در فضای حالت دو بعدی، سیستمی با یک نقطه‌ی ثابت از نوع **نقطه زینی** با مقادیر مشخصه **غیر صفر** در نظر بگیرید؛

❖ in-set و out-set های نقطه زینی فضای حالت را به چهار ربع (quadrant) تقسیم می‌کنند.

❖ تراژکتوری‌های غیر in-set و out-set ها، بخشی از یک هذلولی هستند و در یک ربع محدود می‌شوند.

❖ از این رو، این نوع نقطه زینی، نقطه هذلولی (hyperbolic point) نامیده می‌شود.

❖ In-set و out-set ها بخشی از separatrix فضای حالت را تشکیل می‌دهد.

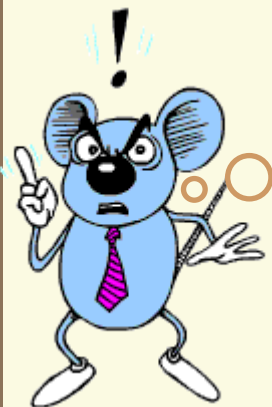
در حقیقت اصطلاح هذلولی (hyperbolic) به تمام نقاط ثابتی که مقادیر مشخصه غیر صفر دارند (یا به عبارت دقیق‌تر، بخش حقیقی مقادیر مشخصه آنها غیر صفر است) اطلاق می‌گردد.



سوال:

نقطه زینی یک بعدی که در بخش قبل بحث شد نقطه هذلولی (hyperbolic) است
یا غیر هذلولی (nonhyperbolic)؟

غیر هذلولی (nonhyperbolic)



فهرست مطالب

☒ فضای حالت دو بعدی – حالت خاص

☐ فضای حالت دو بعدی – حالت عام 

☐ مقادیر مشخصه مختلط

☐ تلف و قضیه‌ی دیورژانس

☐ ماتریس ژاکوبین برای مقادیر مشخصه

☐ سیکل حدی (limit cycle)

☐ قطع پوانکاره و پایداری سیکل حدی

☐ قضیه‌ی دوشاخه شدن

(bifurcation theorem)



فضای حالت دو بعدی - حالت عام

در حالت عام، چنانچه هر چهار مشتق جزئی غیر صفر باشند:

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{\partial f_1}{\partial X_1} \neq 0 \quad , \quad \frac{\partial f_1}{\partial X_2} \neq 0 \\ \frac{\partial f_2}{\partial X_1} \neq 0 \quad , \quad \frac{\partial f_2}{\partial X_2} \neq 0 \end{array} \right.$$

باز هم دو مقدار مشخصه متناظر با نقطه‌ی ثابت وجود دارد هر چند در حالت کلی، جهت‌های مشخصه متناظر آنها دیگر X_1 و X_2 نیست!

با نوشتن بسط سری تیلور برای معادلات مرتبه اول حول نقطه ثابت (X_{10}, X_{20}) داریم:

$$\begin{cases} \dot{X}_1 = f_1(X_1, X_2) = (X_1 - X_{10}) \left. \frac{df_1}{dX_1} \right|_{(X_{10}, X_{20})} + (X_2 - X_{20}) \left. \frac{df_1}{dX_2} \right|_{(X_{10}, X_{20})} + \dots \\ \dot{X}_2 = f_2(X_1, X_2) = (X_1 - X_{10}) \left. \frac{df_2}{dX_1} \right|_{(X_{10}, X_{20})} + (X_2 - X_{20}) \left. \frac{df_2}{dX_2} \right|_{(X_{10}, X_{20})} + \dots \end{cases}$$

توجه کنید که بخش‌های متمایز شده، مقادیر ثابتی هستند و با نامگذاری قراردادی آنها داریم:

$$f_{ij} = \left. \frac{df_i}{dX_j} \right|_{(X_{10}, X_{20})} \Rightarrow \begin{cases} \dot{X}_1 = (X_1 - X_{10}) f_{11} + (X_2 - X_{20}) f_{12} + \dots \\ \dot{X}_2 = (X_1 - X_{10}) f_{21} + (X_2 - X_{20}) f_{22} + \dots \end{cases}$$

با تعریف متغیرهای جدید به صورت انحراف از نقاط ثابت و تقریب با دو جمله‌ی نخست، داریم:

$$\begin{aligned} x_1 = X_1 - X_{10} &\Rightarrow \dot{x}_1 = \dot{X}_1 \\ x_2 = X_2 - X_{20} &\Rightarrow \dot{x}_2 = \dot{X}_2 \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = f_{11}x_1 + f_{12}x_2 + \dots \\ \dot{x}_2 = f_{21}x_1 + f_{22}x_2 + \dots \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 \cong f_{11}x_1 + f_{12}x_2 \\ \dot{x}_2 \cong f_{21}x_1 + f_{22}x_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 \cong f_{11}x_1 + f_{12}x_2 \\ \dot{x}_2 \cong f_{21}x_1 + f_{22}x_2 \end{cases}$$

$$\dot{x}_1 = f_{11}x_1 + f_{12}x_2 \quad \Rightarrow \quad \ddot{x}_1 = f_{11}\dot{x}_1 + f_{12}\dot{x}_2$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{x}_1 = f_{11}\dot{x}_1 + f_{12}(f_{21}x_1 + f_{22}x_2)$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{x}_1 = f_{11}\dot{x}_1 + f_{12}f_{21}x_1 + f_{22}f_{12}x_2$$

برای حذف x_2 از این رابطه، از معادله‌ی اول دستگاه معادلات داریم:

$$f_{12}x_2 = \dot{x}_1 - f_{11}x_1 \quad \Rightarrow \quad \ddot{x}_1 = f_{11}\dot{x}_1 + f_{12}f_{21}x_1 + f_{22}(\dot{x}_1 - f_{11}x_1)$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{x}_1 - (f_{11} + f_{22})\dot{x}_1 + (f_{11}f_{22} - f_{12}f_{21})x_1 = 0$$

برای تعیین پاسخ عمومی معادله دیفرانسیل، معادله مشخصه‌ی آن را می‌نویسیم:

$$\Rightarrow \quad \lambda^2 - (f_{11} + f_{22})\lambda + (f_{11}f_{22} - f_{12}f_{21}) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_{\pm} = \frac{(f_{11} + f_{22}) \pm \sqrt{(f_{11} + f_{22})^2 - 4(f_{11}f_{22} - f_{12}f_{21})}}{2}$$

اگر عبارت زیر رادیکال مثبت باشد مقادیر مشخصه‌ی λ_+ و λ_- حقیقی خواهند بود و در غیر این صورت، مقادیری مختلط خواهند بود.

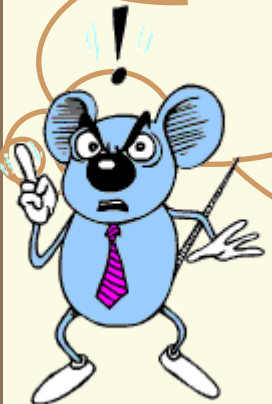
در نتیجه پاسخ عمومی معادله دیفرانسیل عبارت است از:

general solution : $x_1(t) = Ce^{\lambda_1 t} + De^{\lambda_2 t}$

C و D مقادیر ثابتی است که به کمک شرایط اولیه $x_1(0)$ و $x_2(0)$ قابل تعیین است.

توجه کنید که در انتخاب متغیرهای فضای حالت، آزادی عمل وجود دارد. علاوه بر x_1 و x_2 ، می توان جفت متغیرهای دیگر نظیر $\dot{x}_1$ و x_1 را نیز انتخاب کرد زیرا طبق معادلات حاکم، با داشتن آن دو می توان x_2 را به دست آورد.

انتخاب متغیرهای فضای حالت تاثیری بر رفتار هندسی تراژکتوری ها نخواهد داشت.





تمرین:

نشان دهید اگر $f_{12} = f_{21} = 0$ باشد مقادیر مشخصه (λ_+ و λ_-) به مقادیر حالت خاص یعنی $\lambda_1 = f_{11}$ و $\lambda_2 = f_{22}$ ساده می شود.

$$\lambda_{\pm} = \frac{(f_{11} + f_{22}) \pm \sqrt{(f_{11} + f_{22})^2 - 4(f_{11}f_{22} - f_{12}f_{21})}}{2}$$

$$\text{if } f_{12} = f_{21} = 0 \Rightarrow \lambda_{\pm} = \frac{(f_{11} + f_{22}) \pm \sqrt{(f_{11} + f_{22})^2 - 4f_{11}f_{22}}}{2}$$

$$\Rightarrow \lambda_{\pm} = \frac{(f_{11} + f_{22}) \pm \sqrt{(f_{11})^2 + (f_{22})^2 - 2f_{11}f_{22}}}{2}$$

$$\Rightarrow \lambda_{\pm} = \frac{(f_{11} + f_{22}) \pm \sqrt{(f_{11} - f_{22})^2}}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_+ = \frac{(f_{11} + f_{22}) + (f_{11} - f_{22})}{2} = f_{11} \\ \lambda_- = \frac{(f_{11} + f_{22}) - (f_{11} - f_{22})}{2} = f_{22} \end{cases}$$

Exercise 3.11-1. Show that Eq. (3.11-12) reduces to Eq. (3.10-4) in the special case $f_{12} = 0$ and $f_{21} = 0$.



تمرین:

Exercise 3.11-2. Start with Eq. (3.11-13) and find C and D in terms of the initial conditions $x_1(0)$ and $x_2(0)$. Hint: differentiate Eq. (3.11-13) and use Eq. (3.11-9) to get a second condition on C and D . This exercise requires a modest amount of algebra, and the final results are not particularly pretty.

general solution : $x_1(t) = Ce^{\lambda_+ t} + De^{\lambda_- t} \Rightarrow x_1(0) = C + D$

$$\left. \begin{aligned} \Rightarrow \dot{x}_1(t) &= C\lambda_+ e^{\lambda_+ t} + D\lambda_- e^{\lambda_- t} \\ \dot{x}_1(t) &= f_{11}x_1(t) + f_{12}x_2(t) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \Rightarrow f_{11}x_1(t) + f_{12}x_2(t) &= C\lambda_+ e^{\lambda_+ t} + D\lambda_- e^{\lambda_- t} \\ \Rightarrow f_{11}x_1(0) + f_{12}x_2(0) &= C\lambda_+ + D\lambda_- \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f_{11}x_1(0) + f_{12}x_2(0) = C\lambda_+ + (x_1(0) - C)\lambda_-$$

$$\Rightarrow f_{11}x_1(0) + f_{12}x_2(0) - \lambda_- x_1(0) = C(\lambda_+ - \lambda_-)$$

$$\Rightarrow C = \{f_{11}x_1(0) + f_{12}x_2(0) - \lambda_- x_1(0)\} / (\lambda_+ - \lambda_-)$$

$$D = x_1(0) - C$$

$$\Rightarrow D = x_1(0) - \{f_{11}x_1(0) + f_{12}x_2(0) - \lambda_- x_1(0)\} / (\lambda_+ - \lambda_-)$$



تمرین:

Exercise 3.11-3. Show that x_2 satisfies a differential equation that is exactly the same as Eq. (3.11-9). Combine these results to specify the complete dynamics of the system represented by Eq. (3.11-6).

$$\begin{cases} \dot{x}_1 \cong f_{11}x_1 + f_{12}x_2 \\ \dot{x}_2 \cong f_{21}x_1 + f_{22}x_2 \end{cases}$$

$$\dot{x}_2 = f_{21}x_1 + f_{22}x_2 \quad \Rightarrow \quad \ddot{x}_2 = f_{21}\dot{x}_1 + f_{22}\dot{x}_2$$

$$\Rightarrow \ddot{x}_2 = f_{21}(f_{11}x_1 + f_{12}x_2) + f_{22}\dot{x}_2$$

$$\Rightarrow \ddot{x}_2 = f_{11}f_{21}x_1 + f_{21}f_{12}x_2 + f_{22}\dot{x}_2$$

برای حذف x_1 از این رابطه، از معادله‌ی اول دستگاه معادلات داریم:

$$f_{21}x_1 = \dot{x}_2 - f_{22}x_2 \quad \Rightarrow \quad \ddot{x}_2 = f_{11}(\dot{x}_2 - f_{22}x_2) + f_{21}f_{12}x_2 + f_{22}\dot{x}_2$$

$$\Rightarrow \ddot{x}_2 - (f_{11} + f_{22})\dot{x}_2 + (f_{11}f_{22} - f_{12}f_{21})x_2 = 0$$

