

پردازش سیگنال دیجیتال

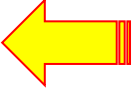
فصل دوم: فرکانس و سیگنال مادر حوزه گسسته

اهداف فصل:

هدف این فصل، درک مفهوم فرکانس در سیگنال زمان گسسته است. بدین منظور، ابتدا مفهوم فرکانس در سیگنال زمان پیوسته و مفهوم نمونه برداری یادآوری می گردد.



عناوین بحث:

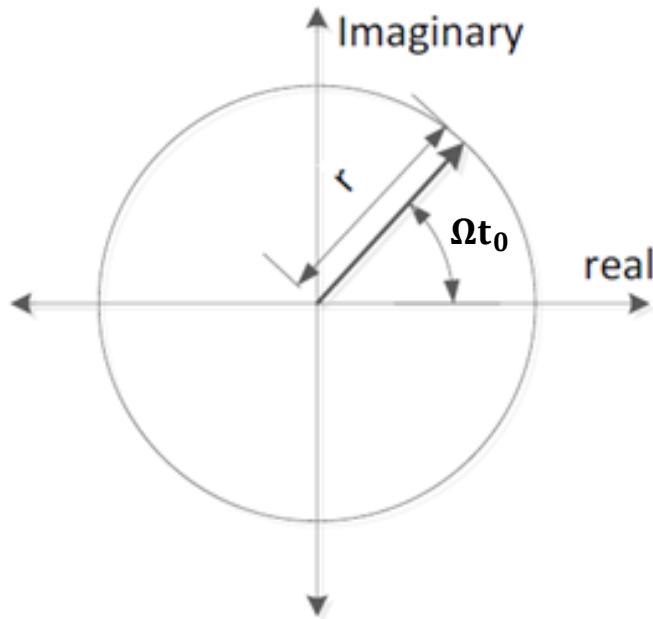
- سیگنال‌های سینوسی پیوسته 
- نمونه‌برداری
- بازنمایی سیگنال
- فرکانس در سیگنال زمان گسسته
- مثال‌های مروری

سیگنال تک فرکانس زمان پیوسته:

$$x(t) = re^{j\Omega t}$$

r : شعاع دوران

Ωt : زاویه رادیان



با افزایش t ، $x(t)$ روی دایره‌ای به شعاع r در صفحه مختلط جابجا می‌شود و در هر ثانیه، فاز آن به اندازه Ω رادیان تغییر می‌کند.

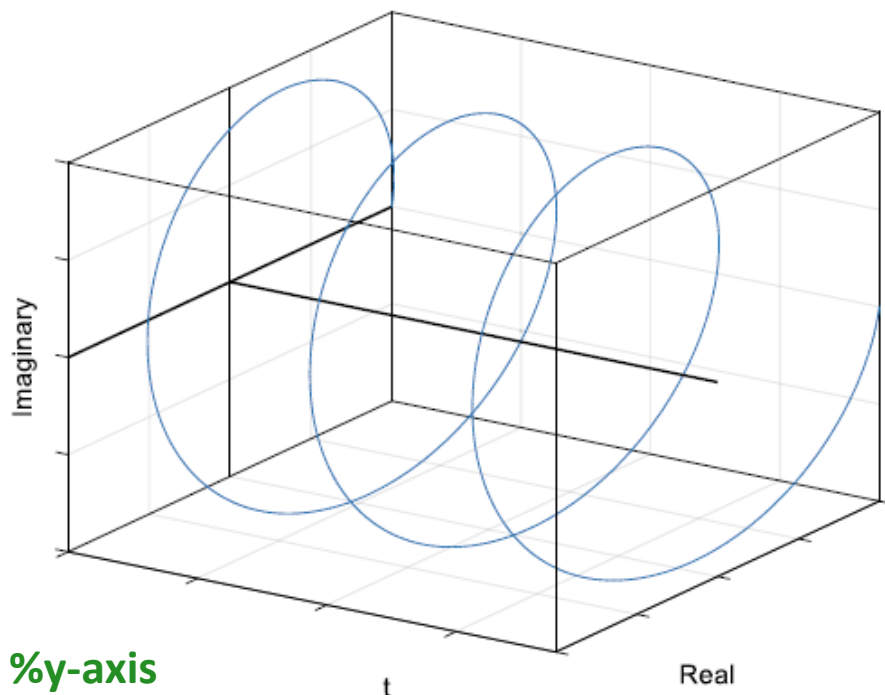
$$\Omega = 2\pi f \quad \Rightarrow \quad f = \frac{\Omega}{2\pi}$$

با واحد دور بر ثانیه یا هرتز

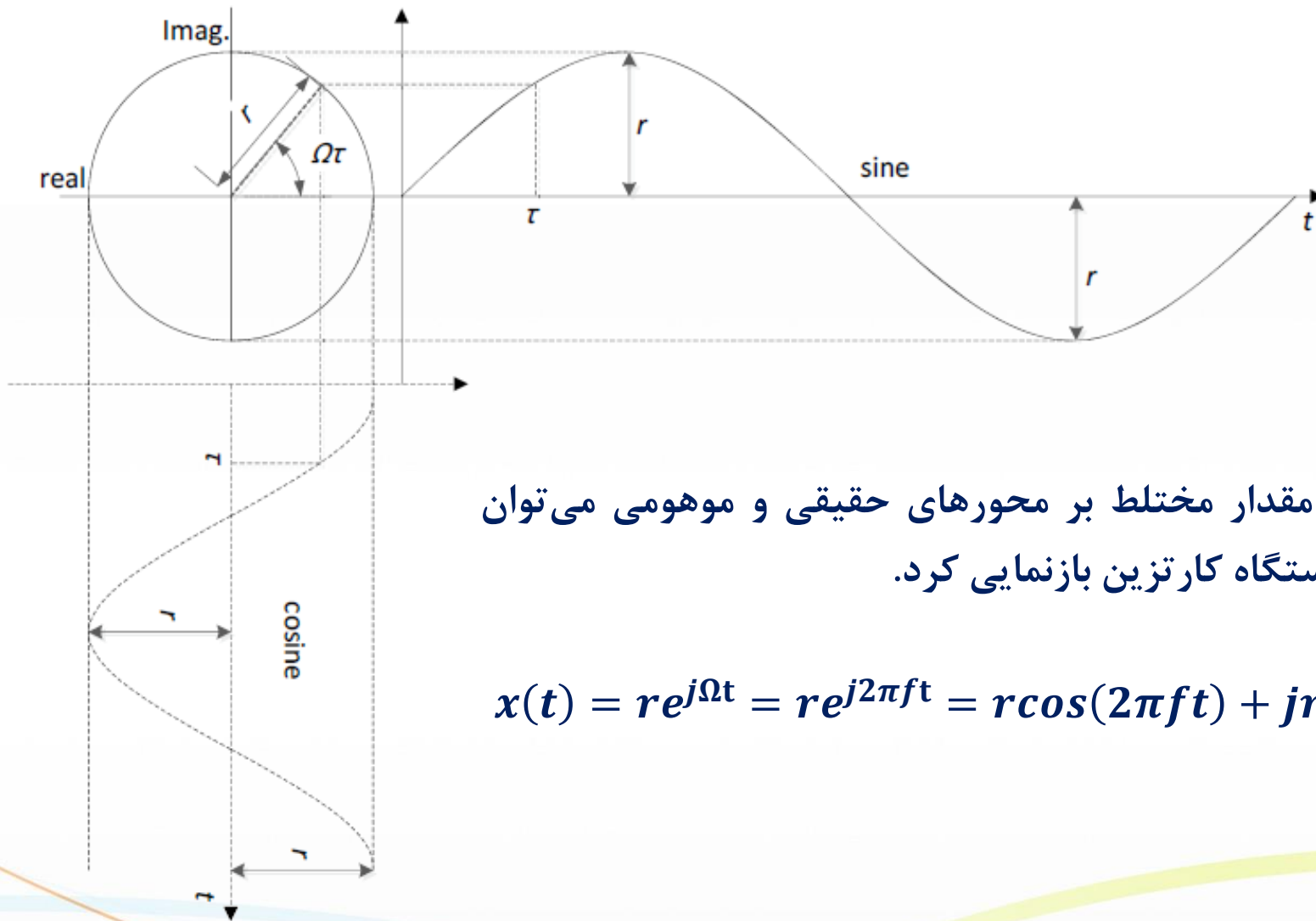
ترسیم سه بعدی سیگنال نمایشی مختلط:

سیگنال نمایشی مختلط $x(t) = re^{j\Omega t}$ را بر حسب زمان رسم کنید.

```
xt = @(t) t;  
yt = @(t) cos(t);  
zt = @(t) sin(t);  
fplot3(xt,yt,zt,[0 6*pi]); %3-D plot  
xL = xlim;  
yL = ylim;  
zL = zlim;  
line([0 0], yL, [0 0], 'LineWidth',1, 'Color', 'black'); %y-axis  
line(xL, [0 0], [0 0], 'LineWidth',1, 'Color', 'black'); %x-axis  
line([0 0], [0 0], zL, 'LineWidth',1, 'Color', 'black'); %z-axis  
...
```



بازنمایی سیگنال نمایی مختلط در دستگاه کارتزین:



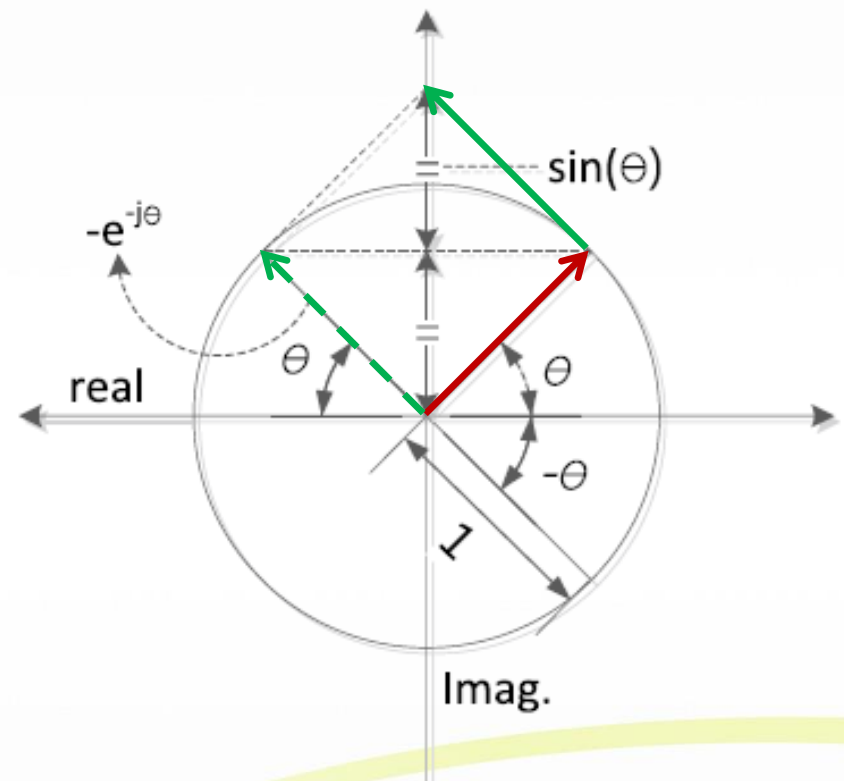
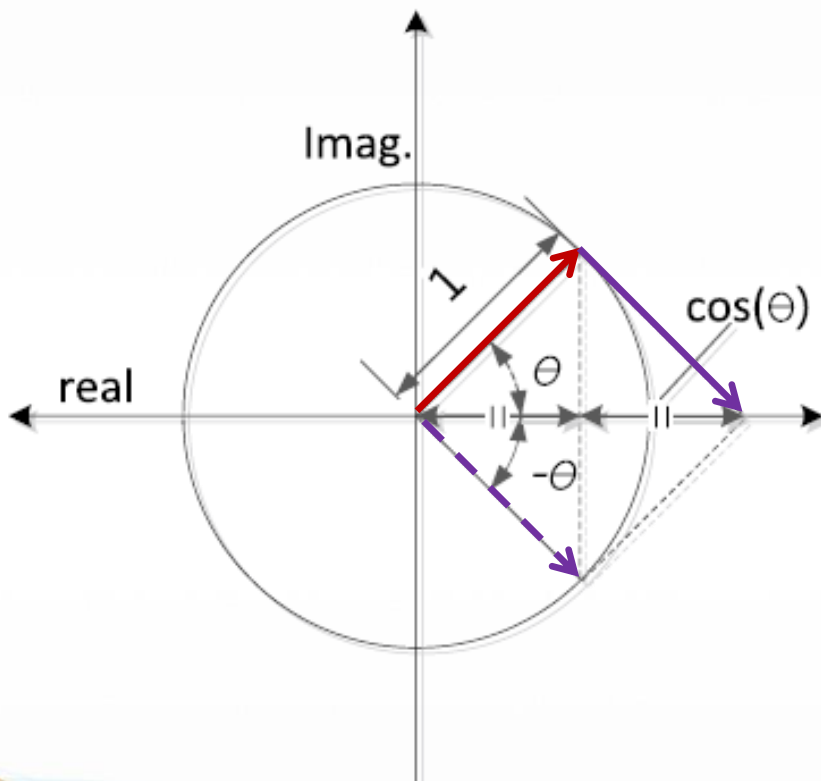
با تصویر کردن مقدار مختلط بر محورهای حقیقی و موهومی می‌توان سیگنال را در دستگاه کارتزین بازنمایی کرد.

$$x(t) = re^{j\Omega t} = re^{j2\pi ft} = r\cos(2\pi ft) + jr\sin(2\pi ft)$$

رابطه اولر و بازنمایی ترسیمی آن:

$$\cos(\theta) = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$$

$$\sin(\theta) = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$$



مولفه‌های فرکانسی سینوس و کسینوس:

با استفاده از فرمول اولر، مولفه‌های فرکانسی $r\cos(\Omega t)$ و $r\sin(\Omega t)$ را تعیین کنید.

$$r\cos(\Omega t) = r \cdot \frac{1}{2} (e^{j\Omega t} + e^{-j\Omega t}) = \frac{r}{2} e^{j\Omega t} + \frac{r}{2} e^{-j\Omega t}$$

$$r\sin(\Omega t) = r \cdot \frac{1}{2j} (e^{j\Omega t} - e^{-j\Omega t}) = \frac{r}{2j} e^{j\Omega t} - \frac{r}{2j} e^{-j\Omega t}$$

این بدان معنا است که سینوس و کسینوس حاوی مولفه‌های فرکانسی Ω و $-\Omega$ است.

تجزیه کسینوسی دارای فاز به سینوس و کسینوس بدون فاز:

نشان دهید کسینوسی دارای فاز را می‌توان به ترکیب خطی سینوس و کسینوس بدون فاز تجزیه کرد.

$$\cos(\Omega t + \theta) = \cos(\theta)\cos(\Omega t) - \sin(\theta)\sin(\Omega t)$$

حل:

$$\cos(\Omega t + \theta) = \operatorname{Re}\{e^{j(\Omega t + \theta)}\} = \operatorname{Re}\{e^{j\theta}e^{j\Omega t}\}$$

$$= \operatorname{Re}\{[\cos(\theta) + j\sin(\theta)][\cos(\Omega t) + j\sin(\Omega t)]\}$$

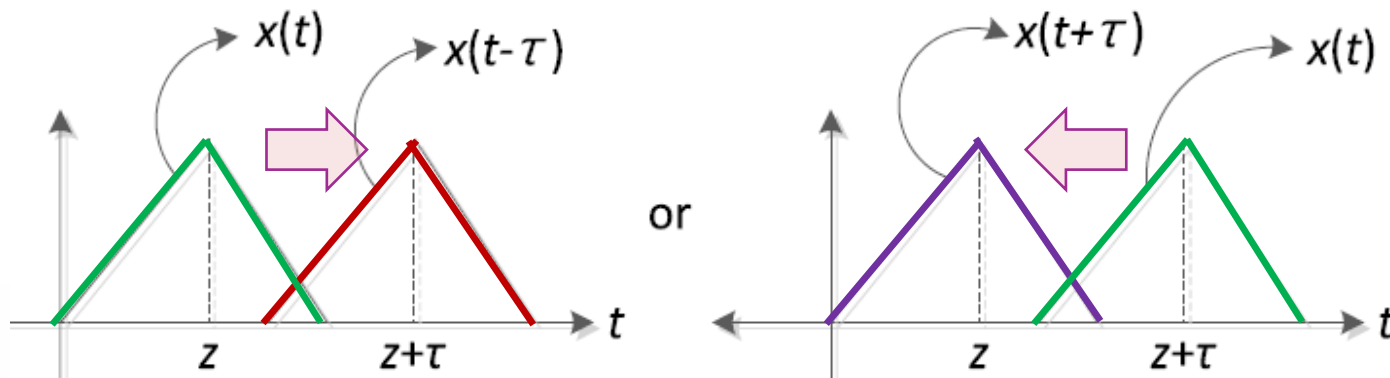
$$= \operatorname{Re}\{\cos(\theta)\cos(\Omega t) + j\cos(\theta)\sin(\Omega t) + j\sin(\theta)\cos(\Omega t) - \sin(\theta)\sin(\Omega t)\}$$

$$= \cos(\theta)\cos(\Omega t) - \sin(\theta)\sin(\Omega t)$$

$$\Rightarrow \cos(\Omega t + \theta) = \cos(\theta)\cos(\Omega t) - \sin(\theta)\sin(\Omega t)$$

یادآوری جابجایی زمانی سیگنال

اگر مقدار مثبت τ به متغیر مستقل سیگنال (زمان t) افزوده یا از آن کاسته شود سیگنال به همان اندازه به ترتیب به سمت چپ یا راست جابجا می‌گردد.



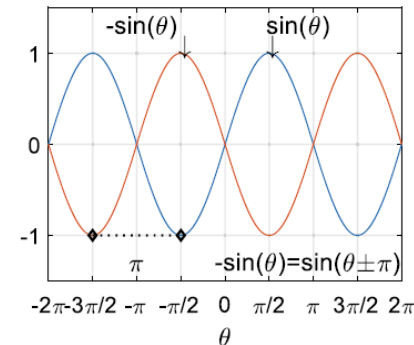
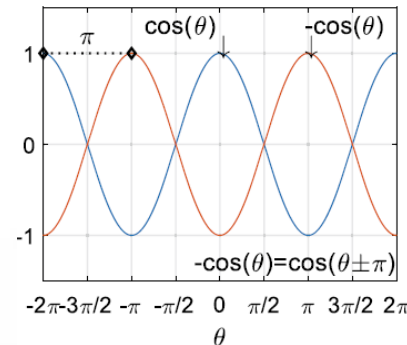
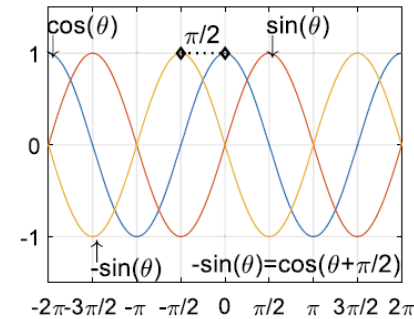
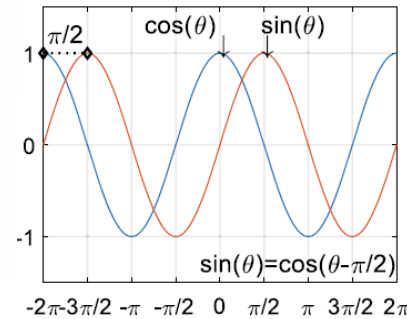
بازنمایی ترسیمی چند معادل مثلثاتی:

```
ome = -2*pi:pi/100:2*pi;  
x1 = cos(ome);  
x2 = sin(ome);  
str = {'-2\pi', '-3\pi/2', '-\pi', '-\pi/2', '0', '\pi/2', '\pi', '3\pi/2', '2\pi'};
```

```
figure,  
subplot(221), plot(ome,x1,ome,x2), grid  
xticks([-2*pi -3*pi/2 -pi -pi/2 0 pi/2 pi 3*pi/2 2*pi])  
xticklabels(str);  
xlim([-2*pi 2*pi])  
ylim([-1.5 1.5])
```

```
subplot(222), plot(ome,x1,ome,x2,ome,-x2), grid  
xticks([-2*pi -3*pi/2 -pi -pi/2 0 pi/2 pi 3*pi/2 2*pi])  
xticklabels(str);  
xlim([-2*pi 2*pi])  
ylim([-1.5 1.5])
```

ادامه دارد

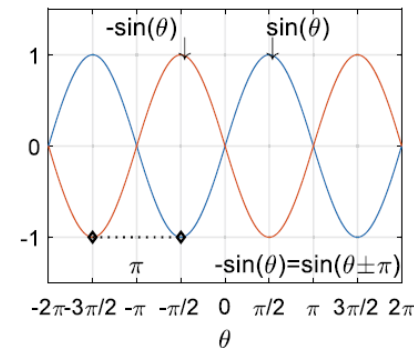
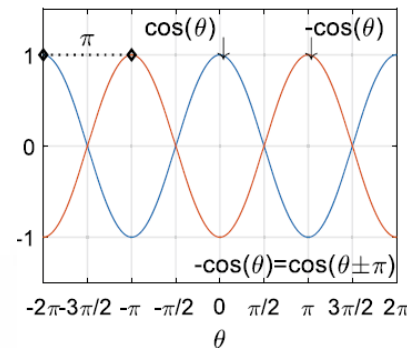
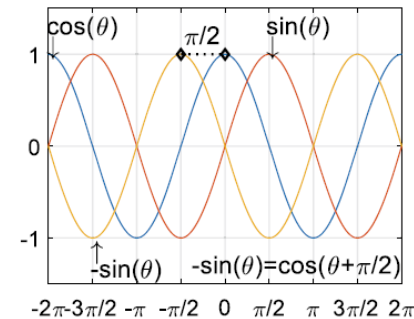
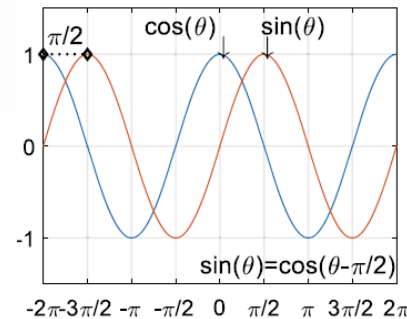


بازنمایی ترسیمی چند معادل مثلثاتی:

ادامه:

```
subplot(223), plot(ome,x1,ome,-x1), grid  
xticks([-2*pi -3*pi/2 -pi -pi/2 0 pi/2 pi 3*pi/2 2*pi])  
xticklabels(str);  
xlim([-2*pi 2*pi])  
ylim([-1.5 1.5])  
xlabel('\theta')
```

```
subplot(224), plot(ome,x2,ome,-x2), grid  
xticks([-2*pi -3*pi/2 -pi -pi/2 0 pi/2 pi 3*pi/2 2*pi])  
xticklabels(str);  
xlim([-2*pi 2*pi])  
ylim([-1.5 1.5])  
xlabel('\theta')
```



مثال:

مفهوم رابطه زیر چیست؟

$$A \cos(\Omega t + \theta) = A \cos(\theta) \cos(\Omega t) - A \sin(\theta) \sin(\Omega t)$$

حل:

ترکیب خطی $\cos(\Omega t)$ و $\sin(\Omega t)$ وزن دار می تواند تابع کسینوسی با همان فرکانس و هر دامنه و فاز دلخواهی را فراهم سازد. وزن ها $(A \cos(\theta))$ و $(-A \sin(\theta))$ بر اساس دامنه (A) و فاز (θ) سیگنال تعیین می گردند.



