دینامیک غیرخطی و آشوب

و کاربردهای آن در مهندسی پزشکی

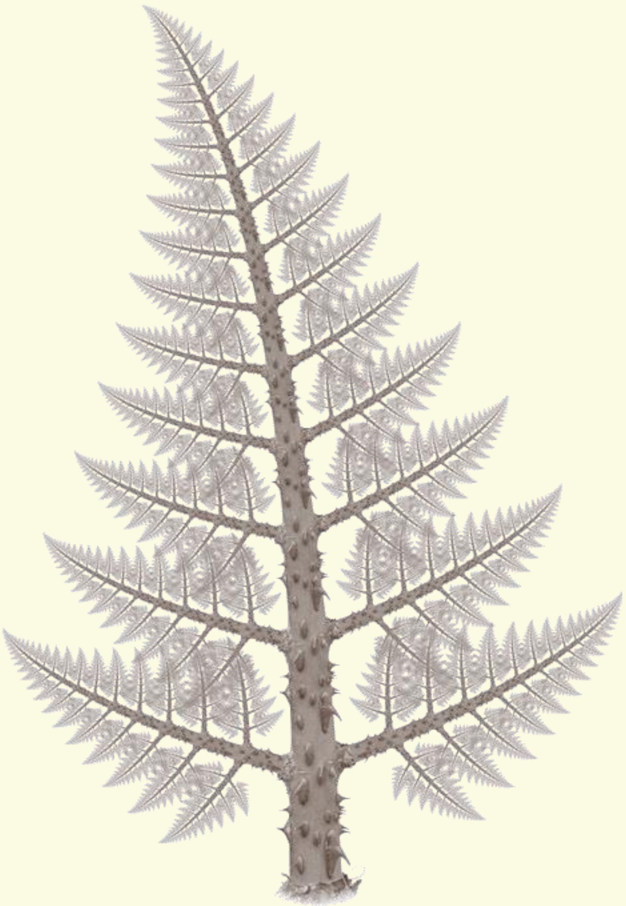
Dr. A. Maleki http://amaleki.profile.semnan.ac.ir

مبحث چهارم

فضای حالت سه بعدی

فهرست مطالب

- مقدمه و مفاهیم
- سیستم‌های دینامیک سه‌بعدی
- نقاط ثابت
- سیکل حدی و قطع پوانکاره
- رفتار شبه‌تناوبی
- مسیرهای منتهی به آشوب
- نمای لیاپانوف

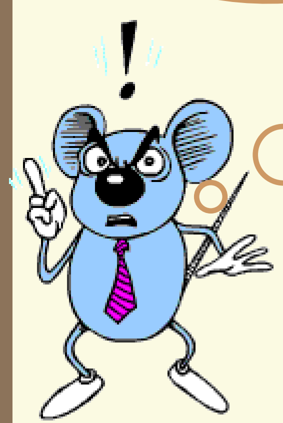


❖ فضای حالت سه بعدی:

فضای حالت سه بعدی بسیار اهمیت دارد زیرا سیستم قادر خواهد بود رفتارهای پیچیده‌ای نظیر آشوب را بروز دهد.

اشتباه نکنید!

اهمیت فضای حالت سه بعدی ارتباطی به این که ما در جهانی سه بعدی زندگی می‌کنیم ندارد. فضای حالت چیزی متفاوت از فضای فیزیکی است.



❖ شیوه‌ای متفاوت!

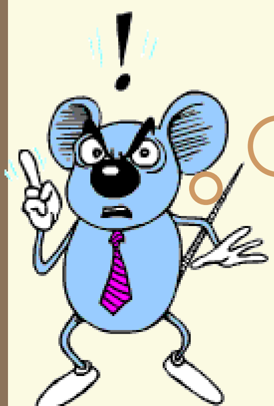
اگر چه در این مبحث، ابتدا به شیوه‌ی تحلیلی به تعیین نقاط ثابت، تعیین نوع آنها و ... می‌پردازیم (مشابه آنچه برای فضای حالت یک و دو بعدی انجام شد) ولی در ادامه، قصد داریم به تدریج ، تصویری هندسی (توپولوژیکی) از تراژکتوری‌ها، جاذب‌ها و دو شاخه شدن در فضای حالت سه بعدی ارائه کنیم و بر آن تاکید نماییم.