فهرست مطالب

☒ فضای حالت دو بعدی – حالت خاص

☒ فضای حالت دو بعدی – حالت عام

☐ مقادیر مشخصه مختلط 

☐ تلف و قضیه‌ی دیورژانس

☐ ماتریس ژاکوبین برای مقادیر مشخصه

☐ سیکل حدی (limit cycle)

☐ قطع پوانکاره و پایداری سیکل حدی

☐ قضیه‌ی دوشاخه شدن

(bifurcation theorem)



ارتباط مقادیر ویژه و رفتار نقطه‌ی ثابت:

$$\lambda_{\pm} = \frac{(f_{11} + f_{22}) \pm \sqrt{(f_{11} + f_{22})^2 - 4(f_{11}f_{22} - f_{12}f_{21})}}{2}$$

if λ : real & positive $\Rightarrow$ repeller

if λ : real & negative $\Rightarrow$ node

if λ : complex $\Rightarrow \lambda_{\pm} = R \pm j\Omega$, $\Omega \neq 0$

$$R = \frac{(f_{11} + f_{22})}{2}$$

$$\Omega = \frac{1}{2} \sqrt{|(f_{11} + f_{22})^2 - 4(f_{11}f_{22} - f_{12}f_{21})|}$$

دو مقدار مشخصه‌ی λ_+ و λ_- مزدوج مختلط یکدیگرند.

بررسی رفتار تراژکتوری:

$$x_1(t) = Ce^{\lambda_+ t} + De^{\lambda_- t}$$

$$\Rightarrow x_1(t) = Ce^{(R+j\Omega)t} + De^{(R-j\Omega)t}$$

$$\Rightarrow x_1(t) = e^{Rt} [Ce^{+j\Omega t} + De^{-j\Omega t}]$$

با فرض حالت خاص $x_1(0) = 0$ خواهیم داشت:

$$\Rightarrow C = -D$$

$$\Rightarrow x_1(t) = C e^{Rt} [e^{+j\Omega t} - e^{-j\Omega t}]$$

$$\Rightarrow x_1(t) = C e^{Rt} 2j \sin(\Omega t) \quad \Rightarrow \quad x_1(t) = 2jC e^{Rt} \sin(\Omega t)$$

❖ C مقدار ثابتی است که به $x_2(0)$ وابسته است.

❖ نتیجه گویای آن است که $x_1(t)$ با فرکانس زاویه‌ای Ω نوسان می‌کند و بسته به مثبت یا منفی بودن R، به ترتیب، دامنه‌ی نوسانات به صورت نمایی افزایش یا کاهش می‌یابد.

❖ $x_2(t)$ نیز رفتار مشابهی خواهد داشت.

$$x_1(t) = 2jC e^{Rt} \sin(\Omega t)$$

توصیف مفهومی «جاذب حلزونی» و «دافع حلزونی»

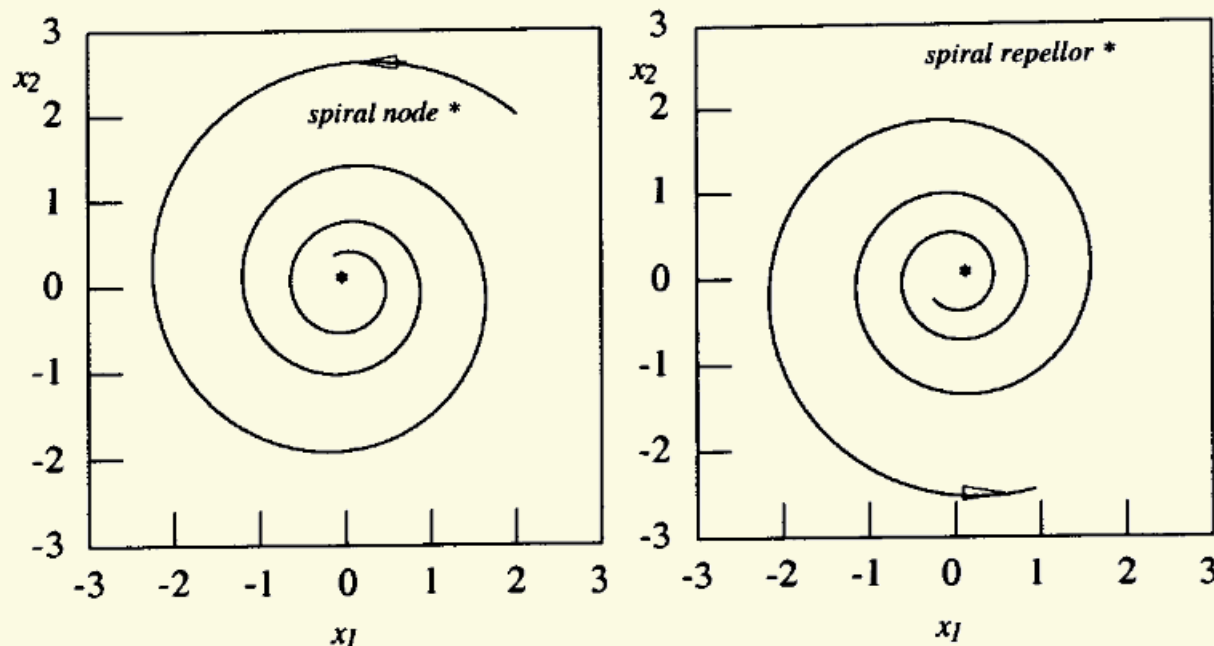


Fig. 3.10. A spiral node (left) and a spiral repellor (right) occur when the characteristic values of a fixed point are complex numbers.

در قسمت قبل، شرایط اولیه خاص $x_1(0) = 0$ در نظر گرفته شد. برای هر شرایط اولیه، رفتار فضای حالت به صورت «نوسانی با افزایش یا کاهش دامنه» خواهد بود.



تمرین:

Exercise 3.12-1. Show that the constant F in Eq. (3.12-5) is given by

$$F = f_{12}x_2(0)/\Omega$$

پیش تر دیدیم که برای λ_+ و λ_- مزدوج مختلط و شرط اولیه ی $x_1(0) = 0$ داریم:

$$x_1(t) = 2jC e^{Rt} \sin(\Omega t)$$

نشان دهید در این رابطه، $2jC = f_{12}x_2(0)/\Omega$.

$$\dot{x}_1(t) = f_{11}x_1(t) + f_{12}x_2(t) \Rightarrow \dot{x}_1(0) = f_{11}x_1(0) + f_{12}x_2(0)$$

$$x_1(0) = 0 \Rightarrow \dot{x}_1(0) = f_{12}x_2(0)$$

$$x_1(t) = 2jC e^{Rt} \sin(\Omega t) \Rightarrow \dot{x}_1(t) = 2jC R e^{Rt} \sin(\Omega t) + 2jC \Omega e^{Rt} \cos(\Omega t)$$

$$\Rightarrow \dot{x}_1(0) = 2jC \Omega$$

$$\Rightarrow 2jC \Omega = f_{12}x_2(0) \Rightarrow 2jC = f_{12}x_2(0)/\Omega$$



تمرین:

Exercise 3.12-2. For the reader with a bit more algebraic fortitude: Work out the most general solution of Eq. (3.12-3) in terms of $x_1(0)$ and $x_2(0)$ and show that the behavior is as described at the end of the previous paragraph.

برای فضای حالت دو بعدی، چنانچه مقادیر مشخصه مختلط باشد ($\lambda = R \pm j\Omega$)، پاسخ عمومی معادله $x_1(t) = Ce^{\lambda+t} + De^{\lambda-t}$ را بر حسب $x_1(0)$ و $x_2(0)$ به دست آورید و نشان دهید رفتار فضای حالت به صورت «نوسانی با افزایش یا کاهش دامنه» است.

ارتباط مقادیر ویژه و رفتار نقطه‌ی ثابت:

$$\lambda_{\pm} = \frac{(f_{11} + f_{22}) \pm \sqrt{(f_{11} + f_{22})^2 - 4(f_{11}f_{22} - f_{12}f_{21})}}{2}$$

if λ : real & positive $\Rightarrow$ repeller

if λ : real & negative $\Rightarrow$ node

if λ : complex $\Rightarrow \lambda_{\pm} = R \pm j\Omega$, $\Omega \neq 0$

$$R = \frac{(f_{11} + f_{22})}{2}$$

$$\Omega = \frac{1}{2} \sqrt{|(f_{11} + f_{22})^2 - 4(f_{11}f_{22} - f_{12}f_{21})|}$$

if $R < 0$ & $\Omega \neq 0$ $\Rightarrow$ Spiral node or focus

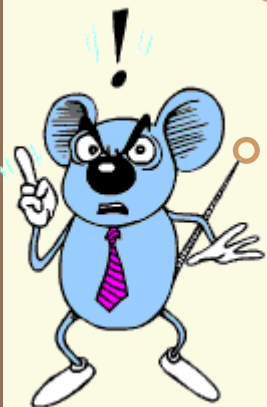
if $R > 0$ & $\Omega \neq 0$ $\Rightarrow$ Spiral repeller or unstable focus

if $R = 0$ & $\Omega \neq 0$ $\Rightarrow$ Cycle

❖ **Cycle** به تراژکتوری‌ای اطلاق می‌گردد که حلقه‌ی بسته‌ای حول نقطه‌ی ثابت ایجاد می‌کند.

❖ اگر تراژکتوری‌های نزدیک **Cycle** به آن جذب یا دفع شوند به آن **limit cycle** گوییم.

طبق قضیه‌ی عدم تلاقی (**No-Intersection** theorem)، تراژکتوری‌های **Cycle** و **Spiral** تنها در فضای حالت دو بعدی و بالاتر امکان پذیر است.