$\cos(\Omega t)$ سیگنالی زوج و $\sin(\Omega t)$ سیگنالی فرد است. بنابراین رابطه داده شده نشانگر تجزیه سیگنال $A \cos(\Omega t + \theta)$ (که لزوماً سیگنال زوج یا فرد نیست) به بخش های زوج و فرد است.



$$A \cos(\Omega t + \theta) = A \cos(\theta) \cos(\Omega t) - A \sin(\theta) \sin(\Omega t)$$

بخش زوج سیگنال

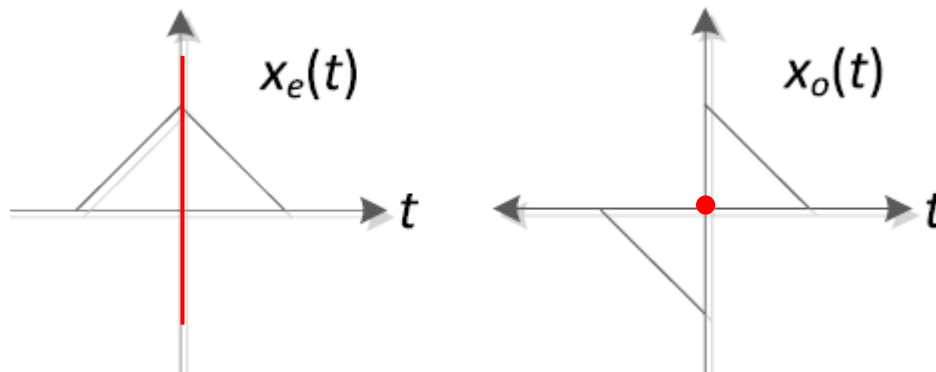
بخش فرد سیگنال

یادآوری سیگنال‌های زوج و فرد:

تعریف سیگنال زوج : $x_e(t) = x_e(-t)$

تعریف سیگنال فرد : $x_o(t) = -x_o(-t)$

سیگنال زوج نسبت به محور y متقارن است و سیگنال فرد نسبت به مبدأ دستگاه مختصات متقارن است.



یادآوری تجزیه سیگنال به بخش‌های زوج و فرد:

هر سیگنال دلخواهی را می‌توان به اجزای زوج و فرد تجزیه کرد.

$$x(t) = x_e(t) + x_o(t)$$

بخش زوج سیگنال
بخش فرد سیگنال

$$x_e(t) = \frac{1}{2} \{x(t) + x(-t)\}$$

$$x_o(t) = \frac{1}{2} \{x(t) - x(-t)\}$$

مثال:

بخش‌های زوج و فرد سیگنال $A \cos(\Omega t + \theta)$ را به دست آورید.

حل به روش اول:

با توجه به رابطه $A \cos(\Omega t + \theta) = A \cos(\theta) \cos(\Omega t) - A \sin(\theta) \sin(\Omega t)$

و علم به زوج بودن $\cos(\Omega t)$ و فرد بودن $\sin(\Omega t)$ داریم:

بخش زوج سیگنال: $x_e(t) = A \cos(\theta) \cos(\Omega t)$

بخش فرد سیگنال: $x_o(t) = -A \sin(\theta) \sin(\Omega t)$

حل به روش دوم:

$$x_e(t) = \frac{1}{2} \{x(t) + x(-t)\} = \frac{1}{2} \{A \cos(\Omega t + \theta) + A \cos(-\Omega t + \theta)\}$$

$$= \frac{A}{4} \{e^{j(\Omega t + \theta)} + e^{-j(\Omega t + \theta)} + e^{j(-\Omega t + \theta)} + e^{-j(-\Omega t + \theta)}\}$$

$$= \frac{A}{4} \{e^{j\Omega t} e^{j\theta} + e^{-j\Omega t} e^{-j\theta} + e^{-j\Omega t} e^{j\theta} + e^{j\Omega t} e^{-j\theta}\}$$

$$= \frac{A}{4} \{e^{j\Omega t} (e^{j\theta} + e^{-j\theta}) + e^{-j\Omega t} (e^{j\theta} + e^{-j\theta})\}$$

$$= \frac{A}{2} \cos(\theta) \{e^{j\Omega t} + e^{-j\Omega t}\} = A \cos(\theta) \cos(\Omega t)$$

مثال:

بخش‌های زوج و فرد سیگنال $A \cos(\Omega t + \theta)$ را به دست آورید.

ادامه حل به روش دوم:

$$\begin{aligned}x_o(t) &= \frac{1}{2} \{x(t) - x(-t)\} = \frac{1}{2} \{A \cos(\Omega t + \theta) - A \cos(-\Omega t + \theta)\} \\&= \frac{A}{4} \{e^{j(\Omega t + \theta)} + e^{-j(\Omega t + \theta)} - e^{j(-\Omega t + \theta)} - e^{-j(-\Omega t + \theta)}\} \\&= \frac{A}{4} \{e^{j\Omega t} e^{j\theta} + e^{-j\Omega t} e^{-j\theta} - e^{-j\Omega t} e^{j\theta} - e^{j\Omega t} e^{-j\theta}\} \\&= \frac{-A}{4j^2} \{e^{j\Omega t} (e^{j\theta} - e^{-j\theta}) - e^{-j\Omega t} (e^{j\theta} - e^{-j\theta})\} \\&= \frac{-A}{2j} \sin(\theta) \{e^{j\Omega t} - e^{-j\Omega t}\} = -A \sin(\theta) \sin(\Omega t)\end{aligned}$$

استفاده از فازور برای ترکیب چند سینوسی هم‌فرکانس:

اگر چند سینوسی هم‌فرکانس داشته باشیم می‌توان آنها را با هم ترکیب کرد و با یک سینوسی با همان فرکانس بازنمایی نمود. این کار را با بهره بردن از مفهوم فازور به سادگی انجام داد.

فازور نشانگر بردار استاتیک سیگنال سینوسی است یعنی:

$$\text{Phasor}\{A \cos(\Omega t + \theta)\} = A e^{j\omega t}$$

برای جمع کردن دو سیگنال سینوسی هم‌فرکانس، لازم است فازور آنها را با هم جمع کنیم و بر اساس فازور حاصل، سیگنال سینوسی حاصل را بنویسیم.

پشتوانه استفاده از فازور برای جمع کردن دو سینوسی:

$$\begin{aligned} A_1 \cos(\Omega t + \theta_1) + A_2 \cos(\Omega t + \theta_2) &= \text{Re}\{A_1 e^{j(\Omega t + \theta_1)}\} + \text{Re}\{A_2 e^{j(\Omega t + \theta_2)}\} \\ &= \text{Re}\{A_1 e^{j\Omega t} e^{j\theta_1} + A_2 e^{j\Omega t} e^{j\theta_2}\} = \text{Re}\{e^{j\Omega t} (A_1 e^{j\theta_1} + A_2 e^{j\theta_2})\} \end{aligned}$$

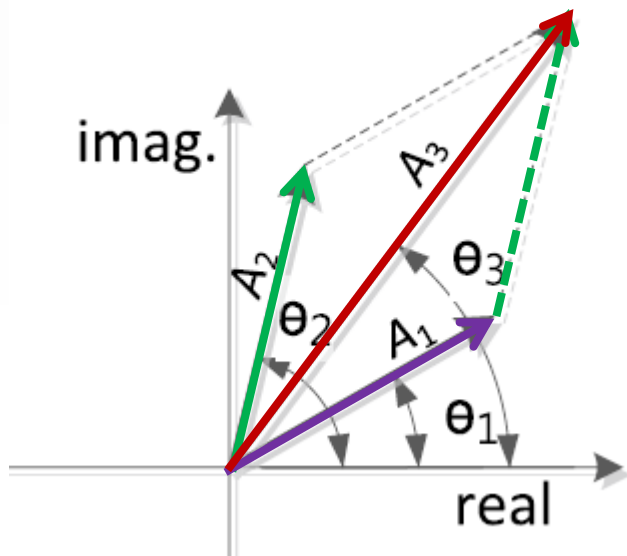
اگر مجموع دو مقدار مختلط را به صورت یک مقدار مختلط
بنویسیم، یعنی: $A_1 e^{j\theta_1} + A_2 e^{j\theta_2} = A_3 e^{j\theta_3}$

$$= \text{Re}\{e^{j\Omega t} (A_3 e^{j\theta_3})\} = \text{Re}\{A_3 e^{j(\Omega t + \theta_3)}\} = A_3 \cos(\Omega t + \theta_3)$$

بنابراین، برای جمع کردن دو سیگنال سینوسی هم‌فرکانس، لازم است فازور آنها را با هم جمع کنیم و بر اساس فازور حاصل، سیگنال سینوسی حاصل را بنویسیم.

روش جمع کردن فازورها به شیوه ترسیمی با جمع بردارها:

برای جمع کردن فازورها که مقادیری مختلط هستند می توان از جمع برداری آنها در مختصات قطبی بهره برد.



$$A_1 e^{j\theta_1} + A_2 e^{j\theta_2} = A_3 e^{j\theta_3}$$

مثال:

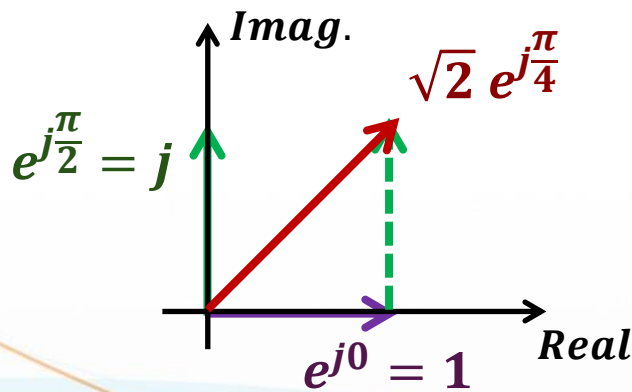
حاصل جمع عبارت $\cos(\Omega t) + \sin(\Omega t + \pi)$ را به فرم یک سیگنال کسینوسی بنویسید.