❖ انواع جاذب‌های سیستم‌های دینامیکی با تلف:

- ❖ جاذب‌های شبه تناوبی (quasi-periodic attractor)
- ❖ جاذب‌های آشوبی (chaotic attractors)

توجه کنید!

گاهی اصطلاح جاذب عجیب (strange attractor) معادل جاذب آشوبی استفاده می‌گردد ولی این دو متمایزند!



❖ ملزومات رفتار آشوبناک

۱- عدم تلاقی تراژکتوری‌های متمایز

۲- کران‌دار بودن تراژکتوری‌ها

۳- واگرایی نمایی تراژکتوری‌های نزدیک به هم

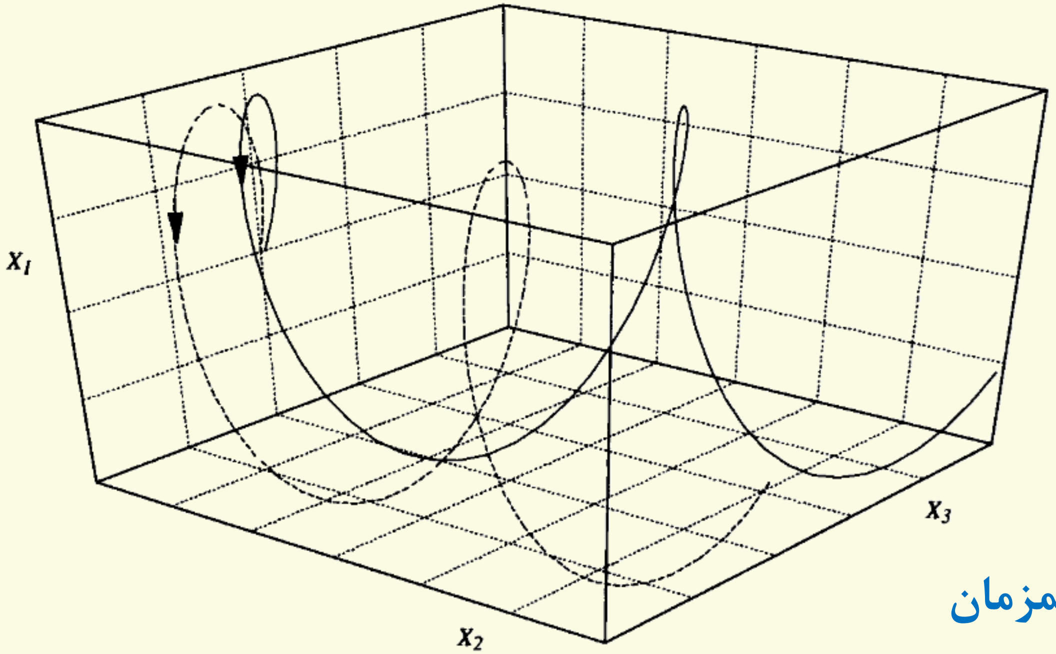


Fig. 4.1. A sketch of trajectories in a three-dimensional state space. Notice how two nearby trajectories can continue to behave quite differently from each other yet remain bounded by weaving in and out and over and under each other.

در فضای حالت یک یا دو بعدی،

این ملزومات نمی‌تواند به طور همزمان

برآورده شود.