فهرست مطالب

☒ فضای حالت دو بعدی – حالت خاص

☒ فضای حالت دو بعدی – حالت عام

☒ مقادیر مشخصه مختلط

☐ تلف و قضیه‌ی دیورژانس 

☐ ماتریس ژاکوبین برای مقادیر مشخصه

☐ سیکل حدی (limit cycle)

☐ قطع پوانکاره و پایداری سیکل حدی

☐ قضیه‌ی دوشاخه شدن

(bifurcation theorem)



اتلاف (Dissipation)

مشابه فضای حالت یک بعدی، دسته‌ای از نقاط را در نظر می‌گیریم و نرخ تغییرات سطح را بررسی می‌کنیم:

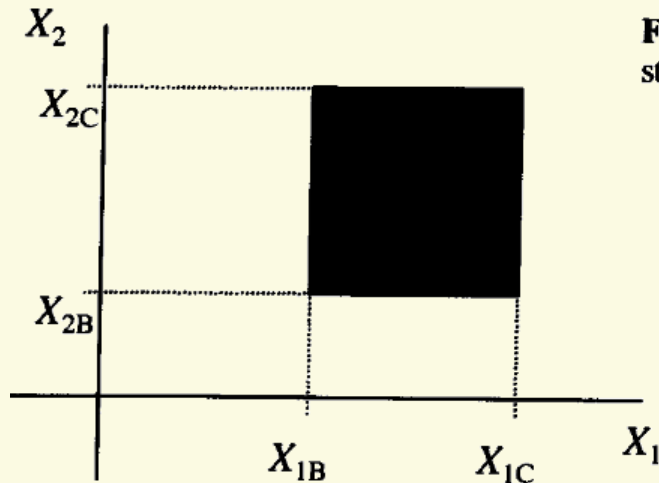


Fig. 3.11. A rectangle of initial conditions in state space of two variables X_1 and X_2 .

$$A = (X_{1C} - X_{1B})(X_{2C} - X_{2B}) \quad \Rightarrow \quad \frac{dA}{dt} = \frac{d}{dt}[(X_{1C} - X_{1B})(X_{2C} - X_{2B})]$$

$$\Rightarrow \frac{dA}{dt} = \left\{ \frac{d}{dt}(X_{1C}) - \frac{d}{dt}(X_{1B}) \right\} (X_{2C} - X_{2B}) + (X_{1C} - X_{1B}) \left\{ \frac{d}{dt}(X_{2C}) - \frac{d}{dt}(X_{2B}) \right\}$$

$$\Rightarrow \frac{dA}{dt} = \{f_1(X_{1C}, X_{2B}) - f_1(X_{1B}, X_{2B})\}(X_{2C} - X_{2B}) \\ + (X_{1C} - X_{1B})\{f_2(X_{1B}, X_{2C}) - f_2(X_{1B}, X_{2B})\}$$

$$\Rightarrow \frac{dA}{dt} = \{f_1(X_{1C}, X_{2B}) - f_1(X_{1B}, X_{2B})\}(X_{2C} - X_{2B}) \\ + (X_{1C} - X_{1B})\{f_2(X_{1B}, X_{2C}) - f_2(X_{1B}, X_{2B})\}$$

با بسط سری تیلور داریم:

$$f_1(X_{1C}, X_{2B}) = f_1(X_{1B}, X_{2B}) + \frac{1}{1!}(X_{1C} - X_{1B}) \left. \frac{\partial f_1}{\partial X_1} \right|_{(X_{1B}, X_{2B})} + \dots$$

$$f_2(X_{1B}, X_{2C}) = f_2(X_{1B}, X_{2B}) + \frac{1}{1!}(X_{2C} - X_{2B}) \left. \frac{\partial f_2}{\partial X_2} \right|_{(X_{1B}, X_{2B})} + \dots$$

با تقریب بسط سری تیلور با دو جمله نخست داریم:

$$\Rightarrow \frac{dA}{dt} = (X_{1C} - X_{1B}) \frac{\partial f_1}{\partial X_1} (X_{2C} - X_{2B}) + (X_{1C} - X_{1B})(X_{2C} - X_{2B}) \frac{\partial f_2}{\partial X_2}$$

$$\Rightarrow \frac{dA}{dt} = (X_{1C} - X_{1B})(X_{2C} - X_{2B}) \frac{\partial f_1}{\partial X_1} + (X_{1C} - X_{1B})(X_{2C} - X_{2B}) \frac{\partial f_2}{\partial X_2}$$

$$\Rightarrow \frac{dA}{dt} = A \frac{\partial f_1}{\partial X_1} + A \frac{\partial f_2}{\partial X_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{A} \frac{dA}{dt} = \frac{\partial f_1}{\partial X_1} + \frac{\partial f_2}{\partial X_2}$$

بنابراین منفی بودن عبارت سمت راست بیانگر کاهش سطح با زمان و باتلف بودن است.

قضیه دیورژانس (Divergence Theorem)

$$\frac{1}{A} \frac{dA}{dt} = \frac{\partial f_1}{\partial X_1} + \frac{\partial f_2}{\partial X_2}$$

با تعمیم موضوع به حالت n بعدی:



$$\frac{1}{V} \frac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial f_i}{\partial X_i} \equiv \text{div}(f)$$



مثال:

Exercise 3.13-1. Evaluate $\text{div}(f)$ for the Lorenz model equations introduced in Chapter 1 for parameter values $r = 0.5$, $p = 10$, and $b = 8/3$. Is the Lorenz system dissipative throughout its state space?

دیورژانس (divergence) را برای معادلات مدل لورنز به ازای پارامترهای $r = 0.5$ ، $p = 10$ و $b = 8/3$ محاسبه نمایید. آیا این سیستم در فضای حالت خود، باتلف (dissipative) است؟

$$\begin{cases} \dot{X} = p(Y - X) \\ \dot{Y} = -XZ + rX - Y \\ \dot{Z} = XY - bZ \end{cases}$$

یادآوری قضیه دیورژانس: $\frac{1}{V} \frac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial f_i}{\partial X_i} \equiv \text{div}(f)$

$$\Rightarrow \text{div}(f) \equiv \sum_{i=1}^3 \frac{\partial f_i}{\partial X_i} = \frac{\partial f_1}{\partial X} + \frac{\partial f_2}{\partial Y} + \frac{\partial f_3}{\partial Z}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f_1}{\partial X} = -p \quad \frac{\partial f_2}{\partial Y} = -1 \quad \frac{\partial f_3}{\partial Z} = -b$$

$$\Rightarrow \text{div}(f) \equiv -p - 1 - b \quad \Rightarrow \text{div}(f) \equiv -10 - 1 - 8/3 = -41/3$$

چرا در رابطه دیورژانس، r ظاهر نشده است؟



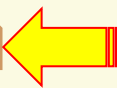
فهرست مطالب

☒ فضای حالت دو بعدی – حالت خاص

☒ فضای حالت دو بعدی – حالت عام

☒ مقادیر مشخصه مختلط

☒ تلف و قضیه‌ی دیورژانس

☐ ماتریس ژاکوبین برای مقادیر مشخصه 

☐ سیکل حدی (limit cycle)

☐ قطع پوانکاره و پایداری سیکل حدی

☐ قضیه‌ی دوشاخه شدن

(bifurcation theorem)



ماتریس ژاکوبین برای مقادیر مشخصه!

ماتریس ژاکوبین : $J = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix}$ $f_{ij} = \left. \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right|_{\text{fixed point}}$

معادله مشخصه : $|J - \lambda I| = 0$ $\Rightarrow \begin{vmatrix} f_{11} - \lambda & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow \lambda^2 - (f_{11} + f_{22})\lambda + (f_{11}f_{22} - f_{12}f_{21}) = 0$

Trace of Jacobian matrix : $TrJ = f_{11} + f_{22}$

Determinant of Jacobian matrix : $\Delta = f_{11}f_{22} - f_{12}f_{21}$

❖ بازنویسی مقادیر مشخصه با TrJ و Δ :

یادآوری مقادیر مشخصه: $\lambda_{\pm} = \frac{(f_{11} + f_{22}) \pm \sqrt{(f_{11} + f_{22})^2 - 4(f_{11}f_{22} - f_{12}f_{21})}}{2}$

یادآوری: $TrJ = f_{11} + f_{22}$
 $\Delta = f_{11}f_{22} - f_{12}f_{21} \Rightarrow \lambda_{\pm} = \frac{1}{2} (TrJ \pm \sqrt{TrJ^2 - 4\Delta})$

Table 3.3

Fixed Points for Two-dimensional State Space

	$TrJ < 0$	$TrJ > 0$
$\Delta > (1/4)(TrJ)^2$	spiral node	spiral repellor
$0 < \Delta < (1/4)(TrJ)^2$	node	repellor
$\Delta < 0$	saddle point	saddle point

جدول فوق را واری و تحلیل کنید.



چند نکته!

علامت (مثبت یا منفی بودن) **TrJ** نشانگر node یا repeller بودن

نقطه‌ی ثابت است. یادآوری می‌گردد:

$$\frac{1}{A} \frac{dA}{dt} = f_{11} + f_{22}$$

$$TrJ = f_{11} + f_{22}$$



با یافتن **مقادیر ویژه (eigen values)** و **بردارهای ویژه (eigen vectors)**

ماتریس ژاکوبین می‌توان این ماتریس را به ماتریسی قطری نگاشت که

مقادیر و جهت‌های متناظر با مقادیر مشخصه و جهت‌های in-set و

out-setهای نقطه‌ی زینی را به دست می‌دهد.

در واقع، مقادیر ویژه نشانگر مقادیر مشخصه‌ی نقطه‌ی ثابت و

بردارهای ویژه نشانگر جهت‌های مشخصه متناظر است.



❖ روند تحلیل نقطه‌ی ثابت در فضای حالت دو بعدی:

۱- نوشتن معادلات به صورت معادلات دیفرانسیل مرتبه اول:

$$\begin{cases} \dot{X}_1 = f_1(X_1, X_2) \\ \dot{X}_2 = f_2(X_1, X_2) \end{cases}$$

۲- یافتن نقاط ثابت:

$$\begin{cases} f_1(X_1, X_2) = 0 \\ f_2(X_1, X_2) = 0 \end{cases}$$

۳- محاسبه‌ی مشتق‌های جزئی توابع f_1 و f_2 در نقاط ثابت، و تشکیل ماتریس ژاکوبین:

$$J = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix}$$

۴- محاسبه‌ی رد (TrJ) و دترمینان (Δ) ماتریس ژاکوبین و تعیین نوع آن:

$$TrJ = f_{11} + f_{22}$$

$$\Delta = f_{11}f_{22} - f_{12}f_{21}$$

Fixed Points for Two-dimensional State Space		
	$TrJ < 0$	$TrJ > 0$
$\Delta > (1/4)(TrJ)^2$	spiral node	spiral repellor
$0 < \Delta < (1/4)(TrJ)^2$	node	repellor
$\Delta < 0$	saddle point	saddle point

۵- یافتن مقادیر عددی برای مقادیر مشخصه و تعیین رفتار تراژکتوری‌های فضای حالت در

نزدیکی نقاط ثابت: $x_1(t) = Ce^{\lambda_+ t} + De^{\lambda_- t}$

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2} \left(TrJ \pm \sqrt{TrJ^2 - 4\Delta} \right)$$



مثال:

مدل بروکسل (**Brusselator model**) برای توصیف دسته‌ی خاصی از واکنش‌های شیمیایی مطرح شده است. این مدل با معادلات زیر توصیف می‌گردد که در آن، A و B اعداد مثبتی هستند که نقش پارامترهای کنترلی را بر عهده دارند.

$$\begin{cases} \dot{X} = A - (B + 1)X + X^2Y \\ \dot{Y} = BX - X^2Y \end{cases}$$

متغیرهای X و Y نیز متناظر با غلظت محصولات میانی در واکنش شیمیایی می‌باشند.
الف: نقاط ثابت این معادلات را به دست آورید.

ب: ماتریس ژاکوبین و Tr و Δ آن را به دست آورید.

ج: مقادیر مشخصه را به دست آورید.

د: با فرض $A = 1$ و در نظر گرفتن B به عنوان پارامتر کنترلی، به تحلیل نقطه‌ی ثابت به ازای مقادیر مختلف پارامتر پردازید.

ه: با انجام شبیه‌سازی، نتایج به دست آمده در بند «د» را واریسی کنید.

از آنجا که مطرح کنندگان این مدل از شهر بروکسل بلژیک بودند
این مدل، **Brusselator model** نامیده می‌شود.

بیشتر بدانیم!

$$\begin{cases} \dot{X} = A - (B + 1)X + X^2Y \\ \dot{Y} = BX - X^2Y \end{cases}$$

حل الف:

برای تعیین نقطه‌ی ثابت:

$$\Rightarrow \begin{cases} A - (B + 1)X_0 + (X_0)^2Y_0 = 0 \\ BX_0 - (X_0)^2Y_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A - (B + 1)X_0 + BX_0 = 0 \\ X_0 = A \end{cases}$$

$$\Rightarrow Y_0 = \frac{B}{A}$$

بنابراین معادلات مدل Brusselator دارای نقطه‌ی ثابت $\begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ B/A \end{pmatrix}$ است.