حل: چون یکی از سینوس و دیگری کسینوس است ابتدا هر دو را به فرم کسینوس می‌نویسیم:

$$\begin{aligned}\cos(\Omega t) + \sin(\Omega t + \pi) &= \cos(\Omega t) + \sin\left(\Omega t + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \cos(\Omega t) + \cos\left(\Omega t + \frac{\pi}{2}\right)\end{aligned}$$

با بهره‌گیری از فازور داریم:

$$\text{Phasor}\{\cos(\Omega t)\} + \text{Phasor}\left\{\cos\left(\Omega t + \frac{\pi}{2}\right)\right\} = e^{j0} + e^{j\frac{\pi}{2}} = 1 + j = \sqrt{2} e^{j\frac{\pi}{4}}$$



$$\Rightarrow \cos(\Omega t) + \sin(\Omega t + \pi) = \sqrt{2} \cos\left(\Omega t + \frac{\pi}{4}\right)$$

بازنمایی هر سیگنال دلخواه با ترکیب خطی پیوسته سینوسی:

ترکیب خطی پیوسته از سینوسی‌ها می‌تواند هر سیگنال دلخواهی را بازنمایی کند:

$$\begin{aligned}x(t) &= \int_0^{+\infty} m(\Omega) \cos(\Omega t + \theta(\Omega)) d\Omega, \quad \Omega \in R \\&= \int_0^{+\infty} m(\Omega) [\cos(\theta(\Omega)) \cos(\Omega t) - \sin(\theta(\Omega)) \sin(\Omega t)] d\Omega \\&= \int_0^{+\infty} m(\Omega) \left[\cos(\theta(\Omega)) \frac{1}{2} (e^{j\Omega t} + e^{-j\Omega t}) - \sin(\theta(\Omega)) \frac{-j}{2} (e^{j\Omega t} - e^{-j\Omega t}) \right] d\Omega \\&= \int_0^{+\infty} m(\Omega) \left[\frac{\cos(\theta(\Omega)) + j\sin(\theta(\Omega))}{2} e^{j\Omega t} + \frac{\cos(\theta(\Omega)) - j\sin(\theta(\Omega))}{2} e^{-j\Omega t} \right] d\Omega \\&= \int_0^{+\infty} m(\Omega) \left[\frac{e^{j\theta(\Omega)}}{2} e^{j\Omega t} + \frac{e^{-j\theta(\Omega)}}{2} e^{-j\Omega t} \right] d\Omega \\&= \int_0^{+\infty} \frac{1}{2} m(\Omega) e^{j\theta(\Omega)} e^{j\Omega t} d\Omega + \int_0^{+\infty} \frac{1}{2} m(\Omega) e^{-j\theta(\Omega)} e^{-j\Omega t} d\Omega\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{2} m(\Omega) e^{j\theta(\Omega)} e^{j\Omega t} d\Omega + \int_0^{+\infty} \frac{1}{2} m(\Omega) e^{-j\theta(\Omega)} e^{-j\Omega t} d\Omega \\
 &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{2} m(\Omega) e^{j\theta(\Omega)} e^{j\Omega t} d\Omega + \int_0^{-\infty} \frac{1}{2} m(-\Omega) e^{-j\theta(-\Omega)} e^{-j(-\Omega)t} (-d\Omega)
 \end{aligned}$$

با فرض تقارن زوج برای اندازه $m(\Omega)$ و تقارن فرد برای فاز $\theta(\Omega)$ داریم:

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{2} m(\Omega) e^{j\theta(\Omega)} e^{j\Omega t} d\Omega + \int_{-\infty}^0 \frac{1}{2} m(\Omega) e^{j\theta(\Omega)} e^{j(\Omega)t} (+d\Omega) \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} m(\Omega) e^{j\theta(\Omega)} e^{j\Omega t} d\Omega
 \end{aligned}$$

$$c(\Omega) = \frac{1}{2} m(\Omega) e^{j\theta(\Omega)} \Rightarrow x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} c(\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega$$

نگرش مفهومی به روابط:

$$x(t) = \int_0^{+\infty} m(\Omega) \cos(\Omega t + \theta(\Omega)) d\Omega, \Omega \in R \quad 1$$

$$x(t) = \int_0^{+\infty} m(\Omega) [\cos(\theta(\Omega)) \cos(\Omega t) - \sin(\theta(\Omega)) \sin(\Omega t)] d\Omega$$

$$x(t) = \int_0^{+\infty} [m(\Omega) \cos(\theta(\Omega)) \cos(\Omega t) - m(\Omega) \sin(\theta(\Omega)) \sin(\Omega t)] d\Omega$$

$$\begin{aligned} a(\Omega) &= m(\Omega) \cos(\theta(\Omega)) \\ b(\Omega) &= m(\Omega) \sin(\theta(\Omega)) \end{aligned} \Rightarrow x(t) = \int_0^{+\infty} [a(\Omega) \cos(\Omega t) - b(\Omega) \sin(\Omega t)] d\Omega \quad 2$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} c(\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega \quad 3$$

$c(\Omega)$: Complex

$c(\Omega)$: **Magnitude** of individual frequency component

$a(\Omega)$, $b(\Omega)$, $m(\Omega)$: **Amplitude** of individual frequency component

هر سیگنال دلخواهی را می توان با ترکیب سیگنال های کسینوسی دارای فاز،

سیگنال های کسینوسی و سینوسی بدون فاز و نمایی مختلط بازنمایی کرد.

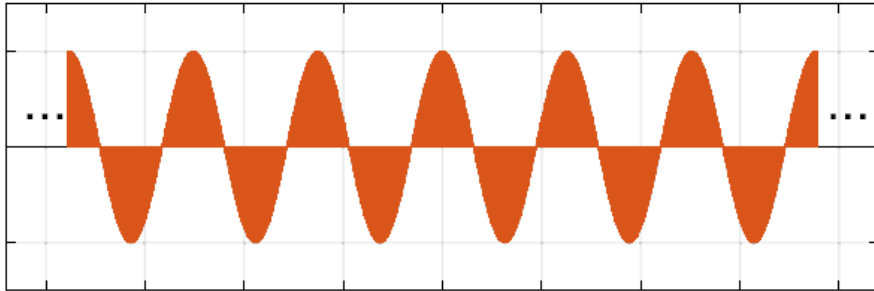
معادله آنالیز تبدیل فوریه زمان پیوسته: تعیین $C(\Omega)$

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\Omega t} dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} c(\Psi) e^{j\Psi t} d\Psi e^{-j\Omega t} dt \\&= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} c(\Psi) e^{j\Psi t} e^{-j\Omega t} d\Psi dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} c(\Psi) e^{j\Psi t} e^{-j\Omega t} dt d\Psi \\&= \int_{-\infty}^{+\infty} c(\Psi) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j(\Psi-\Omega)t} dt d\Psi\end{aligned}$$

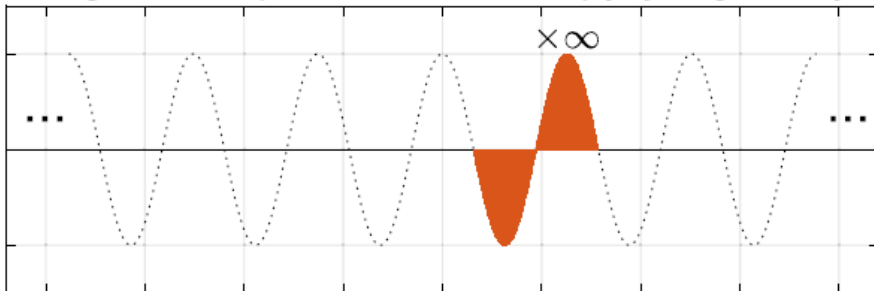
$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j(\Psi-\Omega)t} dt = ?$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j(\Psi-\Omega)t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} [\cos((\Psi-\Omega)t) + j \sin((\Psi-\Omega)t)] dt$$

Integral over entire sinusoid



Integral over one period sinusoid and multiply by integer infinity

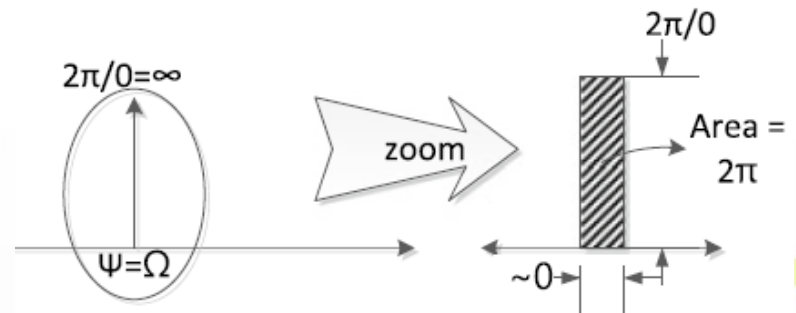


اگر $\Psi \neq \Omega$ باشد انتگرال $\sin$ و $\cos$ در هر تناوب صفر است و بنابراین برای بی‌نهایت دوره تناوب هم انتگرال کل صفر می‌شود.

اگر $\Psi = \Omega$ باشد دوره تناوب یعنی $\frac{2\pi}{\Psi-\Omega}$ به سمت بی‌نهایت میل می‌کند و $\sin((\Psi-\Omega)t)$ به سمت صفر میل می‌کند و $\cos((\Psi-\Omega)t)$ به سمت یک میل می‌کند و حاصل انتگرال در $\Psi = \Omega$ به سمت بی‌نهایت میل می‌کند.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j(\Psi-\Omega)t} dt = 2\pi\delta(\Psi-\Omega)$$

تعیین ضریب 2π بر اساس قاعده هوپیتال



معادله آنالیز تبدیل فوریه زمان پیوسته: تعیین $C(\Omega)$

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\Omega t} dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} c(\Psi) e^{j\Psi t} d\Psi e^{-j\Omega t} dt \\&= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} c(\Psi) e^{j\Psi t} e^{-j\Omega t} d\Psi dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} c(\Psi) e^{j\Psi t} e^{-j\Omega t} dt d\Psi \\&= \int_{-\infty}^{+\infty} c(\Psi) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j(\Psi-\Omega)t} dt d\Psi \quad \boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j(\Psi-\Omega)t} dt = 2\pi\delta(\Psi - \Omega)} \\&= \int_{-\infty}^{+\infty} 2\pi c(\Psi) \delta(\Psi - \Omega) d\Psi = \int_{-\infty}^{+\infty} 2\pi c(\Omega) \delta(\Psi - \Omega) d\Psi \\&= 2\pi c(\Omega) \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\Psi - \Omega) d\Psi = 2\pi c(\Omega)\end{aligned}$$

ویژگی غربال کردن ضربه:

رابطه آنالیز تبدیل فوریه:

$$c(\Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\Omega t} dt$$

یادآوری تعریف و ویژگی غربال کردن دلتای دیراک:

تعریف دلتای دیراک:

$$\delta(t) = \begin{cases} \rightarrow \infty & \text{for } t = 0 \\ 0 & \text{for } t \neq 0 \end{cases} \quad \& \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$$

ویژگی غربال کردن ضربه:

$$x(t) \delta(t - t_0) = x(t_0) \delta(t - t_0)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \delta(t - t_0) dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t_0) \delta(t - t_0) dt \\ &= x(t_0) \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0) dt = x(t_0) \end{aligned}$$

زوج تبدیل فوریہ:

$$c(\Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\Omega t} dt$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} c(\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega$$

$$X(\Omega) = 2\pi c(\Omega)$$

$$\begin{cases} X(\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\Omega t} dt \\ x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega \end{cases}$$