❖ نمای لیاپانوف

اگر دو تراژکتوری نزدیک به هم در جاذبی آشوبی در $t = 0$ دارای فاصله‌ی d_0 باشند فاصله دو تراژکتوری بر حسب زمان (حداقل برای دوره‌ای محدود) به صورت زیر خواهد بود.

$$d(t) = d_0\, e^{\lambda t} \qquad \lambda: Lyapunov\ Exponent$$

اگر $\lambda > 0$ باشد رفتار تراژکتوری آشوبناک است!

در این شرایط، فاصله‌ی تراژکتوری‌ها از هم به صورت نمایی افزایش می‌یابد.

چگونه می‌توان این رفتار را با استفاده از یک تراژکتوری بررسی نمود؟

❖ مسیرهای منتهی به آشوب (routes to chaos)

جهان‌شمولی مسیرهای منتهی به آشوب!

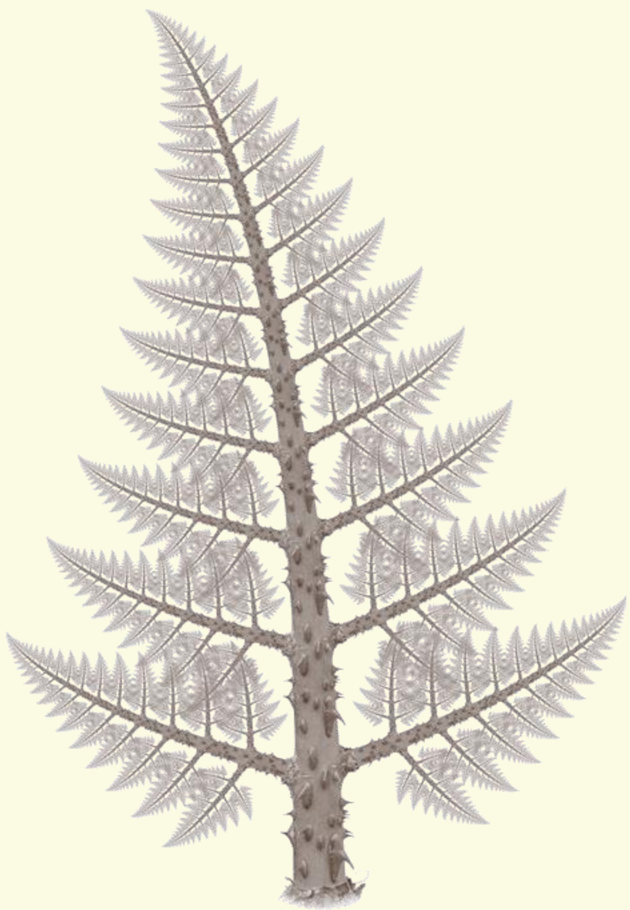
Table 4.1

Transitions to Chaos

I. Via Local Bifurcations
- A. Period-doubling
- B. Quasi-periodicity
- C. Intermittency
  1. Type I (tangent bifurcation intermittency)
  2. Type II (Hopf bifurcation intermittency)
  3. Type III (period-doubling intermittency)
  4. On-off intermittency

II. Via Global Bifurcations
- A. Chaotic transients
- B. Crises

فهرست مطالب



سیستم دینامیکی سه بعدی

سیستم دینامیکی سه بعدی به سیستمی اطلاق می‌گردد که دارای سه متغیر دینامیکی مستقل باشد به نحوی که مقدار این متغیرها در هر لحظه از زمان، حالت سیستم را به طور یکتا مشخص نماید.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, x_3) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, x_3) \\ \dot{x}_3 = f_3(x_1, x_2, x_3) \end{cases}$$

دقت کنید که سیستم خودمختار (autonomous) است یعنی زمان به طور صریح در توابع f_1، f_2 و f_3 ظاهر نشده است.

