

سری اول تمرین‌های درس آشوب

برای تمرین‌های نرم‌افزاری این سری می‌توانید از پیوست "Appendix E: Computer Programs" کتاب مرجع درس به عنوان راهنمایی استفاده کنید. تمرین‌ها را با نرم‌افزار MATLAB حل کنید.

۱- برنامه‌ای جهت محاسبه و ترسیم نقاط تراژکتوری Logistic Map بنویسید. این برنامه باید مقدار پارامتر A ، مقدار اولیه x_0 و تعداد تکرارهای مورد نظر کاربر را گرفته و بر اساس آن، تراژکتوری‌های مربوطه را تعیین و ترسیم کند. نتایج حاصل به ازای مقادیر 0.5 ، 2 ، $3/2$ ، $3/5$ و $3/7$ برای پارامتر A و چند مقدار اولیه x_0 دلخواه را گزارش نمایید.

۲- الف: برنامه‌ای برای بررسی واگرایی تراژکتوری‌های نزدیک به هم بنویسید.

ب: به این منظور، برای مقدار پارامتر $A = 3.7$ ، با انتخاب دو مقدار اولیه با اختلاف ناچیز و ترسیم نقاط تراژکتوری Logistic Map با دو رنگ متفاوت در یک ترسیمه، «واگرایی تراژکتوری‌های نزدیک به هم» (divergence of nearby trajectories) را نشان دهید.

ج: برای مقادیر $3/5$ ، $3/2$ و 2 برای پارامتر A نیز نتایج متناظر را به دست آورده و تحلیل کنید.

۳- الف: برنامه‌ای جهت ترسیم نمودار دو شاخه شدن (bifurcation diagram) برای Logistic Map بنویسید. این برنامه باید محدوده‌ی مورد نظر کاربر برای پارامتر A را گرفته و نمودار دو شاخه شدن را برای آن محدوده تعیین و ترسیم کند.

ب: نتایج حاصل برای محدوده‌های $[0 \ 4]$ و $[3.2 \ 3.7]$ پارامتر A را گزارش نمایید و در ترسیمه‌های به دست آمده، دو شاخه شدن (period-doubling bifurcation)، نواحی آشوبناک و پنجره‌های متناوب (periodic window) را مشخص نمایید.

ج: آیا با تنظیم مناسب محدوده‌ی ترسیمه‌ی نمودار دو شاخه شدن (با استفاده از دستور axis در نرم‌افزار MATLAB) می‌توانید خودهمانندی (self-similarity) را در نمودار دو شاخه شدن نشان دهید؟

۴- الف: برنامه‌ای برای نمایش تکرارهای ترسیمی Logistic Map بنویسید که دارای ویژگی‌های زیر باشد.

- از کاربر مقدار مورد نظر برای پارامتر A و مقدار اولیه x_0 را بگیرد.
- برای پارامترهای تعیین شده، تابع نگاشت و خط $x_{n+1} = x_n$ را در فضای $[0 \ 1] \times [0 \ 1]$ رسم کند.
- سپس با هر بار فشردن کلید، یک مرحله از تکرارهای ترسیمی (یک پاره‌خط افقی و یک پاره‌خط عمودی) را بر روی ترسیمه‌ی موجود رسم نماید.

ب: نتایج حاصل به ازای مقادیر ۰/۵، ۲، ۳/۲، ۳/۵ و ۳/۷ برای پارامتر A و چند مقدار اولیه x_0 دلخواه را گزارش نمایید.

ج (امتیازی): رابط گرافیکی کاربری (GUI) برای این برنامه بنویسید به نحوی که دارای فضای نمایش نتیجه، فیلدهایی برای دریافت مقادیر A و x_0 ، و دکمه‌هایی برای Exit، Restart، Next Step و Auto Step باشد.

۵- همان‌طور که می‌دانید مدل Lorenz با معادلات زیر توصیف می‌گردد.

$$\begin{cases} \dot{X} = p(Y - X) \\ \dot{Y} = -XZ + rX - Y \\ \dot{Z} = XY - bZ \end{cases}$$

الف: نقاط ثابت مدل Lorenz را به دست آورید.

ب: برنامه‌ای برای شبیه‌سازی مدل Lorenz بنویسید تا به ازای مقادیر پارامتر و شرایط اولیه‌ی داده شده، تراژکتوری‌های زمانی و صفحه‌ی فاز را به همراه نقاط ثابت رسم کند.

ج: به ازای مقادیر پارامتر $r = 20$ ، $b = \frac{8}{3}$ ، $p = 10$ ، و به ازای نقاط اولیه‌ی دلخواه، تراژکتوری‌های حاصل از تحلیل را به همراه نقاط ثابت محاسبه شده در یک ترسیمه رسم کنید. نتایج را تحلیل کنید.

د: موارد بند «ب» را برای نقاط اولیه‌ی نزدیک مبدا بررسی کنید.

ه: با واریسی نتایج به ازای مقادیر مختلف پارامتر r، دو برابر شدن تناوب (period doubling) را در مدل Lorenz نشان دهید.

۶- برنامه‌ای برای محاسبه‌ی اعداد Feigenbaum بنویسید. برنامه باید مقادیر پارامتر ابردوره (supercycle) را برای Logistic Map محاسبه کند. پارامتر ابردوره (A^n_s) مقادیری از پارامتر A است که تراژکتوری جاذب تکرار خاصی (n) از تابع نگاشت شامل مقدار $x_{max} = 0.5$ است. برنامه باید این مقادیر پارامتر را برای period-2، period-4، period-8 و period-16 یافته و سپس مقادیر δ و α ی feigenbaum را محاسبه کند.