If $x(t)$: *Real* $\Rightarrow$ $\begin{cases} \text{Real}\{X(\Omega)\} : \text{Even Symmetric} \\ \text{Imag.}\{X(\Omega)\} : \text{Odd Symmetric} \\ |X(\Omega)| : \text{Even Symmetric} \\ \angle X(\Omega) : \text{Odd Symmetric} \end{cases}$

مثال:

$$x(t) = \begin{cases} 1 & -1 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$X(\Omega)$ را برای سیگنال $x(t)$ روبرو محاسبه و رسم کنید.

$$X(\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\Omega t} dt = \int_{-1}^{+1} e^{-j\Omega t} dt = \left. \frac{e^{-j\Omega t}}{-j\Omega} \right|_{-1}^1 = \frac{e^{j\Omega} - e^{-j\Omega}}{j\Omega}$$

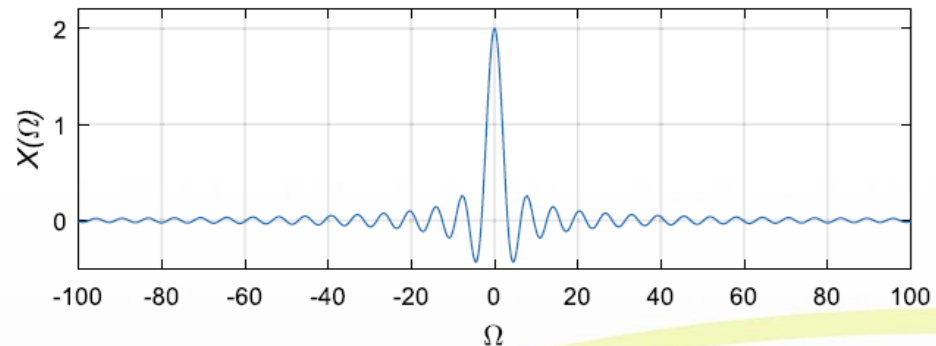
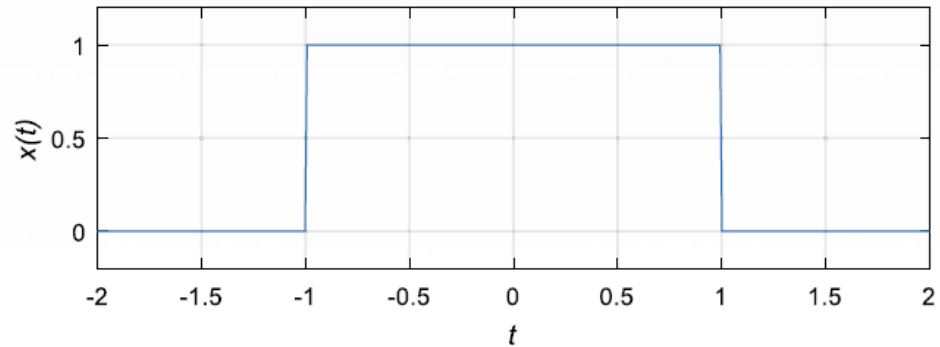
حل:

➡ $X(\Omega) = \frac{2\sin(\Omega)}{\Omega}$

```
syms t;  
b = [-100:1/100:100];  
x1 = heaviside(t+1) - heaviside(t-1);  
y2 = 2*(sin(b+eps))./(b+eps);
```

%Add eps to avoid NaN

```
figure,  
subplot(211), ezplot(x1, [-2 2]), grid  
axis([-2 2 -0.2 1.2]);  
subplot(212), plot(b, y2), grid  
axis([-100.0000 100.0000 -0.5 2.2])
```



مثال: محاسبه وارون تبدیل فوریه به روش عددی

برای $X(\Omega)$ روبرو و با محاسبه وارون تبدیل فوریه به روش عددی،
 $\tilde{x}(t)$ را برای دوره $-10\pi \leq \Omega_k \leq 10\pi$ به دست آورید.
 حل:

$$X(\Omega) = \frac{2\sin(\Omega)}{\Omega}$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2\sin(\Omega)}{\Omega} e^{j\Omega t} d\Omega$$

با فرض: $d\Omega \rightarrow \Delta\Omega, \Omega = k\Delta\Omega, k: -N \rightarrow N$

$$\tilde{x}(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-N}^N \frac{2\sin(k\Delta\Omega)}{k\Delta\Omega} e^{jk\Delta\Omega t} \Delta\Omega$$

hint: $\text{sinc}(0) = 1$

با جداسازی زیگما برای محدوده منفی، مقدار صفر و محدوده مثبت داریم:

$$\tilde{x}(t) = \frac{1}{2\pi} \left[\sum_{k=-N}^{-1} \frac{2\sin(k\Delta\Omega)}{k\Delta\Omega} e^{jk\Delta\Omega t} + 2 + \sum_{k=1}^N \frac{2\sin(k\Delta\Omega)}{k\Delta\Omega} e^{jk\Delta\Omega t} \right] \Delta\Omega$$

hint: $\text{sinc}(t) = \text{Even symmetric}$

با تغییر متغیر زیگمای اول از k به $-k$ داریم:

$$\tilde{x}(t) = \frac{1}{2\pi} \left[\sum_{k=1}^N \frac{2\sin(k\Delta\Omega)}{k\Delta\Omega} e^{-jk\Delta\Omega t} + 2 + \sum_{k=1}^N \frac{2\sin(k\Delta\Omega)}{k\Delta\Omega} e^{jk\Delta\Omega t} \right] \Delta\Omega$$

$$\tilde{x}(t) = \frac{1}{2\pi} \left[\sum_{k=1}^N \frac{2\sin(k\Delta\Omega)}{k\Delta\Omega} e^{-jk\Delta\Omega t} + 2 + \sum_{k=1}^N \frac{2\sin(k\Delta\Omega)}{k\Delta\Omega} e^{jk\Delta\Omega t} \right] \Delta\Omega$$

با یکپارچه نوشتن دو زیگما داریم:

$$\tilde{x}(t) = \frac{1}{2\pi} \left[\sum_{k=1}^N \frac{2\sin(k\Delta\Omega)}{k\Delta\Omega} (e^{jk\Delta\Omega t} + e^{-jk\Delta\Omega t}) + 2 \right] \Delta\Omega$$

با بازنویسی بخش بنفش رنگ طبق رابطه اولر داریم:

$$\tilde{x}(t) = \left[\frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^N \frac{2\sin(k\Delta\Omega)}{k\Delta\Omega} \cos(k\Delta\Omega t) + \frac{1}{\pi} \right] \Delta\Omega$$

$$\Delta\Omega = 2\pi \Delta f$$

گام فرکانس رادیانی

گام فرکانسی


```
delf = 0.1; % Frequency interval
```

```
delt = 0.001; % Time interval
```

```
fmax = 30/(2*pi);
```

```
tmax = 2;
```

```
ff = 0.1:delf:fmax;
```

```
tt = -tmax:delt:tmax;
```

```
out = [];
```

```
f1 = 2*pi*(-fmax:delf:fmax);
```

```
xc = 2*sin(f1+eps)./(f1+eps);
```

```
for k1 = tt % time
```

```
    temp = 0;
```

```
    for k2 = ff % frequency
```

```
        temp = temp + ...
```

```
            sin(2*pi*k2)*cos(2*pi*k2*k1)/(2*pi*k2);
```

```
    end
```

```
    out = [out ((temp*2/pi)+(1/pi))*2*pi*delf];
```

```
end
```

```
figure,
```

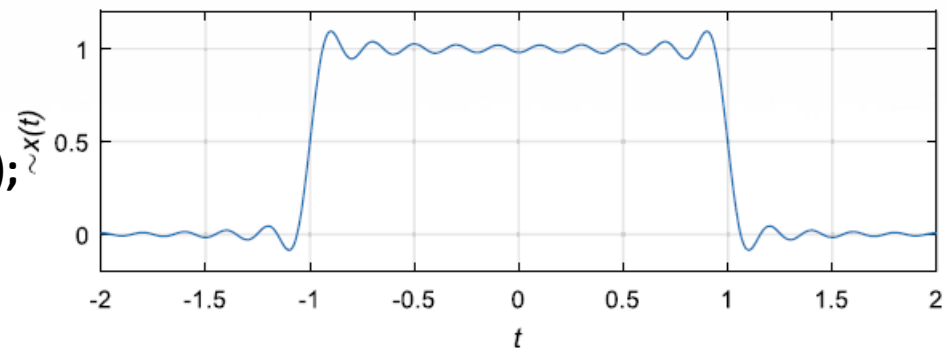
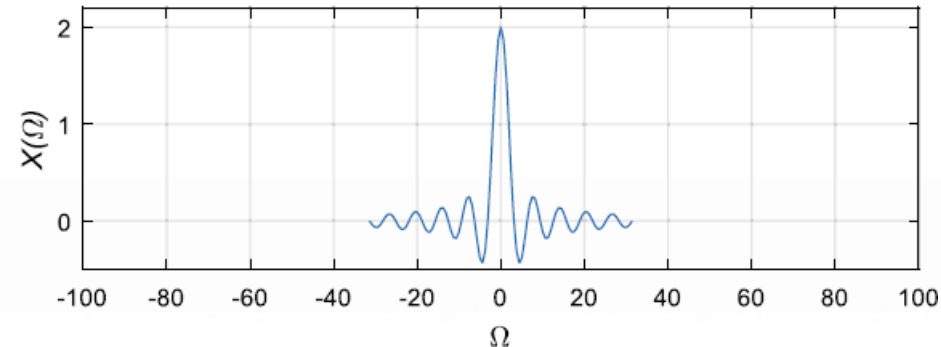
```
subplot(211), plot(f1,xc), grid
```

```
axis([-100.0000 100.0000 -0.5 2.2])
```

```
subplot(212), plot(tt,out), grid
```

```
axis([-2 2 -0.2 1.2]);
```

$$\tilde{x}(t) = \left[\frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^N \frac{2\sin(k\Delta\Omega)}{k\Delta\Omega} \cos(k\Delta\Omega t) + \frac{1}{\pi} \right] \Delta\Omega$$



The **wide** fluctuations and **Transitions** are observed due to the **limited frequency range** in the **inverse Fourier transform**.

```
delf = 0.1; % Frequency interval
delt = 0.001; % Time interval
```

```
fmax = 100/(2*pi);
```

```
tmax = 2;
```

```
ff = 0.1:delf:fmax;
```

```
tt = -tmax:delt:tmax;
```

```
out = [];
```

```
f1 = 2*pi*(-fmax:delf:fmax);
```

```
xc = 2*sin(f1+eps)./(f1+eps);
```

```
for k1 = tt % time
```

```
temp = 0;
```

```
for k2 = ff % frequency
```

```
temp = temp + ...
```

```
sin(2*pi*k2)*cos(2*pi*k2*k1)/(2*pi*k2);
```

```
end
```

```
out = [out ((temp*2/pi)+(1/pi))*2*pi*delf];
```

```
end
```

```
figure,
```

```
subplot(211), plot(f1,xc), grid
```