بازنمایی برداری : $\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x})$

❖ یادآوری: تبدیل سیستم غیرخودمختار به خودمختار

معادلات دیفرانسیل سیستم دو بعدی که در توابع آن، زمان ظاهر شده است و به عبارتی، غیرخودمختار (nonautonomous) است را می‌توان با تعریف متغیر جدید $x_3 = t$ به سه معادله دیفرانسیل خومختار (automnomous) تبدیل کرد.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, t) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, t) \end{cases} \qquad x_3 = t \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, x_3) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, x_3) \\ \dot{x}_3 = 1 \end{cases}$$

تمرین:تبدیل سیستم غیرخودمختار به ...

Exercise 4.4-1. The "forced" van der Pol equation is used to describe an electronic triode tube circuit subject to a periodic electrical signal. The equation for $q(t)$, the charge oscillating in the circuit, can be put in the form

$$\frac{d^2q}{dt^2}+\gamma(q)\frac{dq}{dt}+q(t)=g\sin\omega t$$

Use the trick introduced earlier to write this equation in the standard form of Eq. (4.4-1).

معادله‌ی **van der Pol** را به صورت استاندارد (دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبه اول) بازنویسی کنید.

$$\frac{d^2q}{dt^2}+\gamma(q)\frac{dq}{dt}+q(t)=g\,sin(\omega t)$$

$$\dot{x}_2=-\gamma(x_1)\,x_2-x_1+g\,sin\omega x_3$$

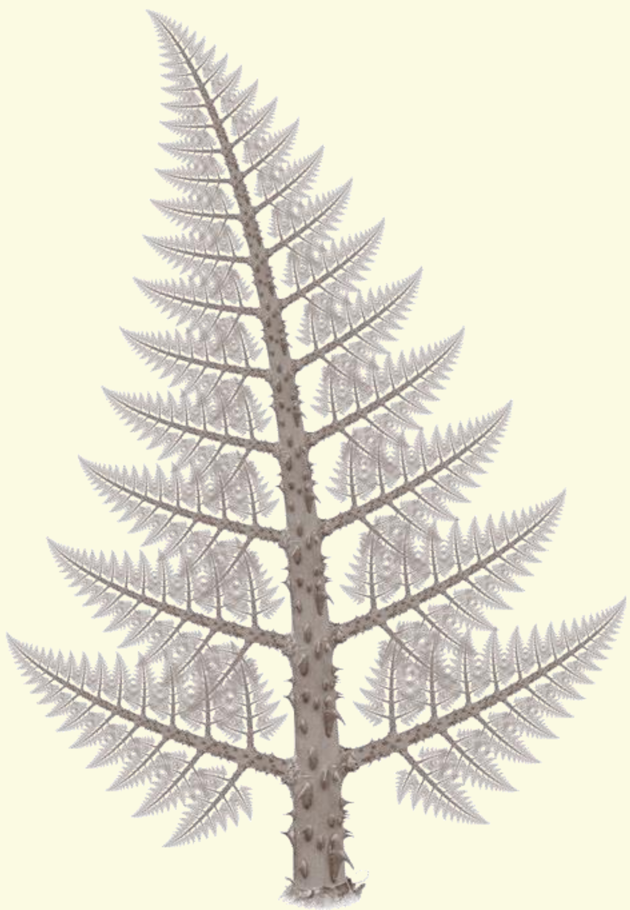
$$\begin{cases} x_1(t)=q(t) \\ x_2(t)=\dfrac{dq}{dt} \\ x_3(t)=t \end{cases}$$

$$\Rightarrow \dot{x}_1=x_2$$

$$\Rightarrow \dot{x}_3=1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1=x_2 \\ \dot{x}_2=-x_2\,\gamma(x_1)-x_1+g\,sin\omega x_3 \\ \dot{x}_3=1 \end{cases}$$

فهرست مطالب



نقاط ثابت:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, x_3) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, x_3) \\ \dot{x}_3 = f_3(x_1, x_2, x_3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 0 \\ \dot{x}_2 = 0 \\ \dot{x}_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_1(x_1, x_2, x_3) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, x_3) = 0 \\ f_3(x_1, x_2, x_3) = 0 \end{cases}$$

توجه داشته باشید که سیستم‌های دو بعدی غیرخودمختار که به صورت سیستم سه بعدی خودمختار بازنویسی شده است فاقد نقطه ثابت است.