حل ب:

$$f_{11} = \left. \frac{\partial f_1}{\partial X} \right|_{(A, B/A)} = -(B + 1) + 2XY \Big|_{(A, B/A)} = B - 1$$

$$f_{12} = \left. \frac{\partial f_1}{\partial Y} \right|_{(A, B/A)} = X^2 \Big|_{(A, B/A)} = A^2 \Rightarrow J = \begin{bmatrix} B - 1 & A^2 \\ -B & -A^2 \end{bmatrix}$$

$$f_{21} = \left. \frac{\partial f_2}{\partial X} \right|_{(A, B/A)} = B - 2XY \Big|_{(A, B/A)} = -B \Rightarrow \text{Tr} J = B - 1 - A^2$$

$$f_{22} = \left. \frac{\partial f_2}{\partial Y} \right|_{(A, B/A)} = -X^2 \Big|_{(A, B/A)} = -A^2 \Rightarrow \Delta = -A^2(B - 1) - A^2(-B)$$

$$\Rightarrow \Delta = A^2$$

حل ج:

$$\begin{cases} TrJ = B - 1 - A^2 \\ \Delta = A^2 \end{cases}$$

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2} \left(TrJ \pm \sqrt{TrJ^2 - 4\Delta} \right)$$

$$\Rightarrow \lambda_{\pm} = \frac{1}{2} \left[(B - 1 - A^2) \pm \sqrt{(B - 1 - A^2)^2 - 4A^2} \right]$$

حل د:

$$\text{for } A = 1, \Rightarrow \begin{cases} TrJ = B - 2 \\ \Delta = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lambda_{\pm} = \frac{1}{2} \left[(B - 2) \pm \sqrt{(B - 2)^2 - 4} \right]$$

اگر $0 < B < 2$ باشد نقطه‌ی ثابت از نوع **spiral node** است.

اگر $2 < B < 4$ باشد نقطه‌ی ثابت از نوع **spiral repellor** است.

اگر $B > 4$ باشد نقطه‌ی ثابت از نوع **repellor** است.

فهرست مطالب

☒ فضای حالت دو بعدی – حالت خاص

☒ فضای حالت دو بعدی – حالت عام

☒ مقادیر مشخصه مختلط

☒ تلف و قضیه‌ی دیورژانس

☒ ماتریس ژاکوبین برای مقادیر مشخصه

☐ سیکل حدی (limit cycle) 

☐ قطع پوانکاره و پایداری سیکل حدی

☐ قضیه‌ی دوشاخه شدن

(bifurcation theorem)



سیکل حدی (limit cycle)

یادآوری!

- ❖ **سیکل (cycle):** تراژکتوری‌های حلقه بسته در فضای حالت
- ❖ **سیکل حدی (limit cycle):** اگر سیکل ایزوله باشد به آن سیکل حدی گویند. ایزوله بودن به این معنا است که تراژکتوری‌های اطراف آن به سمت آن جذب یا از آن رانده می‌شوند.



در این بخش می‌خواهیم به دو سؤال بپردازیم:

- ☆ سیکل حدی در چه شرایطی رخ می‌دهد؟
- ☆ سیکل حدی چه زمانی پایدار و چه زمانی ناپایدار است؟

قضیه‌ی Poincare-Bendixson به سوال اول برای فضای حالت دو بعدی پاسخ می‌دهد!

قضیه Poincare-Bendixson

۱- فرض کنید حرکت طولانی مدت نقطه‌ای حالت در فضای حالت دو بعدی به ناحیه‌ی کران‌داری محدود گردد.

۲- فرض کنید این ناحیه (آن را R بنامید) به نحوی است که تراژکتوری‌هایی که از R آغاز می‌شوند در ناحیه‌ی R باقی می‌مانند. (R مجموعه‌ی تغییرناپذیر یا invariant set سیستم نامیده می‌شود).

۳- تراژکتوری خاصی را در نظر بگیرید که از نقطه‌ای درون R آغاز گردیده است. طبق قضیه‌ی Poincare-Bendixson تنها دو امکان برای این تراژکتوری وجود دارد:

الف: تراژکتوری به یک نقطه‌ی ثابت (fixed point) سیستم منتهی شود (وقتی $t \rightarrow \infty$).

ب: تراژکتوری به یک سیکل حدی (limit cycle) منتهی شود (وقتی $t \rightarrow \infty$).

It is important to note that the Poincaré–Bendixson Theorem works only in two dimensions because only in two dimensions does a closed curve separate the space into a region “inside” the curve and a region “outside.” Thus a trajectory starting inside the limit cycle can never get out and a trajectory starting outside can never get in. This argument is an excellent example of the power of topological arguments in the study of dynamical systems. Further, from the Poincaré–Bendixson Theorem we arrive at an important result: Chaotic trajectories (in a bounded system) cannot occur in a state space of two dimensions. *For systems described by differential equations, we need at least three state-space dimensions for chaos.*

نتیجه‌ی مهم قضیه‌ی Poincare-Bendixson :

تراژکتوری‌های آشوبناک (در سیستم‌های کران‌دار) نمی‌تواند در فضای حالت دو بعدی رخ دهد. به عبارت دیگر، برای سیستم‌های توصیف شده با معادله دیفرانسیل، برای ظهور **آشوب** به حداقل ۳ بعد فضای حالت نیاز است.

نکته‌ای حاشیه‌ای!

برای سیستم‌هایی که با معادلات دیفرانسیل پیچیده‌تر نظیر معادله دیفرانسیل تاخیردار توصیف شده‌اند حتی در سیستم‌های ظاهراً یک بعدی هم می‌تواند سیکل حدی و آشوب رخ دهد.

Delayed differential equation : $\frac{du(t)}{dt} = f(t) + \lambda g(t - T)$

☆ اگر بخواهیم با روشی که پیش‌تر بحث شد این معادله دیفرانسیل را به فرم مجموعه‌ای از معادلات دیفرانسیل مرتبه اول خودمختار (autonomous) توصیف نماییم بی‌نهایت معادله خواهد شد.

☆ این سیستم در واقع، سیستمی یک بعدی نیست و بروز آشوب در آن قضیه‌ی عدم تلاقی (No-intersection theorem) و قضیه‌ی Poincare-Bendixson را نقض نمی‌کند.

پایداری/ناپایداری سیکل حدی

در این بخش می‌خواهیم پایداری حرکت در سیکل حدی را بررسی کنیم و به این سوال پاسخ دهیم که:

☆ آیا حرکت در سیکل حدی پایدار است یا ناپایدار؟

به عبارت دیگر،

☆ اگر سیستم اندکی از سیکل حدی فاصله بگیرد چه رفتاری بروز خواهد داد؟ آیا (حداقل به صورت مجانبی) به سیکل حدی باز می‌گردد یا از سیکل حدی رانده می‌شود؟

برای پاسخ دادن به این سوال باید مشتق جزئی توابع دستگاه معادلات دیفرانسیل را محاسبه نموده و به تعیین مقادیر مشخصه بپردازیم و ...



پوانکاره برای پاسخ به این سوال، روشی بسیار ساده‌تر و مفهوم‌تر پیشنهاد داده است.

Henri Poincaré, 1854-1912

فهرست مطالب

☒ فضای حالت دو بعدی – حالت خاص

☒ فضای حالت دو بعدی – حالت عام

☒ مقادیر مشخصه مختلط

☒ تلف و قضیه‌ی دیورژانس

☒ ماتریس ژاکوبین برای مقادیر مشخصه

☒ سیکل حدی (limit cycle)

☐ قطع پوانکاره و پایداری سیکل حدی

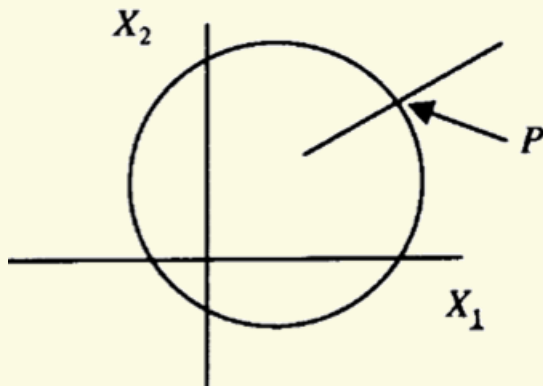
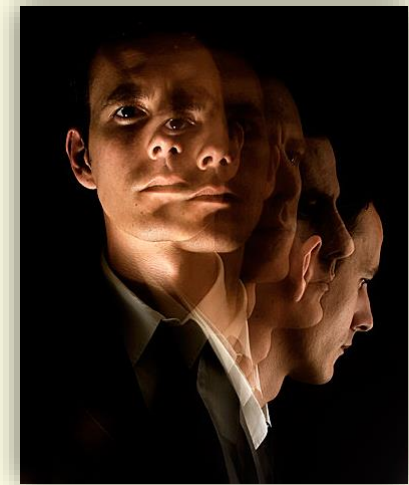
☐ قضیه‌ی دوشاخه شدن

(bifurcation theorem)



قطع پوانکاره (Poincare section)

قطع پوانکاره مشابه روش نگاره‌های چرخش‌سنجی (stroboscopic portraits) است که در مبحث نخست درس برای مدار دیودی انجام دادیم.



در فضای حالت دو بعدی، قطع پوانکاره پاره خطی است که سیکل حدی را قطع می‌کند.
هر پاره خط دلخواهی می‌تواند قطع پوانکاره باشد از جمله محورهای X_1 و X_2 .

❖ یادآوری انواع سیکل حدی:

سیکل حدی جاذب یا پایدار:

اگر تراژکتوری‌های نزدیک سیکل حدی، خواه بیرون سیکل حدی باشند خواه داخل آن، طی زمان به آن نزدیک شده و (حداقل مجانبی) به سیکل حدی ختم شوند.

☆ سیکل حدی جاذب یا پایدار

☆ سیکل حدی دافع یا ناپایدار

☆ سیکل زینی

Attracting limit cycle

Stable limit cycle

Repelling limit cycle

Unstable limit cycle

Saddle cycle

سیکل حدی جاذب

سیکل حدی پایدار

سیکل حدی دافع

سیکل حدی ناپایدار

سیکل زینی

واژه‌نامه:

با شروع تراژکتوری از نقطه‌ای نزدیک سیکل حدی ولی نه روی آن و با نامگذاری نقاط قطع تراژکتوری در دوران‌های پی در پی با پاره خط پوانکاره به ترتیب با P_1 ، P_2 ، P_3 و ...