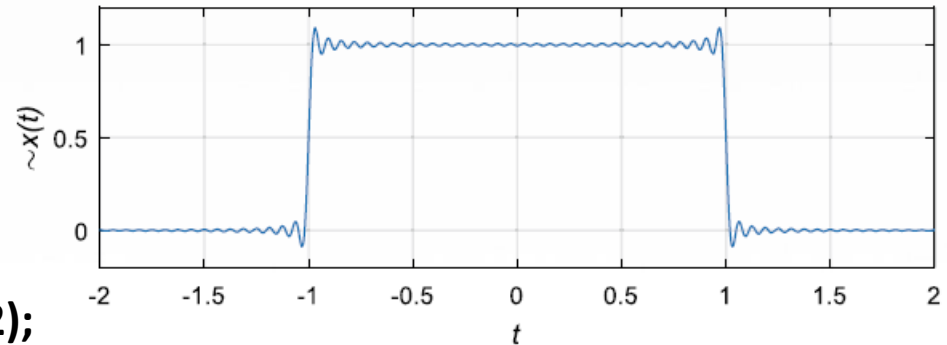
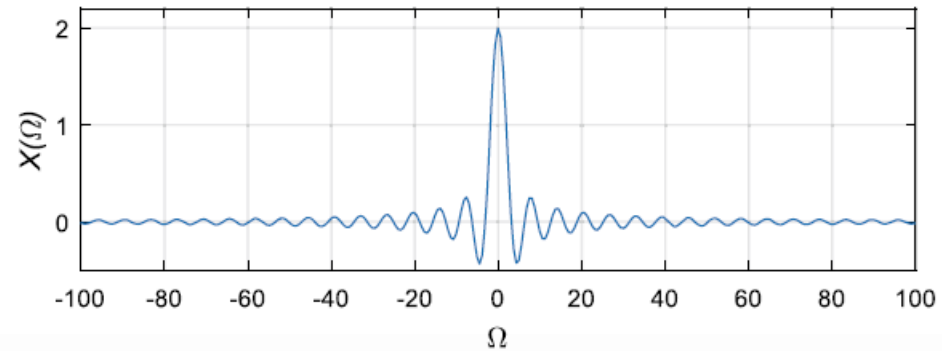
```
axis([-100.0000 100.0000 -0.5 2.2])
```

```
subplot(212), plot(tt,out), grid
```

```
axis([-2 2 -0.2 1.2]);
```

34

با گسترش محدوده فرکانسی به $-100 < \Omega < 100$ داریم:

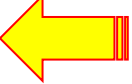


The fluctuations and Transitions are both narrow to follow the precise window shape in the time domain.

برای اینکه بتوان با محاسبه وارون تبدیل فوریه، دقیقاً به $x(t)$ دست یافت لازم است گستره فرکانسی، بی‌نهایت در نظر گرفته شود.

عناوین بحث:

✓ سیگنال های سینوسی پیوسته

○ نمونه برداری 

○ بازنمایی سیگنال

○ فرکانس در سیگنال زمان گسسته

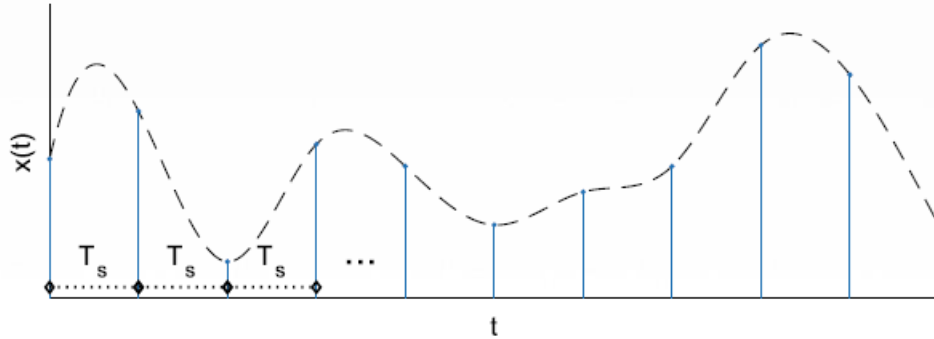
○ مثال های مروری

نمونه برداری (Sampling):

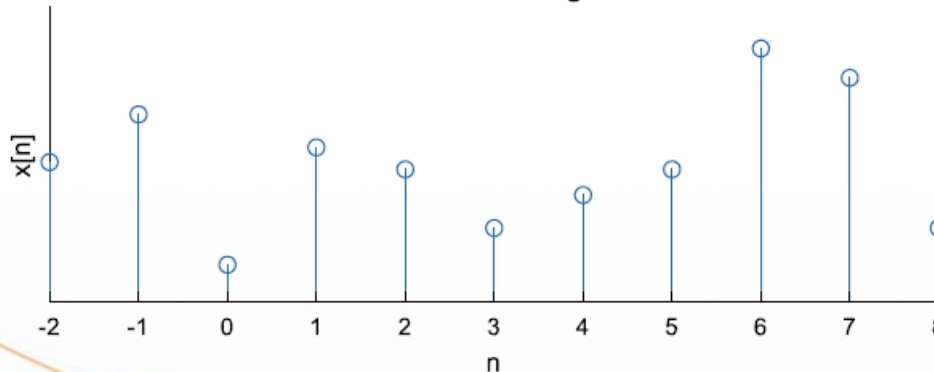
نمونه برداری، فرآیندی برای تبدیل سیگنال پیوسته به دنباله دادگان گسسته است.

به این منظور، سیگنال پیوسته در لحظاتی که ضریب صحیحی از گام نمونه برداری (T_s) هستند نمونه برداری می شود تا سیگنال زمان گسسته حاصل گردد.

Continuous time signal



Discrete time signal



$$x[n] = x(nT_s) \quad n \in \mathbb{Z}, \\ x[.], x(.), T_s \in \mathbb{R}$$

T_s : sampling period

$$f_s = \frac{1}{T_s} : \text{sampling frequency}$$

f_s : تعداد نمونه های گرفته شده در یک ثانیه

```

nn0 = 0:pi/100:2*pi;
nn1 = 0:pi/10:2*pi;
nn2 = 0:pi:2*pi;
nn3 = [0 (3*pi/2+2*pi)/2];

```

```

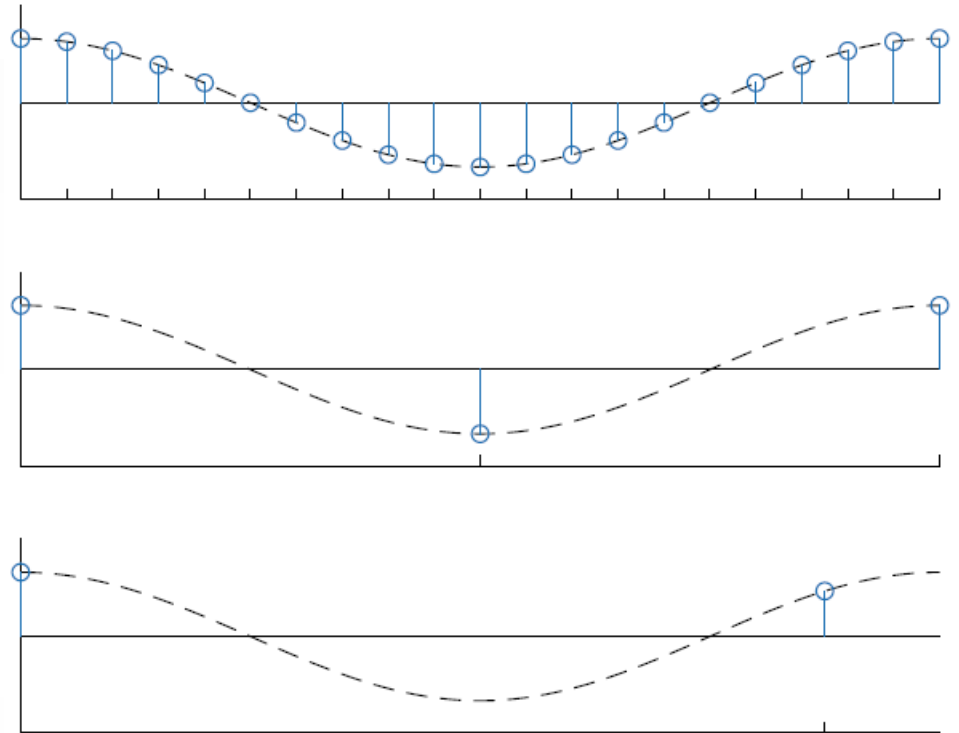
xn0 = cos(nn0);
xn1 = cos(nn1);
xn2 = cos(nn2);
xn3 = cos(nn3);

```

```

figure,
subplot(311)
plot(nn0,xn0,'k','LineStyle','--');
hold on, stem(nn1,xn1); hold off
subplot(312)
plot(nn0,xn0,'k','LineStyle','--');
hold on, stem(nn2,xn2); hold off
subplot(313)
plot(nn0,xn0,'k','LineStyle','--');
hold on, stem(nn3,xn3); hold off

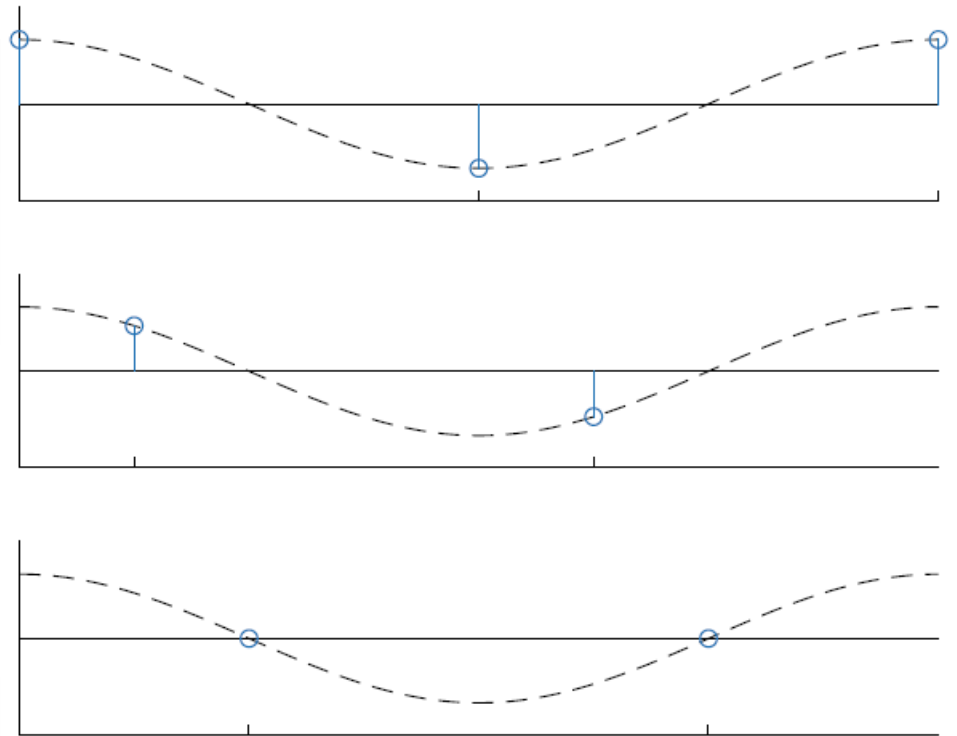
```



```

nn0 = 0:pi/100:2*pi;
nn2 = 0:pi:2*pi;
nn4 = nn2+pi/4;
nn5 = nn2+pi/2;
xn0 = cos(nn0);
xn2 = cos(nn2);
xn4 = cos(nn4);
xn5 = cos(nn5);
figure,
subplot(311)
plot(nn0,xn0, 'k','LineStyle','--');
hold on, stem(nn2,xn2); hold off
ylim([-1.5 1.5]), xlim([0 2*pi])
subplot(312)
plot(nn0,xn0, 'k','LineStyle','--');
hold on, stem(nn4,xn4); hold off
ylim([-1.5 1.5]), xlim([0 2*pi])
subplot(313)
plot(nn0,xn0, 'k','LineStyle','--');
hold on, stem(nn5,xn5); hold off
ylim([-1.5 1.5]), xlim([0 2*pi])

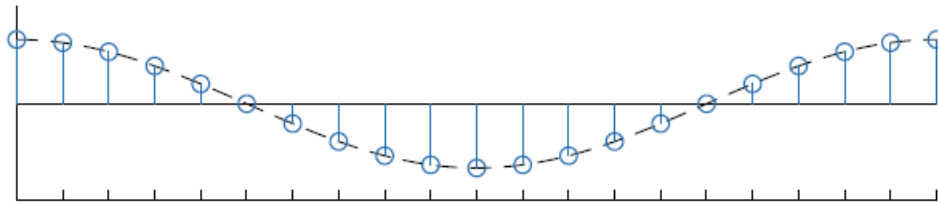
```