یادآوری : $\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, x_3) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, x_3) \\ \dot{x}_3 = 1 \end{cases}$

ماتریس ژاکوبین:

ماتریس ژاکوبین : $J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}$ ⇨ $J = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{bmatrix}$

با محاسبه‌ی ماتریس ژاکوبین در هر نقطه‌ی ثابت، می‌توان سه مقدار مشخصه‌ی متناظر را تعیین و رفتار نقطه‌ی ثابت را مشخص نمود.

معادله مشخصه : $|J - \lambda I| = 0$

معادله‌ی مشخصه، یک معادله‌ی جبری درجه ۳ است که ریشه‌های آن نشانگر مقادیر مشخصه می‌باشند:

معادله مشخصه : $\lambda^3 + p\lambda^2 + q\lambda + r = 0$

❖ بازنویسی معادله مشخصه:

$$\lambda^3 + p\lambda^2 + q\lambda + r = 0$$

$$\begin{cases} x = \lambda + p/3 \\ a = \dfrac{1}{3}(3q - p^2) \\ b = \dfrac{1}{27}(2p^3 - 9pq + 27r) \end{cases} \Rightarrow \quad x^3 + ax + b = 0$$

وارسی!

$$x^3 + ax + b = 0$$

$$\Rightarrow (\lambda + p/3)^3 + \left(\frac{1}{3}(3q - p^2)\right)(\lambda + p/3) + \left(\frac{1}{27}(2p^3 - 9pq + 27r)\right) = 0$$

$$\left(\lambda^3 + p\lambda^2 + \frac{1}{3}p^2\lambda + \frac{1}{27}p^3\right) + \left(q\lambda + \frac{1}{3}pq - \frac{1}{3}p^2\lambda - \frac{1}{9}p^3\right) + \left(\frac{2}{27}p^3 - \frac{1}{3}pq + r\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lambda^3 + p\lambda^2 + q\lambda + r = 0$$

❖ مقادیر مشخصه:

$$x^3 + ax + b = 0$$

$$s = \left(\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}\right)$$

$$A = \left(-\frac{b}{2} + \sqrt{s}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$B = \left(-\frac{b}{2} - \sqrt{s}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = A + B \\ \lambda_2 = -\left(\frac{A+B}{2}\right) + \left(\frac{A-B}{2}\right)\sqrt{-3} \\ \lambda_3 = -\left(\frac{A+B}{2}\right) - \left(\frac{A-B}{2}\right)\sqrt{-3} \end{cases}$$

حالت‌های مختلف مقادیر مشخصه:

۱- هر سه مقدار مشخصه حقیقی و غیرمساوی

۲- هر سه مقدار مشخصه حقیقی و حداقل دو مقدار مساوی هم

۳- یکی از مقادیر مشخصه حقیقی و دو مقدار دیگر مزدوج مختلط

❖ شاخص (index) نقاط ثابت:

برای فضای حالت سه بعدی و بیشتر، معمولا شاخص نقطه‌ی ثابت (index of fixed point) تعیین می‌گردد. شاخص نقطه‌ی ثابت، تعداد مقادیر مشخصه‌ی نقطه‌ی ثابت که دارای مقدار حقیقی مثبت هستند تعریف می‌گردد.

> The *index* of a fixed point is defined to be the number of characteristic values of that fixed point whose real parts are positive.

از دیدگاه مهندسی، شاخص نقطه‌ی ثابت برابر با بعد فضایی out-set نقطه‌ی ثابت است.

از این رو، node دارای شاخص صفر و repellor دارای شاخص ۳ است.