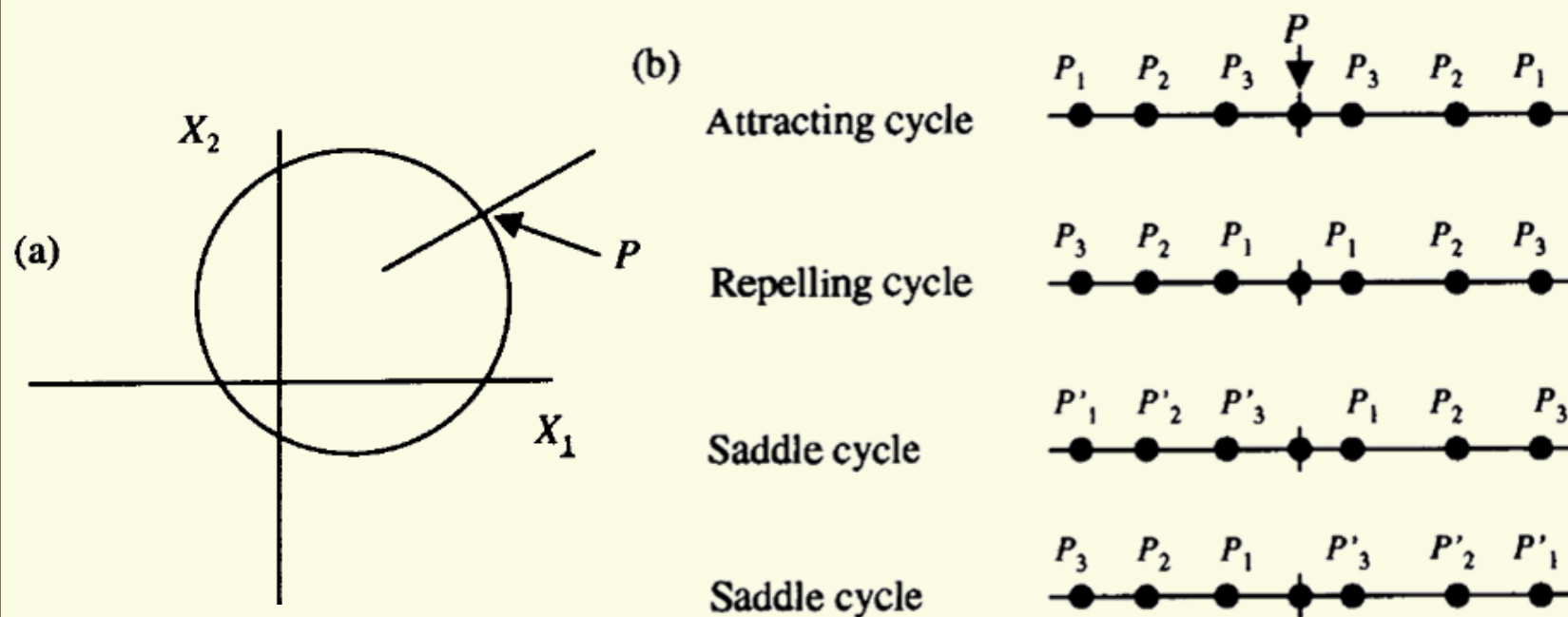


Fig. 3.12. (a) The Poincaré line segment intersects the limit cycle at point P . (b) The four possibilities for sequences of Poincaré intersection points for trajectories near a limit cycle in two dimensions.

قطع پوانکاره به شیوهی کمی

Poincare map (iterated map) : $P_{n+1} = F(P_n)$

در حالت کلی، تابع نگاشت F به معادلات توصیف کنندهی سیستم و پاره خط قطع پوانکاره وابسته است.

برای تحلیل ماهیت سیکل حدی می توان به تحلیل تابع F و مشتق های آن پرداخت.

قابل توجه است که:

- ☆ قطع پوانکاره، مسئلهی دو بعدی اولیه را به مسئلهای یک بعدی کاهش می دهد.
- ☆ تابع نگاشت پوانکاره رابطهی دیفرانسیلی (با گام زمانی بسیار خرد) را با رابطهای تکراری (با گام زمانی محدود) بازنمایی می کند.



تمرین:

Exercise 3.16-1. For the simple harmonic oscillator, the state space coordinates $x(t)$, the position coordinate, and $v(t)$, the velocity of the oscillator, are given by

$$x(t) = \omega_o \cos(\omega t)$$

$$v(t) = -\omega x_o \sin(\omega t)$$

if the initial conditions are $x(t=0) = x_o$ and $v(t=0) = 0$. Take the positive x axis as the Poincaré section line and find the corresponding Poincaré map function. Then do the same for a Poincaré section line at an angle θ with respect to the positive x axis.

قطع پوانکاره به شیوهی کمی

Poincare map (iterated map) : $P_{n+1} = F(P_n)$

برای نقطه‌ی P روی سیکل حدی داریم:

$$P = F(P)$$

از سوی دیگر، هر نقطه‌ای که در رابطه‌ی $P^* = F(P^*)$ صدق کند نقطه‌ی ثابت تابع نگاشت نامیده می‌شود. جاذب، دافع یا زینی بودن آن قابل بحث و بررسی است.

بررسی نحوه‌ی تغییرات فاصله:

$$P_2 - P^* = F(P_1) - F(P^*)$$

با نوشتن بسط سری تیلور حول P^* داریم:

$$F(P_1) = F(P^*) + \left. \frac{dF}{dP} \right|_{P^*} (P_1 - P^*) + \dots$$

با تقریب بسط با دو جمله‌ی نخست داریم:

$$P_2 - P^* \cong \left. \frac{dF}{dP} \right|_{P^*} (P_1 - P^*)$$

با تعریف $d_i = P_i - P^*$ داریم:

$$d_2 \cong \left. \frac{dF}{dP} \right|_{P^*} d_1$$

$$\text{characteristic multiplier: } M \equiv \left. \frac{dF}{dP} \right|_{P^*} \Rightarrow d_2 \cong M d_1$$

characteristic multiplier
or *Lyapunov multiplier*
or *Floquet multiplier*

$$M \equiv \left. \frac{dF}{dP} \right|_{P^*}$$

$$d_2 \cong M d_1$$

Table 3.4.
The Possible Limit Cycles and Their Characteristic
Multipliers for Two-Dimensional State Space

Characteristic Multiplier	Type of Cycle
$M < 1$	Attracting Cycle
$M > 1$	Repelling Cycle
$M = 1$	Saddle Cycle (rare in two-dimensions)



تمرین:

Exercise 3.16-2. In a state space with two dimensions, M cannot be negative. Show that this must be the case to avoid violating the No-Intersection Theorem. Hint: If M is negative, then the intersection points must oscillate from one side of P^* to the other on subsequent iterations.

نمای مشخصه

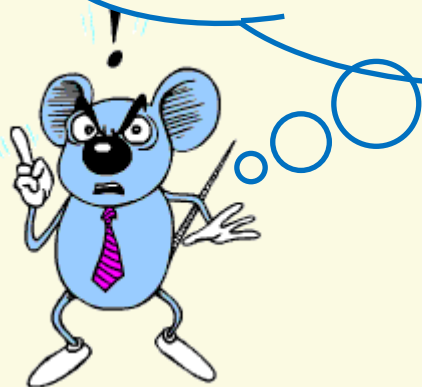
Characteristic exponent : $\lambda \equiv \text{Ln}(M) \Rightarrow M \equiv e^\lambda$

نمای مشخصه نقش نمای لیاپانوف را بازی می کند با این تفاوت که واحد زمانی آن بر اساس فاصله ی زمانی دو برخورد پی در پی تراژکتوری با پاره خط قطع پوانکاره تعیین می گردد.

قطع پوانکاره امکان بررسی نوع سیکل حدی را به شیوه ای ساده تر فراهم می سازد.

محدودیت اصلی این شیوه آن است که در بسیاری از موارد نمی توان تابع نگاشت F را به طور صریح یافت.

جمع بندی!



فهرست مطالب

☒ فضای حالت دو بعدی – حالت خاص

☒ فضای حالت دو بعدی – حالت عام

☒ مقادیر مشخصه مختلط

☒ تلف و قضیه‌ی دیورژانس

☒ ماتریس ژاکوبین برای مقادیر مشخصه

☒ سیکل حدی (limit cycle)

☒ قطع پوانکاره و پایداری سیکل حدی

☐ قضیه‌ی دوشاخه شدن 

(bifurcation theorem)



قضیه‌ی دو شاخه شدن (bifurcation theorem)

عبارت **دو شاخه شدن (bifurcation)** برای توصیف تغییرات ناگهانی در دینامیک‌های سیستم استفاده می‌گردد.

وقتی با تغییر پارامتر، نقطه‌ی ثابتی تغییر ماهیت دهد رفتار تراژکتوری‌ها در همسایگی آن نقطه ثابت تغییر خواهد کرد و استفاده از عبارت دو شاخه شدن موضوعیت خواهد داشت.

قضیه‌ی دو شاخه شدن به «مطالعه‌ی نحوه‌ی تغییرات ماهیت نقاط ثابت (یا دیگر جاذب‌های فضای حالت) با تغییر پارامترهای سیستم» می‌پردازد.

❖ این پارامتر می‌تواند ولتاژ مدار دیودی یا غلظت مواد در یک راکتور شیمیایی باشد.

❖ در اینجا، بحث تنها آن دسته از دو شاخه شدن‌هایی محدود می‌گردد که

با تغییر تنها یک پارامتر کنترلی رخ می‌دهند.



❖ انواع متداول دو شاخه شدن:

نوع متداول دوشاخه شدن یک بعدی:

❖ **Repellor-node bifurcation**

انواع متداول دوشاخه شدن دو بعدی (مدل‌های با یک پارامتر کنترلی):

❖ **saddle-node bifurcation**

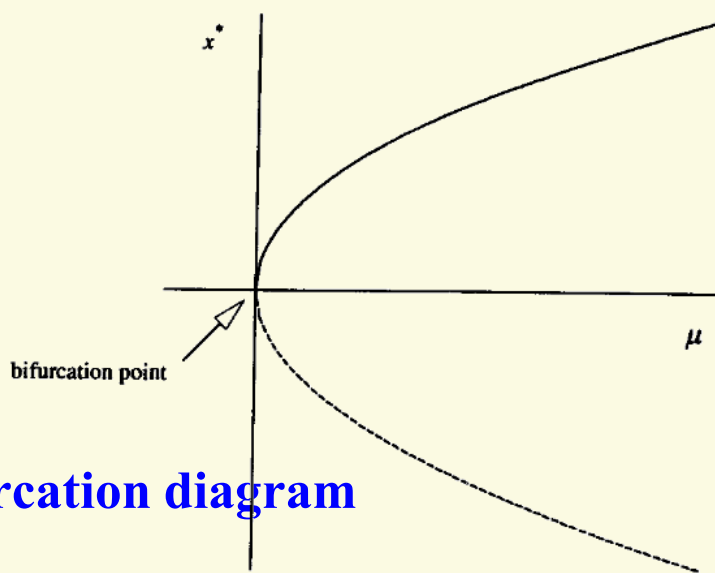
❖ **Limit cycle bifurcation (Hopf bifurcation)**

❖ انواع ترسیمه‌های بازنمایی دو شاخه شدن:

در اینجا برای بررسی دو شاخه شدن، دو نوع ترسیمه مورد استفاده قرار می‌گیرد:

❖ ترسیمه‌ی محل نقاط ثابت بر حسب پارامتر کنترلی (نمودار دو شاخه شدن)

❖ ترسیمه‌ی مقادیر ویژه بر حسب پارامتر کنترلی



❖ Bifurcation diagram

Fig. 3.14. The bifurcation diagram for the repeller-node (saddle-node) bifurcation. The solid line indicates the x value for the node as a function of the parameter value. The dashed line is for the repeller. Note that there is no fixed point at all for $\mu < 0$.

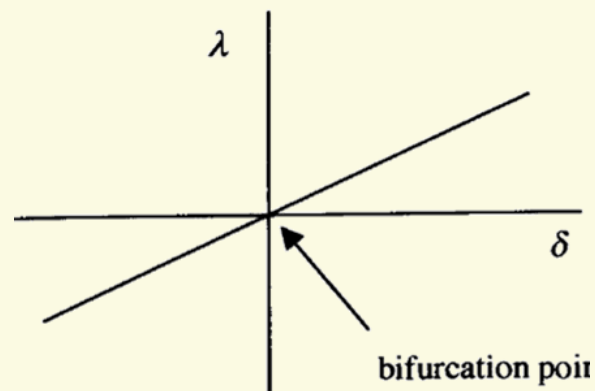


Fig. 3.13. The characteristic value plotted as a function of the control parameter. For $\delta < 0$ the fixed point is a node. For $\delta > 0$ the fixed point is a repeller. A bifurcation occurs at $\delta = 0$.



تمرین: دو شاخه شدن در فضای یک بعدی

سیستمی را در نظر بگیرید که با معادله دیفرانسیل زیر توصیف شده است:

$$\dot{x} = (\mu - 1)(x - a)$$

الف: نقطه‌ی ثابت سیستم را تعیین نمایید.

ب: مقدار مشخصه‌ی متناظر با نقطه‌ی ثابت را به دست آورید.

ج: به کمک مقدار مشخصه، به ازای مقادیر مختلف پارامتر، نوع نقطه‌ی ثابت را تحلیل کنید.