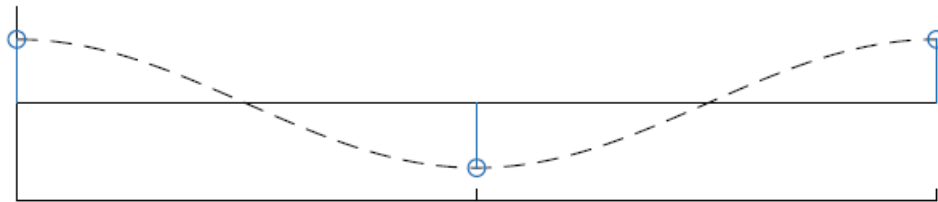
تعیین کمترین فرکانس نمونه‌برداری برای یک سیگنال:

برای اینکه بتوان از نمونه‌های سیگنال، سیگنال پیوسته را بازسازی نمود لازم است نمونه‌برداری با نرخ بیش از دو برابر بالاترین نمونه فرکانسی سیگنال انجام گردد.

$$f_s > 2f_{max} \quad \text{نرخ نمونه‌برداری نایکوئیست:}$$



نمونه‌برداری با **نرخ بیشتر** از دو برابر فرکانس سیگنال:

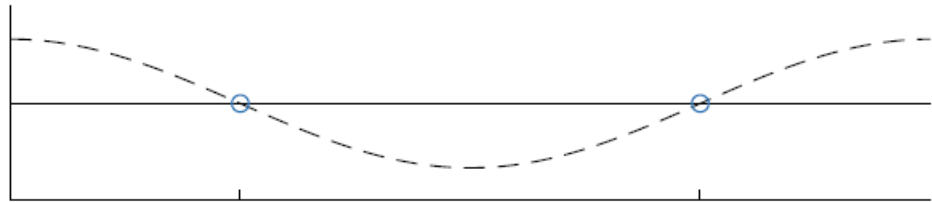
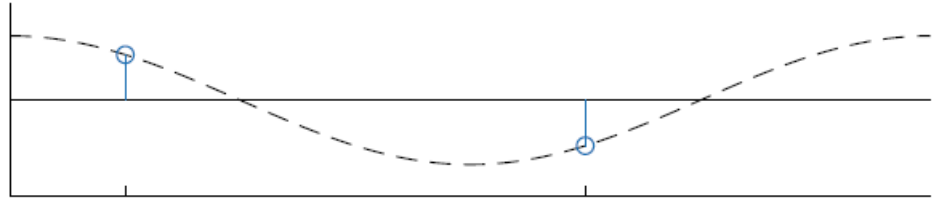
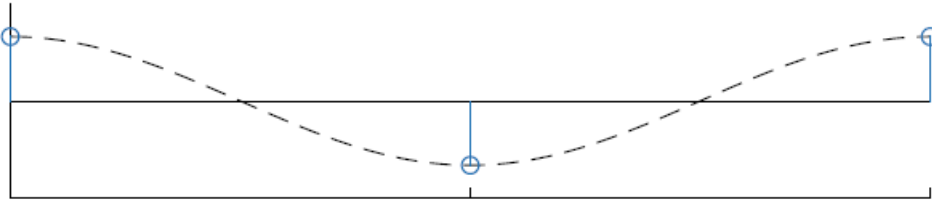


نمونه‌برداری با **نرخ برابر** با دو برابر فرکانس سیگنال:



نمونه‌برداری با **نرخ کمتر** از دو برابر فرکانس سیگنال:

اثر فاز نمونه برداری:



در عمل، نمونه برداری با نرخی بالاتر از دو برابر فرکانس
بالاترین مولفه فرکانسی سیگنال انجام می گردد (۴ تا ۱۰
برابر بالاترین مولفه فرکانسی سیگنال)

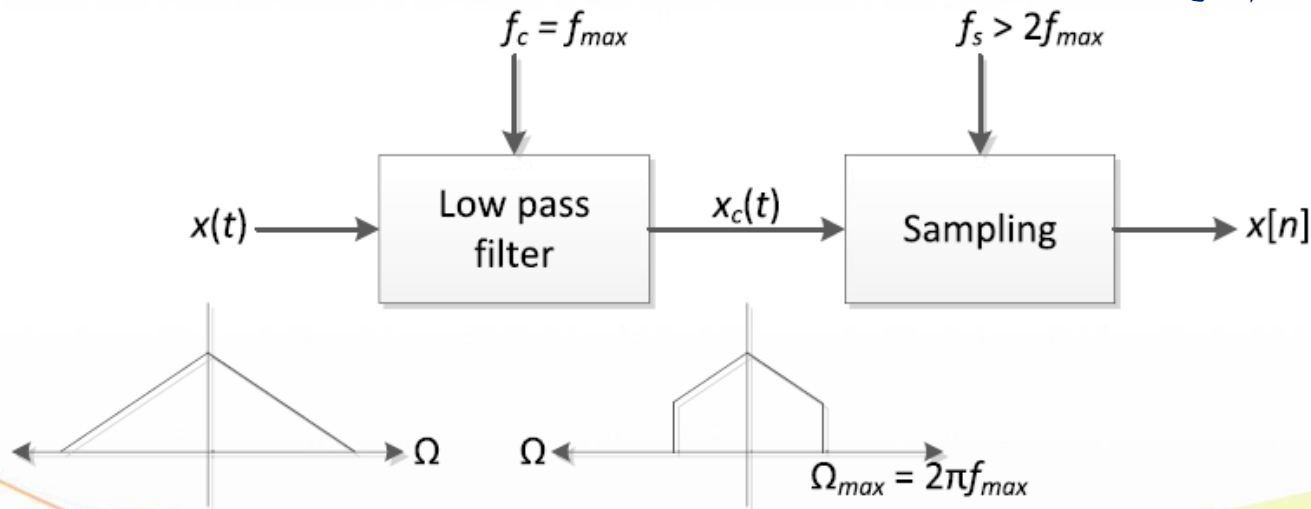
نمونه برداری از یک سیگنال پیوسته باند محدود:

سیگنال پیوسته باند محدودی (band-limited) با بالاترین مولفه فرکانسی $\Omega_{\max}$ در نظر بگیرید:

$$x(t) = \int_0^{\Omega_{\max}} m(\Omega) \cos(\Omega t + \theta(\Omega)) d\Omega$$

اگر فرکانس نمونه برداری مناسبی برای مولفه فرکانسی $\Omega_{\max}$ تعیین گردد ملزومات نمونه برداری مولفه های با فرکانس پایین تر هم برآورده می شود.

اگر سیگنال باند محدود نباشد یا نرخ نمونه برداری محدود باشد لازم است پیش پردازشی با هدف حذف فرکانس های بالاتر از $\Omega_{\max}$ انجام گردد:



مثال:

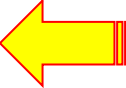
حداقل نرخ نمونه برداری سیگنال زیر را بیابید.

$$x(t) = \cos(100\pi t) + \sin(200\pi t) + \cos\left(500\pi t + \frac{\pi}{4}\right) + 7$$

حل:

$$\Omega_{\max} = 500\pi \quad \Rightarrow \quad f_{\max} = \frac{\Omega_{\max}}{2\pi} = \frac{500\pi}{2\pi} = 250 \quad \Rightarrow \quad f_s > 500 \text{ Hz}$$

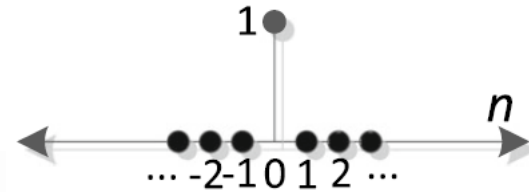
عناوین بحث:

- ✓ سیگنال‌های سینوسی پیوسته
- ✓ نمونه‌برداری
- بازنمایی سیگنال 
- فرکانس در سیگنال زمان گسسته
- مثال‌های مروری

سیگنال ضربه واحد گسسته (دلتای کرونکر)

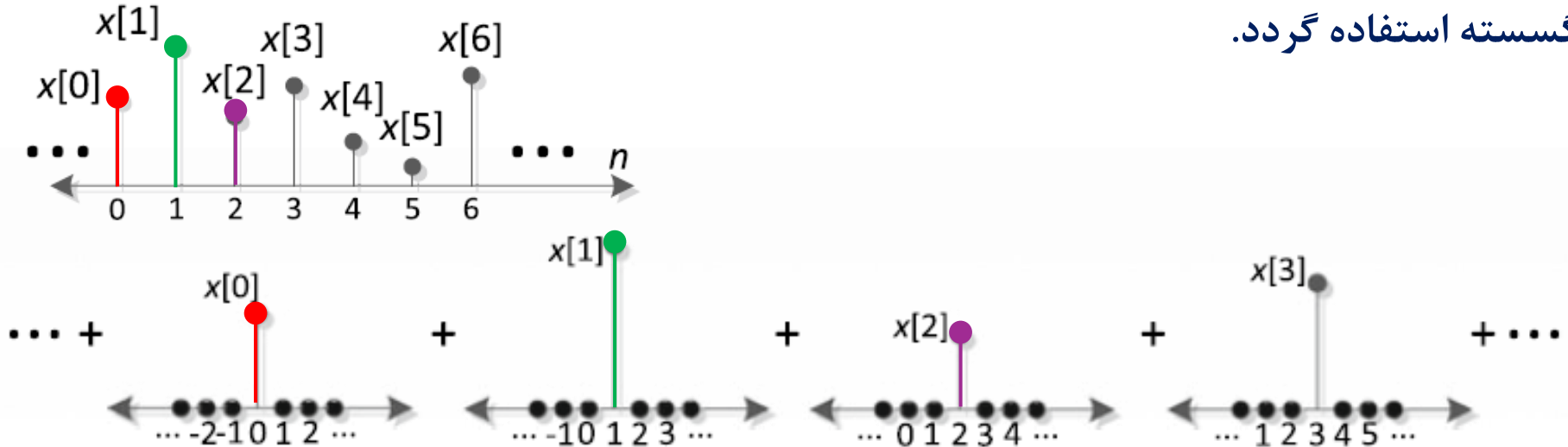
سیگنال ضربه واحد زمان گسسته (دلتای کرونکر) آجر سازنده سیگنال‌های زمان گسسته است.