❖ انواع نقاط ثابت در فضای حالت سه بعدی:

1 - node

1s- spiral node

2 - repellor

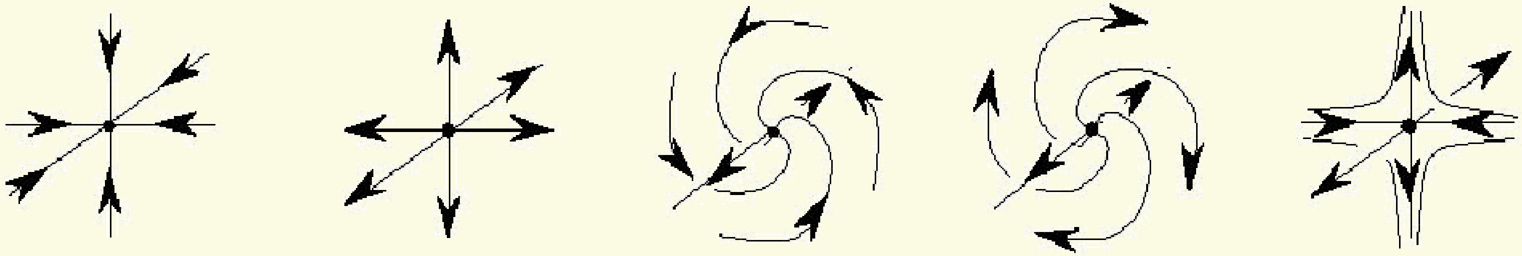
2s- spiral repellor

3 - saddle point – index 1

3s- spiral saddle point – index 1

4 - saddle point – index 2

4s- spiral saddle point – index 2



❖ انواع نقاط ثابت در فضای حالت سه بعدی:

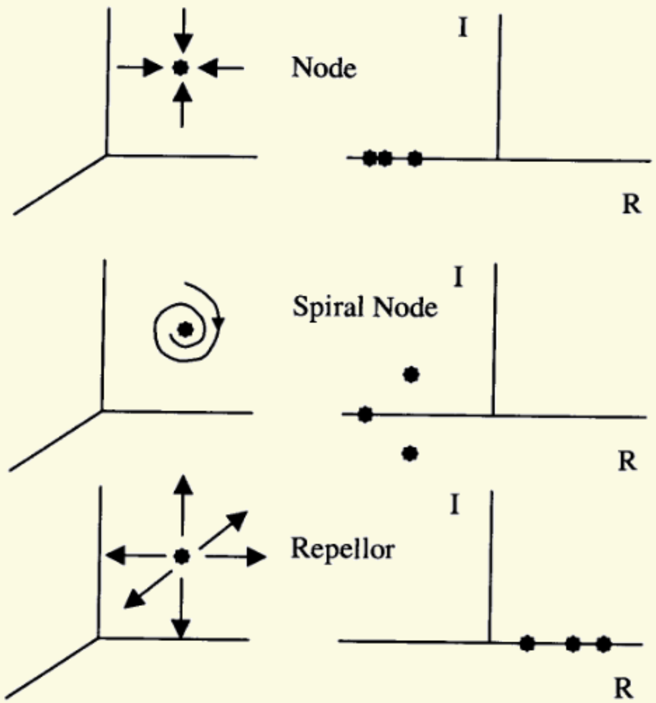


Fig. 4.2. On the left, sketches of trajectories for fixed points in a three-dimensional state space. The location of the fixed point is indicated by the asterisk. On the right, the characteristic values for the fixed points are indicated in the complex plane. The imaginary part is plotted on the vertical axis; the real part on the horizontal axis.