د: آیا نتایج بند ج حاکی از دو شاخه شدن (bifurcation) است؟

$$\dot{x} = 0 \Rightarrow (\mu - 1)(x - a) = 0 \Rightarrow \text{for } \mu \neq 1 \Rightarrow x = a$$

حل الف:

توجه کنید که به ازای $\mu = 1$ ، تمام x ها نقاط ثابت‌اند.

برای $\mu < 1$ ، نقطه‌ی ثابت node است.

برای $\mu > 1$ ، نقطه‌ی ثابت repeller است. حل ج:

$$\lambda = \frac{\partial f}{\partial x} = \mu - 1$$

حل ب:

برای $\mu = 1$ ،

Exercise 3.17-1. What kind of fixed point does this example have at $\mu = 1$?

به ازای $\mu = 1$ ، دو شاخه شدن رخ داده و نقطه‌ی ثابت پایدار (node) به نقطه‌ی ثابت ناپایدار (repeller) تبدیل شده است.

حل د:

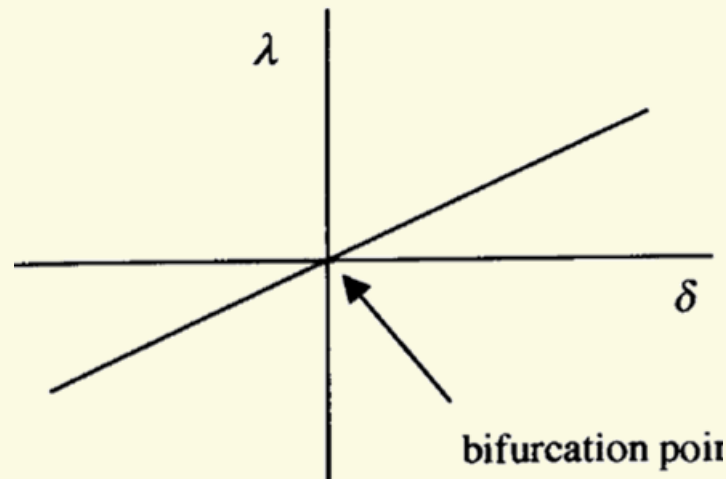
❖ باز تعریف پارامتر کنترلی و متغیر:

در منابع دینامیک غیرخطی، متداول است که پارامتر کنترلی و متغیر مستقل **باز تعریف** (**redefine**) گردد به نحوی که دو شاخه شدن در مقدار پارامتر صفر **و/یا** متغیر مستقل صفر رخ دهد.

$$\dot{x} = (\mu - 1)(x - a)$$

$$\text{باز تعریف: } \begin{cases} \delta = \mu - 1 \\ y = x - a \end{cases} \Rightarrow \dot{y} = \delta y$$

Fig. 3.13. The characteristic value plotted as a function of the control parameter. For $\delta < 0$ the fixed point is a node. For $\delta > 0$ the fixed point is a repellor. A bifurcation occurs at $\delta = 0$.





تمرین: دو شاخه شدن در فضای یک بعدی

سیستمی را در نظر بگیرید که با معادله دیفرانسیل زیر توصیف شده است (x مقداری حقیقی فرض می شود):

$$\dot{x} = \mu - x^2$$

الف: نقاط ثابت سیستم را تعیین نمایید.

ب: مقادیر مشخصه‌ی متناظر با نقاط ثابت را به دست آورید.

ج: به کمک مقدار مشخصه، به ازای مقادیر مختلف پارامتر، نوع نقطه‌ی ثابت را تعیین کنید.

د: آیا نتایج بند ج حاکی از دو شاخه شدن (bifurcation) است؟ چه نوعی؟

ه: نمودار دو شاخه شدن (bifurcation diagram) سیستم را رسم کنید.



$$\dot{x} = \mu - x^2$$

$$\dot{x} = 0 \Rightarrow \mu - x^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{for } \mu > 0 & \Rightarrow x = \pm\sqrt{\mu} \\ \text{for } \mu = 0 & \Rightarrow x = 0 \\ \text{for } \mu < 0 & \Rightarrow \text{فاقد نقطه‌ی ثابت است.} \end{cases} \quad \text{حل الف:}$$

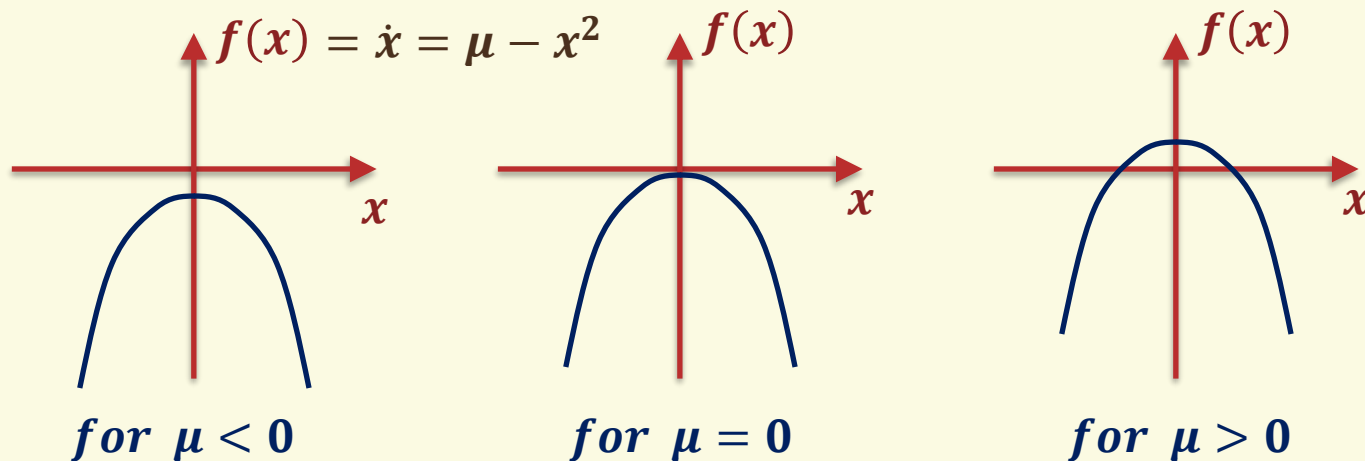
$$\text{for } \mu > 0 \quad \begin{cases} \lambda = \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=+\sqrt{\mu}} = -2x \Big|_{x=+\sqrt{\mu}} = -2\sqrt{\mu} < 0 \\ \lambda = \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=-\sqrt{\mu}} = -2x \Big|_{x=-\sqrt{\mu}} = 2\sqrt{\mu} > 0 \end{cases} \quad \text{حل ب:}$$

$$\text{for } \mu = 0 \quad \lambda = \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=0} = -2x \Big|_{x=0} = 0 \Rightarrow \left. \frac{d^2f}{dx^2} \right|_{x=0} = -2 \Big|_{x=0} = -2 < 0$$

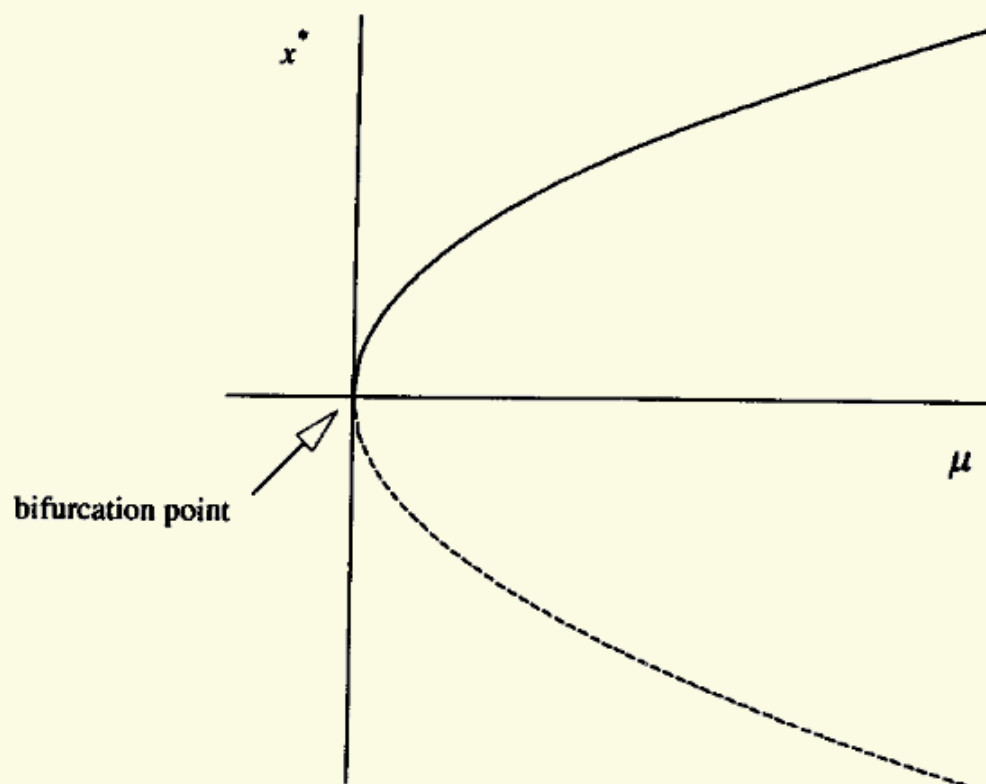
$$\Rightarrow \begin{cases} x = +\sqrt{\mu} & : \text{node} \\ x = -\sqrt{\mu} & : \text{repellor} \\ x = 0 & : \text{saddle point} \end{cases} \quad \text{حل ج:}$$



حل د: برای $\mu < 0$ ، نقطه‌ی ثابتی نداریم. به ازای $\mu = 0$ سیستم دارای نقطه‌ی ثابتی از نوع زینی است. برای $\mu > 0$ ، سیستم دارای دو نقطه‌ی ثابت از نوع جفت جاذب-دافع است. بنابراین در $\mu = 0$ ، دو شاخه شدن از نوع **repellor-node bifurcation** رخ می‌دهد.

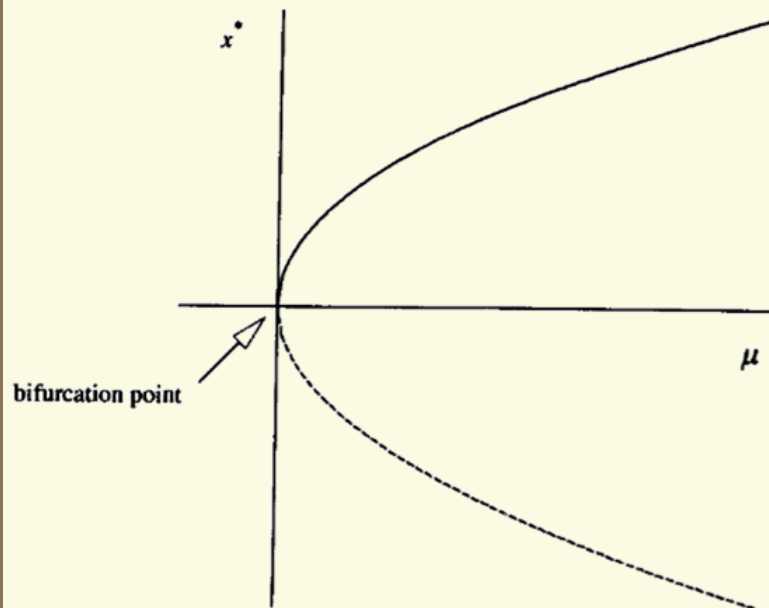


قابل توجه است که در نقطه‌ی دو شاخه شدن جاذب-دافع (**repellor-node bifurcation**)، نقطه‌ی ثابت سیستم **ناپایدار ساختاری** (**structurally unstable**) است. به عبارت دیگر، وجود نقاط ثابت ناپایدار ساختاری نشانه‌ای از دو شاخه شدن است.



حل هـ:

Fig. 3.14. The bifurcation diagram for the repeller-node (saddle-node) bifurcation. The solid line indicates the x value for the node as a function of the parameter value. The dashed line is for the repeller. Note that there is no fixed point at all for $\mu < 0$.



این نوع دو شاخه شدن،

- ❖ fold bifurcation
- ❖ tangent bifurcation
- ❖ saddle-node bifurcation

نیز نامیده می شوند زیرا،

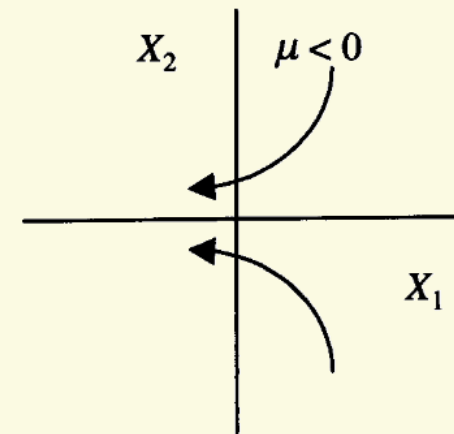
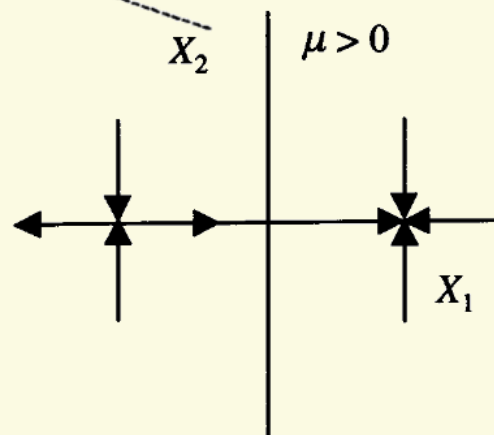
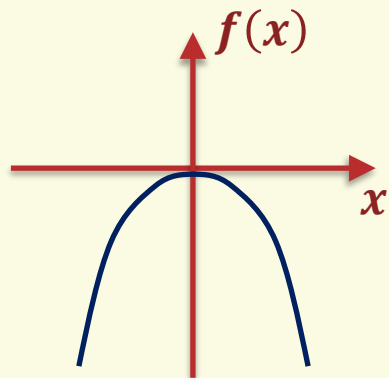


Fig. 3.15. Phase portraits above and below a saddle-node bifurcation. The one-dimensional trajectories have been lifted to a two-dimensional state space as described in the text. For $\mu > 0$, there is a saddle point at $X_1 = -\sqrt{\mu}$ and a node at $X_1 = +\sqrt{\mu}$. There is no fixed point for $\mu < 0$.

دوشاخه شدن در فضای دو بعدی

در فضای حالت دو بعدی، نقطه‌ی ثابت معمولاً دارای

➤ دو مقدار مشخصه‌ی حقیقی،

➤ یک جفت مقدار مشخصه‌ی مزدوج مختلط

یا در موارد استثناء، دارای

➤ یک مقدار مشخصه

است.

❖ اگر مقادیر مشخصه حقیقی باشند می‌توان آنها را به صورت تابعی از پارامتر رسم نمود.

❖ اگر مقادیر مشخصه جفت مزدوج مختلط باشند بخش‌های حقیقی و موهومی آنها به

صورت تابعی از پارامتر رسم می‌گردد.



مثال: ترسیمه مقادیر مشخصه (مدل بروکسل)

$$\begin{cases} \dot{X} = A - (B + 1)X + X^2Y \\ \dot{Y} = BX - X^2Y \end{cases}$$

پیش تر مدل بروکسل (Brusselator model)

مورد بررسی قرار گرفت.

و مشاهده گردید که به ازای $A = 1$ ، مدل دارای نقطه‌ی ثابت $(X_0, Y_0) = (1, B)$ و مقادیر ویژه‌ی زیر است.

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2} \left[(B - 2) \pm \sqrt{(B - 2)^2 - 4} \right]$$

✓ اگر $0 < B < 4$ باشد مقادیر ویژه مختلط هستند.

✓ اگر $B > 4$ باشد مقادیر ویژه حقیقی هستند.

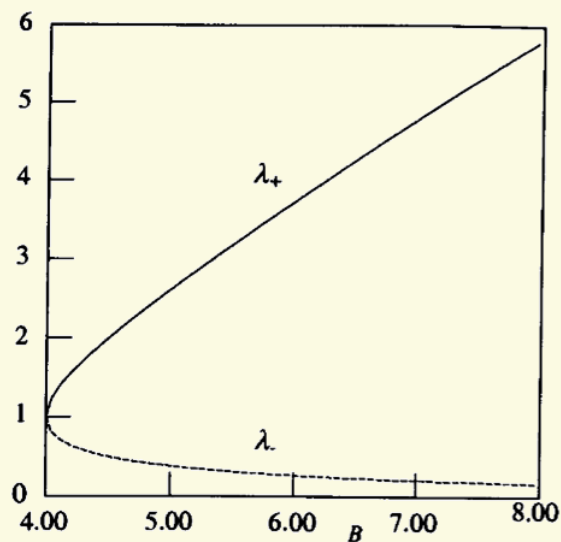


Fig. 3.16. Characteristic values for the fixed point of the Brusselator model for B parameter values greater than 4. For $B < 4$, the characteristic values are complex.

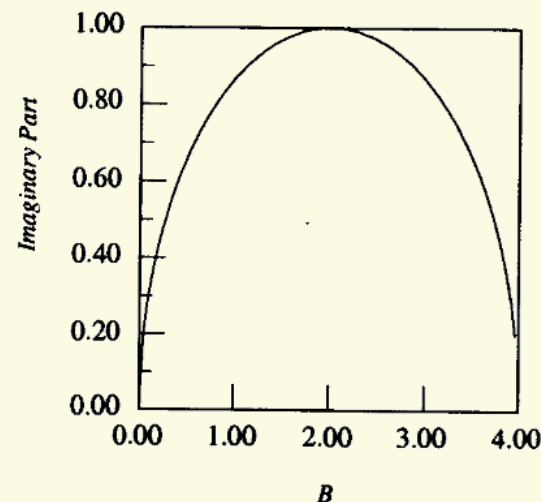
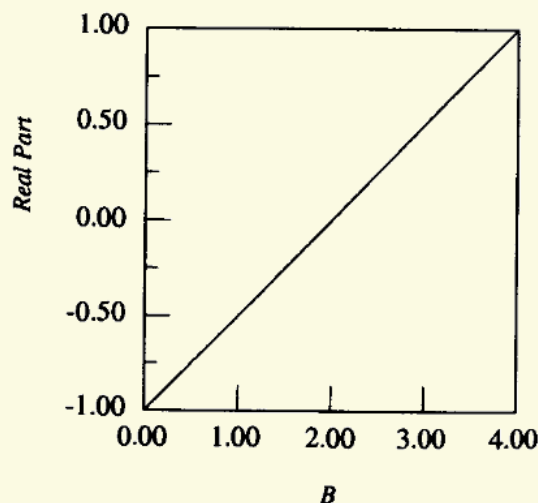


Fig. 3.17. The real and imaginary parts of the characteristic value λ_+ for the Brusselator model are shown as a function of the parameter B . For λ_- , the imaginary part is negative.



تمرین: saddle-node bifurcation

رفتار تراژکتوری‌ها در نزدیکی نقاط ثابت اغلب با معادلات زیر مدل می‌شود که در اصطلاح،

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \mu - x_1^2 \\ \dot{x}_2 = -x_2 \end{cases}$$

Normal form equation نامیده می‌شود.

الف: نقاط ثابت را به دست آورید.

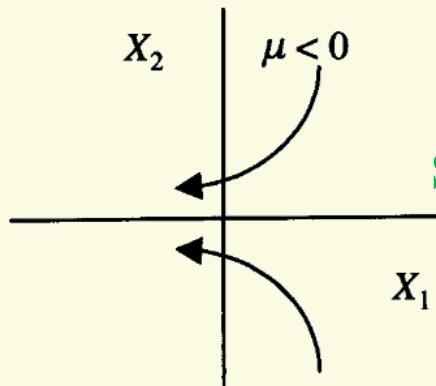
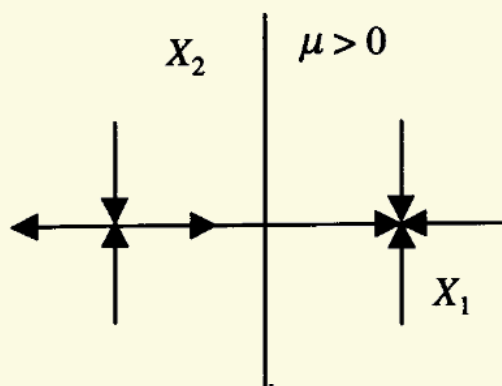
ب: نوع نقاط ثابت را تعیین نمایید.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 0 \\ \dot{x}_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu - x_1^2 = 0 \\ -x_2 = 0 \end{cases}$$

برای $\mu < 0$ ، نقطه‌ی ثابت ندارد.

برای $\mu > 0$ ، نقاط ثابت عبارتند از:

→ *fixed points*: $\begin{cases} (+\sqrt{\mu}, 0) & \text{node} \\ (-\sqrt{\mu}, 0) & \text{saddle point} \end{cases}$



بنابراین در $\mu = 0$ ، یک

Saddle-node bifurcation

رخ داده و یک

جفت جاذب-زینی

متولد شده است.

Fig. 3.15. Phase portraits above and below a saddle-node bifurcation. The one-dimensional trajectories have been lifted to a two-dimensional state space as described in the text. For $\mu > 0$, there is a saddle point at $X_1 = -\sqrt{\mu}$ and a node at $X_1 = +\sqrt{\mu}$. There is no fixed point for $\mu < 0$.

دو شاخه شدن سیکل حدی (limit cycle bifurcation)

پیش تر دیدیم که،

نقطه‌ی ثابت در فضای حالت دو بعدی می‌تواند دارای **مقادیر مشخصه‌ی مختلط** باشد که نشانگر **رفتار مارپیچی تراژکتوری** است. در این شرایط، با جابجایی مقادیر مشخصه از سمت چپ صفحه‌ی مختلط به سمت راست آن، **دو شاخه شدن** رخ می‌دهد (وقتی بخش حقیقی مقدار مشخصه صفر می‌شود).

❖ تولد یا مرگ سیکل حدی نیز رویداد **دو شاخه شدن** است.

❖ تولد سیکل حدی پایدار، در اصطلاح **Hopf bifurcation** نامیده می‌شود.

از آنجا که برای مطالعه‌ی سیکل حدی می‌توان از **قطع پوانکاره** استفاده نمود و اینکه، قطع پوانکاره برای فضای حالت دو بعدی، یک پاره‌خط است می‌توان دو شاخه شدن سیکل حدی را مشابه روشی که برای **فضای حالت یک بعدی** مطرح شد مورد مطالعه قرار داد.



تمرین:

سیستمی را در نظر بگیرید که با دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبه اول زیر توصیف شده است.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 + x_1[\mu - (x_1^2 + x_2^2)] \\ \dot{x}_2 = +x_1 + x_2[\mu - (x_1^2 + x_2^2)] \end{cases}$$

الف: با دستکاری‌های جبری، دستگاه معادلات را به فرم قطبی (r, θ) بازنمایی کنید.

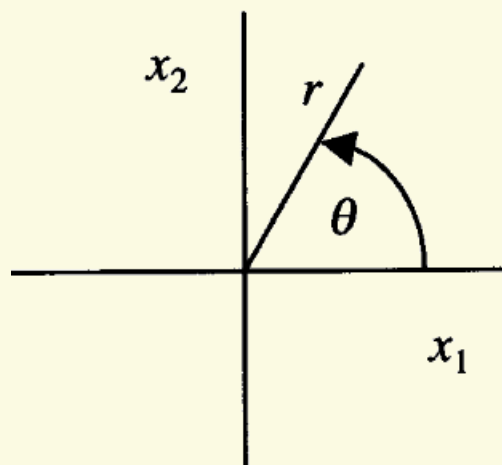


Fig. 3.18. The definition of polar coordinates. r is the length of the radius vector from the origin. θ is the angle between the radius vector and the positive x_1 axis.

$$\begin{cases} r^2 = x_1^2 + x_2^2 \\ \theta = \tan^{-1}(x_2/x_1) \quad \tan\theta = x_2/x_1 \end{cases}$$

ب: بر اساس نتایج بند الف، $\theta(t)$ را تعیین و تفسیر نمایید.