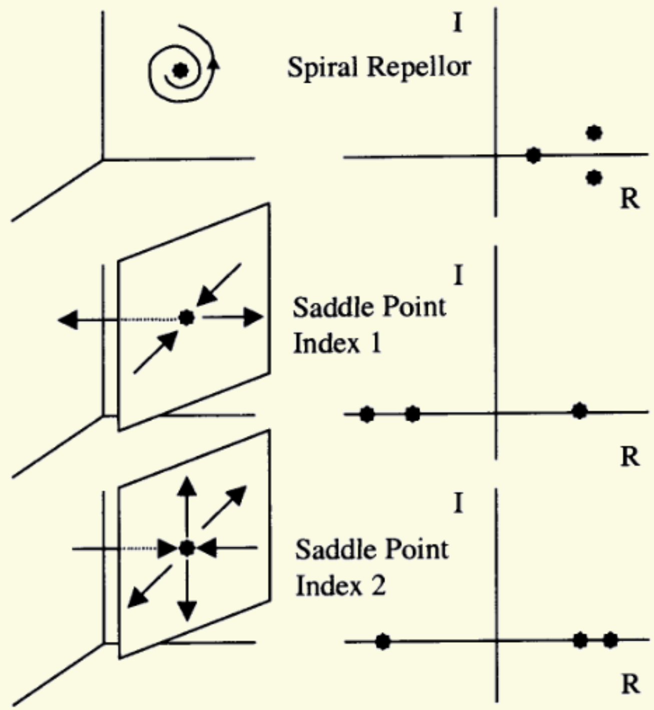
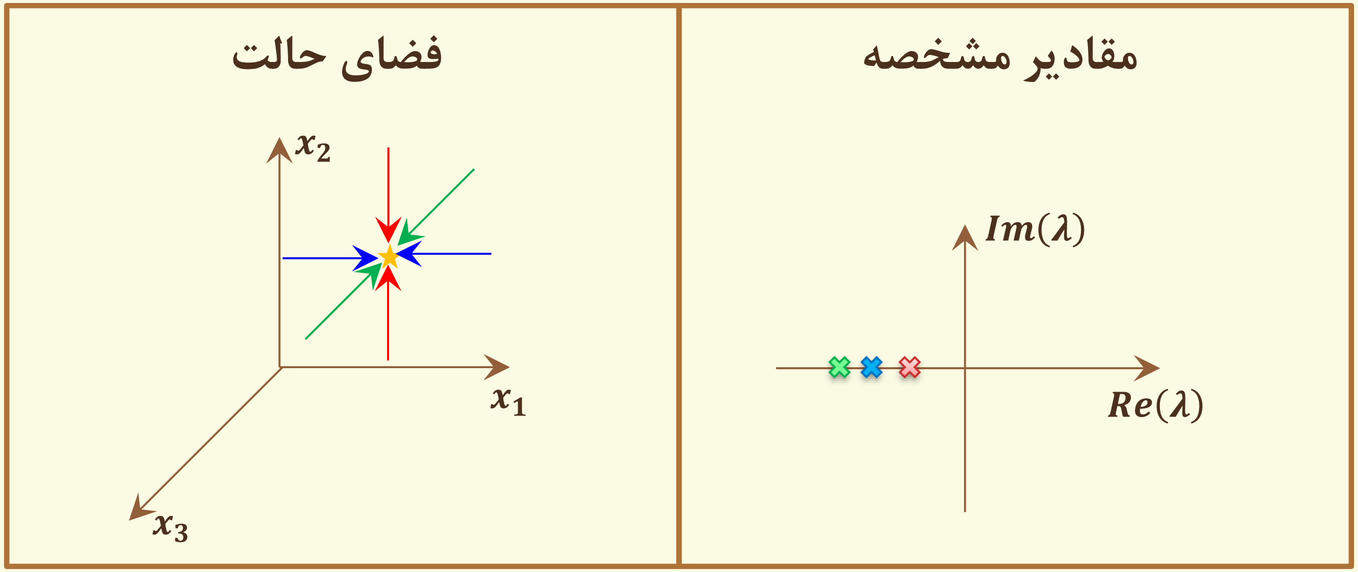


Fig. 4.3. More sketches of trajectories for fixed points in a three-dimensional state space. Not shown are possible spiral versions of the two types of saddle points. On the right, the characteristic values for the fixed points are indicated in the complex plane. For a spiral index-1 saddle point, trajectories spiral toward the fixed point on the in-set surface. For a spiral index-2 saddle point, the trajectories spiral away from the fixed point on the out-set surface.

❖ Node:

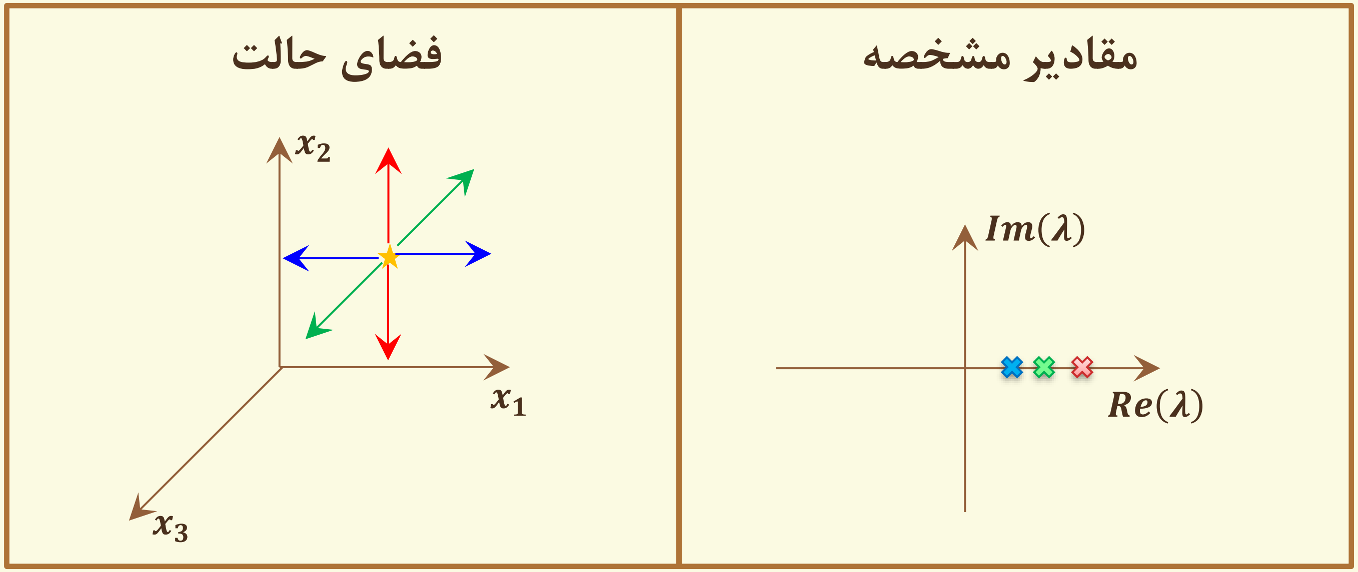
❖ تمامی مقادیر مشخصه حقیقی و منفی هستند.

❖ تمام تراژکتوری‌های نزدیک نقطه‌ی ثابت، مستقیما و بدون گردش به دور آن، به سمت آن جذب می‌شوند.



❖ Repellor:

- تمامی مقادیر مشخصه حقیقی و مثبت هستند.
- تمام تراژکتوری‌های نزدیک نقطه‌ی ثابت، مستقیما و بدون گردش به دور آن، از آن دور می‌شوند.



فهرست مطالب

- ☑ مقدمه و مفاهیم
- ☑ سیستم‌های دینامیک سه‌بعدی
- ☑ نقاط ثابت
- ☐ سیکل حدی و قطع پوانکاره
- ☐ رفتار شبه‌تناوبی
- ☐ مسیرهای منتهی به آشوب
- ☐ نمای لیاپانوف