ج: برای $\mu < 0$ ، نقاط ثابت و نوع آنها را تعیین نمایید.

د: برای $\mu > 0$ ، نقاط ثابت و نوع آنها را تعیین نمایید.

ه: دو شاخه شدن به ازای چه مقدار پارامتر و از چه نوعی است؟

حل الف:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 + x_1[\mu - (x_1^2 + x_2^2)] \\ \dot{x}_2 = +x_1 + x_2[\mu - (x_1^2 + x_2^2)] \end{cases}$$

$$r = (x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \dot{r} = \frac{1}{2} (x_1^2 + x_2^2)^{-\frac{1}{2}} \{2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2\}$$

$$\dot{r} = \frac{1}{2} (x_1^2 + x_2^2)^{-\frac{1}{2}} \{2x_1(-x_2 + x_1[\mu - (x_1^2 + x_2^2)]) + 2x_2(x_1 + x_2[\mu - (x_1^2 + x_2^2)])\}$$

$$\dot{r} = \frac{1}{2} (x_1^2 + x_2^2)^{-\frac{1}{2}} \{-2x_1x_2 + 2x_1^2[\mu - (x_1^2 + x_2^2)] + 2x_1x_2 + 2x_2^2[\mu - (x_1^2 + x_2^2)]\}$$

$$\Rightarrow \dot{r} = \frac{1}{2} (x_1^2 + x_2^2)^{-\frac{1}{2}} \{2(x_1^2 + x_2^2)[\mu - (x_1^2 + x_2^2)]\}$$

$$\Rightarrow \dot{r} = (x_1^2 + x_2^2)^{+\frac{1}{2}} \{[\mu - (x_1^2 + x_2^2)]\} \Rightarrow \dot{r} = r(\mu - r^2)$$

$$\tan\theta = \frac{x_2}{x_1} \Rightarrow \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{x_2}{x_1} \Rightarrow \frac{\dot{\theta} \cos^2\theta + \dot{\theta} \sin^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{x_1\dot{x}_2 - \dot{x}_1x_2}{x_1^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\dot{\theta}}{\cos^2\theta} = \frac{x_1\{+x_1 + x_2[\mu - (x_1^2 + x_2^2)]\} - \{-x_2 + x_1[\mu - (x_1^2 + x_2^2)]\}x_2}{x_1^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\dot{\theta}}{\cos^2 \theta} = \frac{x_1 \{ +x_1 + x_2 [\mu - (x_1^2 + x_2^2)] \} - \{ -x_2 + x_1 [\mu - (x_1^2 + x_2^2)] \} x_2}{x_1^2}$$

$$\Rightarrow \dot{\theta} (1 + \tan^2 \theta) = \frac{x_1^2 + x_1 x_2 [\mu - (x_1^2 + x_2^2)] + x_2^2 - x_1 x_2 [\mu - (x_1^2 + x_2^2)]}{x_1^2}$$

$$\Rightarrow \dot{\theta} \left(1 + \frac{x_2^2}{x_1^2} \right) = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1^2}$$

$$\Rightarrow \dot{\theta} \left(\frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1^2} \right) = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1^2} \Rightarrow \dot{\theta} = 1$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 + x_1 [\mu - (x_1^2 + x_2^2)] \\ \dot{x}_2 = +x_1 + x_2 [\mu - (x_1^2 + x_2^2)] \end{cases}$$

$$\begin{cases} r = x_1^2 + x_2^2 \\ \theta = \tan^{-1}(x_2/x_1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{r} = r (\mu - r^2) \\ \dot{\theta} = 1 \end{cases}$$

بنابراین:

ب: بر اساس نتایج بند الف، $\theta(t)$ را تعیین و تفسیر نمایید.

$$\begin{cases} \dot{r} = r(\mu - r^2) \\ \dot{\theta} = 1 \end{cases}$$

حل ب:

$$\Rightarrow \theta(t) = \theta_0 + t$$

زاویه به طور خطی با زمان افزایش می‌یابد که به معنای حرکت مارپیچ (spiral) تراژکتوری حول مبدا است.

ج: برای $\mu < 0$ ، نقاط ثابت و نوع آنها را تعیین نمایید.

حل ج:

$$\dot{r} = r(\mu - r^2) \Rightarrow f(r) = r(\mu - r^2) = 0 \xrightarrow{\mu < 0} r = 0$$

$$\text{مقدار مشخصه: } \left. \frac{df}{dr} \right|_{r=0} = \{\mu - r^2 + (-2r)r\}_{r=0} = \mu < 0$$

نقطه‌ی ثابت از نوع **spiral node** است.

د: برای $\mu > 0$ ، نقاط ثابت و نوع آنها را تعیین نمایید.

حل د:

$$\dot{r} = r(\mu - r^2) \quad \Rightarrow \quad f(r) = r(\mu - r^2) = 0 \quad \xrightarrow{\mu > 0} \quad \begin{cases} r = 0 \\ r = \sqrt{\mu} \end{cases}$$

توجه کنید که r نمی تواند منفی باشد.

مقدار مشخصه : $\left. \frac{df}{dr} \right|_{r=0} = \{\mu - r^2 + (-2r)r\} \Big|_{r=0} = \mu > 0$

نقطه‌ی ثابت از نوع **spiral repellor** است.

مقدار مشخصه : $\left. \frac{df}{dr} \right|_{r=\sqrt{\mu}} = \{\mu - r^2 + (-2r)r\} \Big|_{r=\sqrt{\mu}} = -2\mu < 0$

که نشانگر **سیکل حدی (limit cycle)** است.

ه: دو شاخه شدن به ازای چه مقدار پارامتر و از چه نوعی است؟

حل د:

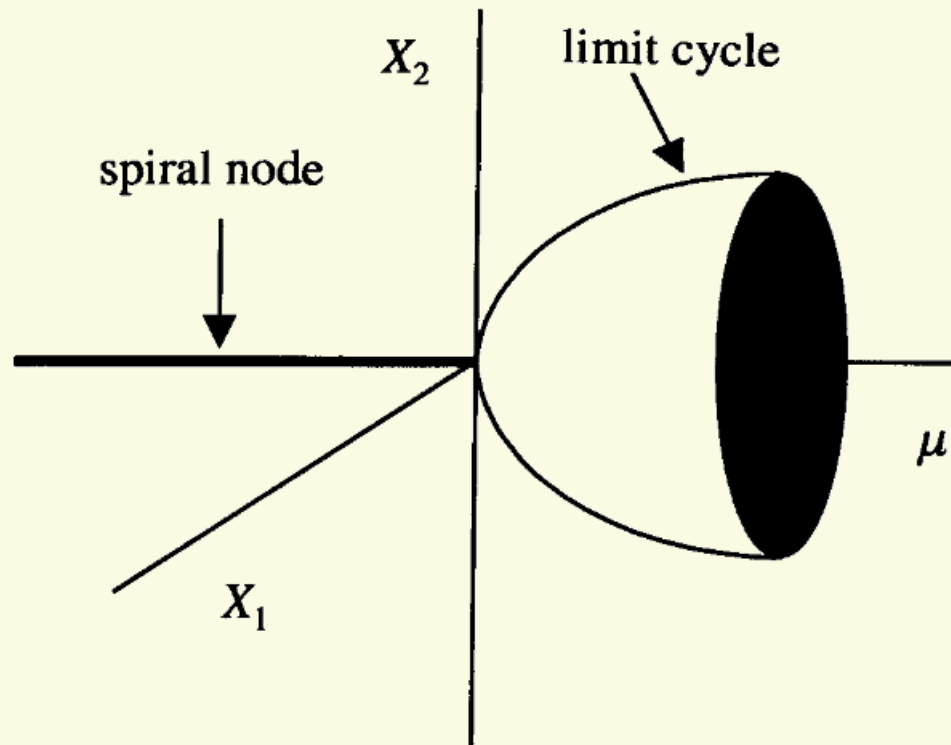


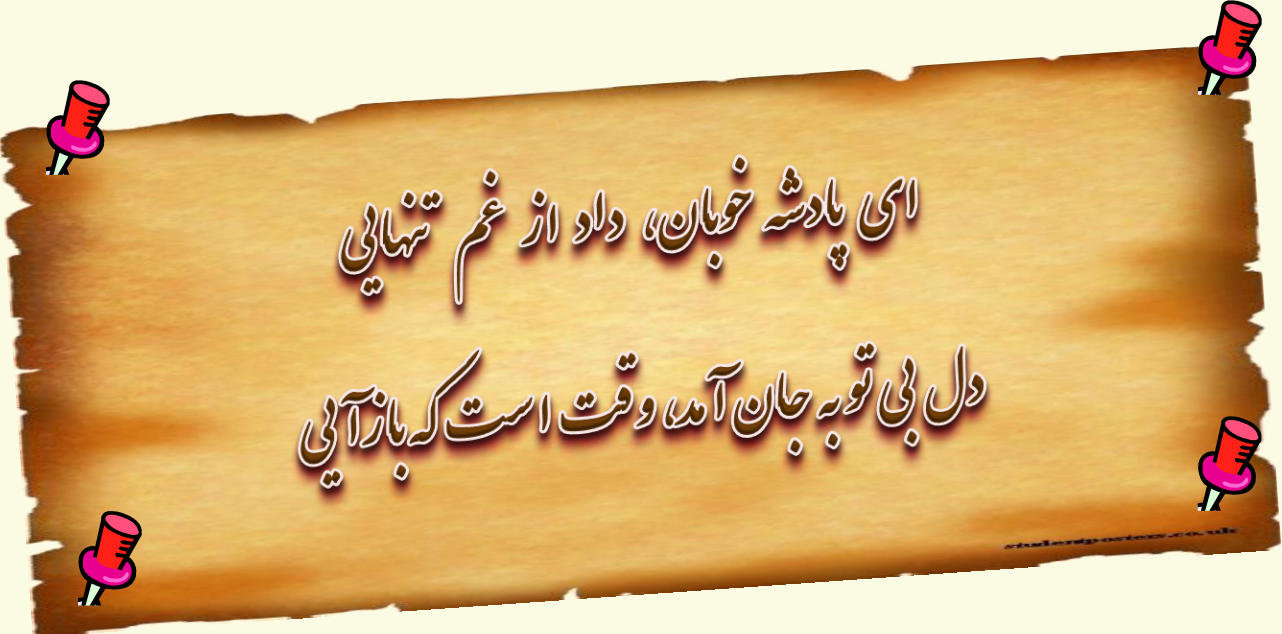
Fig. 3.19. The bifurcation diagram for the Hopf bifurcation. For $\mu < 0$, the fixed point is a spiral node. For $\mu > 0$, the fixed point at the origin is a spiral repeller and the attractor for the system is the limit cycle.

فهرست مطالب

- ✓ فضای حالت دو بعدی – حالت خاص
- ✓ فضای حالت دو بعدی – حالت عام
- ✓ مقادیر مشخصه مختلط
- ✓ تلف و قضیه‌ی دیورژانس
- ✓ ماتریس ژاکوبین برای مقادیر مشخصه
- ✓ سیکل حدی (limit cycle)
- ✓ قطع پوانکاره و پایداری سیکل حدی
- ✓ قضیه‌ی دوشاخه شدن

(bifurcation theorem)





ای پادشہ خوبان، داد از غم تنہائی
دل بی توبہ جان آمد، وقت است کہ باز آئی