$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$



توصیف سیگنال گسسته با دلتای کرونکر

سیگنال ضربه واحد زمان گسسته (دلتای کرونکر) می‌تواند برای تعیین محل نمونه‌های دنباله زمان گسسته استفاده گردد.



هر سیگنال زمان گسسته را می‌توان به صورت ترکیب وزن دار توابع دلتای جابجا شده توصیف کرد:

$$x[n] \neq \dots + x[0] + x[1] + x[2] + x[3] \dots = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] = \text{constant}$$

$$x[n] = \dots + x[0]\delta[n] + x[1]\delta[n-1] + x[2]\delta[n-2] + \dots = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta[n-k]$$

مثال: بازنمایی سیگنال با ضربه واحد

سیگنال زیر را با استفاده از ضربه واحد و جابجا شده‌های آن توصیف کنید.

$$x[n] = \begin{cases} 2 & -2 \leq n \leq 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

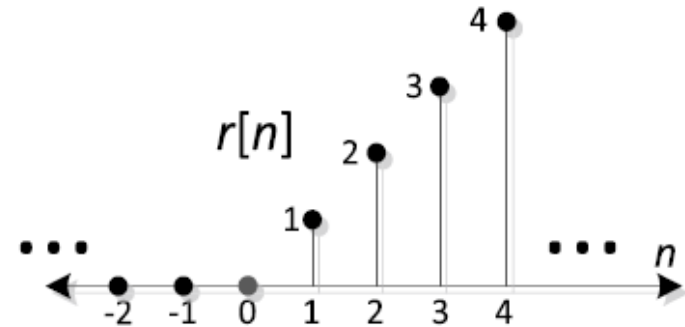
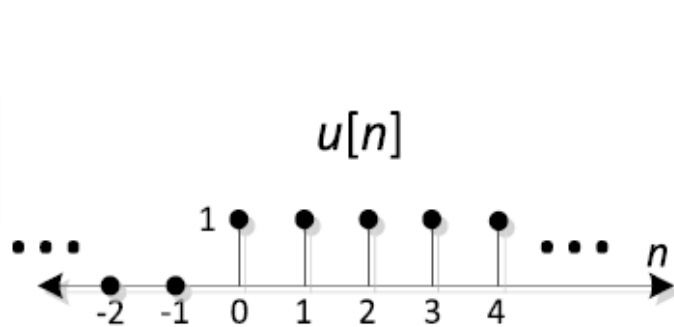
حل:

$$x[n] = 2\delta[n+2] + 2\delta[n+1] + 2\delta[n] + 2\delta[n-1]$$

سیگنال‌های پله واحد (unit step) و شیب واحد (unit ramp)

پله واحد : $u[n] = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$

شیب واحد : $r[n] = \begin{cases} n & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$



ارتباط بین سیگنال‌های ضربه واحد، پله واحد و شیب واحد:

$$u[n] = \sum_{k=-\infty}^n \delta[k]$$

$$r[n] = \sum_{k=-\infty}^{n-1} u[k]$$

$$\delta[n] = u[n] - u[n-1]$$

$$u[n] = r[n+1] - r[n]$$

دستکاری‌های متغیر مستقل سیگنال:

جابجایی:

جایگزینی n با $n - d$

قرینه کردن:

جایگزینی n با $-n$

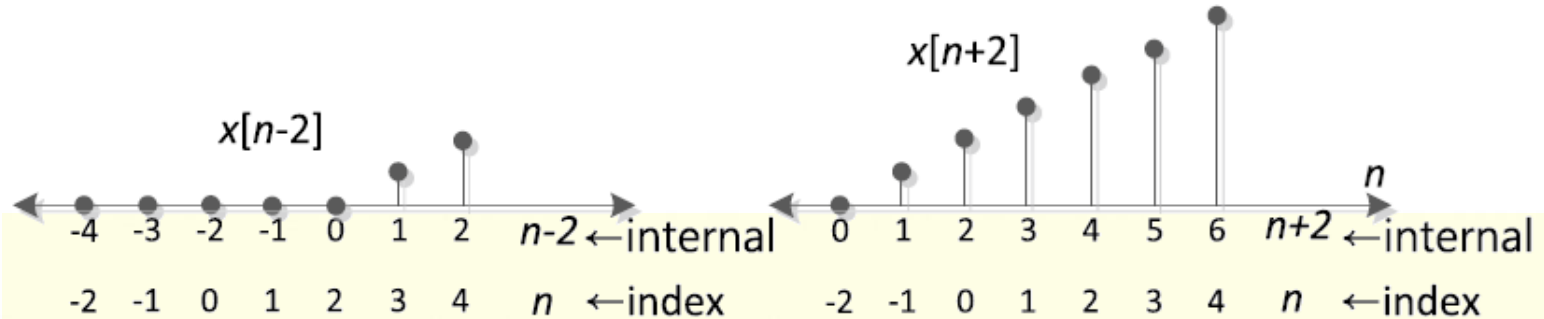
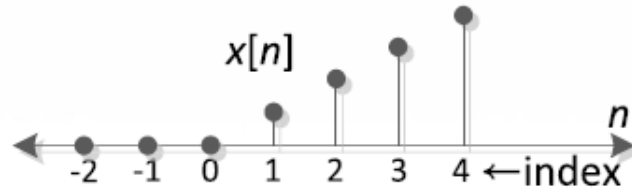
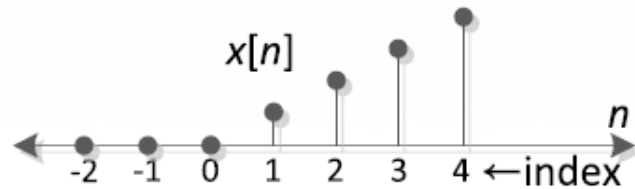
مقیاس کردن:

جایگزینی n با αn

جابجایی (Shift): جمع کردن یا تفریق مقداری ثابت با متغیر دنباله

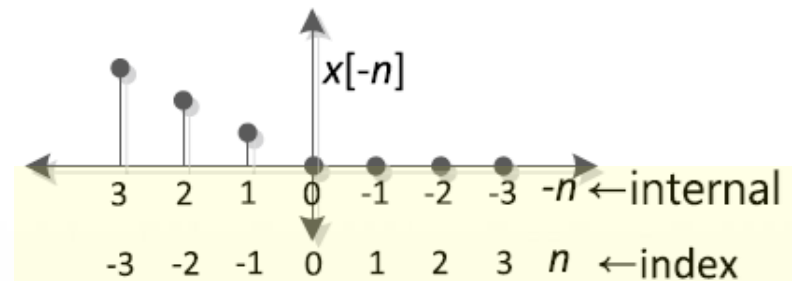
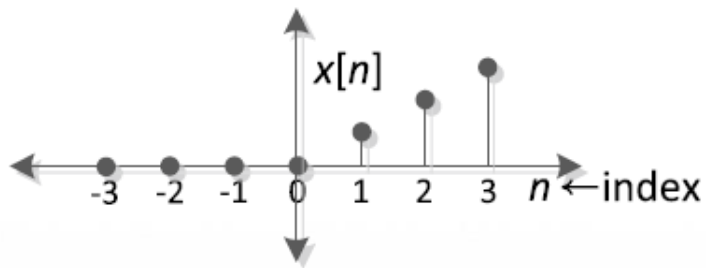
$$x[n] \rightarrow x[n + d]$$

اگر d مقداری منفی باشد نشانگر جابجایی به راست است و
اگر d مقداری مثبت باشد نشانگر جابجایی به چپ است.



قرینه کردن (Reflection): قرینه کردن سیگنال نسبت به محور عمودی

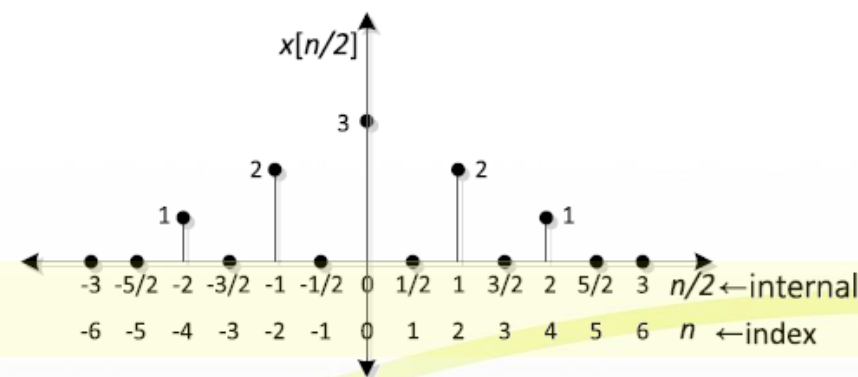
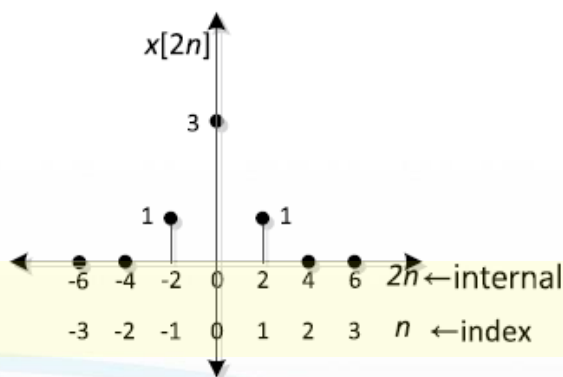
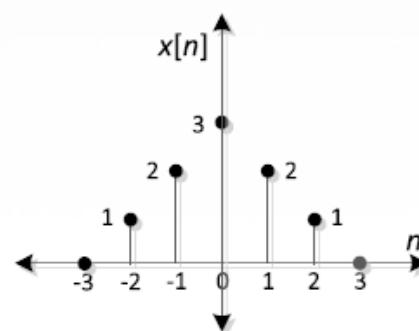
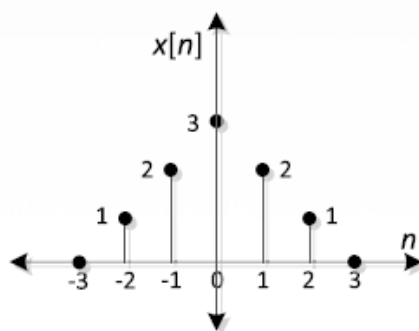
$$x[n] \rightarrow x[-n]$$



مقیاس کردن: گسترش/فشرده‌گی (expansion/compression):

$$x[n] \rightarrow x[qn]$$

اگر q عددی **طبیعی** و **بزرگتر از یک** باشد نشانگر فشرده‌گی سیگنال است و اگر q مقداری **گویا** و **کوچکتر از یک** باشد نشانگر گسترش سیگنال است.



دستکاری‌های چندگانه:

اگر جابجایی، قرینه کردن و مقیاس با هم باشند باید دستکاری‌ها به ترتیب اولویت انجام گردد.

$$x[-q(n - d)]$$

$$x[n] \xrightarrow{\text{reflecting}} x[-n] \xrightarrow{\text{scaling}} x[-qn] \xrightarrow{\text{shifting}} x[-q(n - d)]$$

$$x[-qn + d]$$

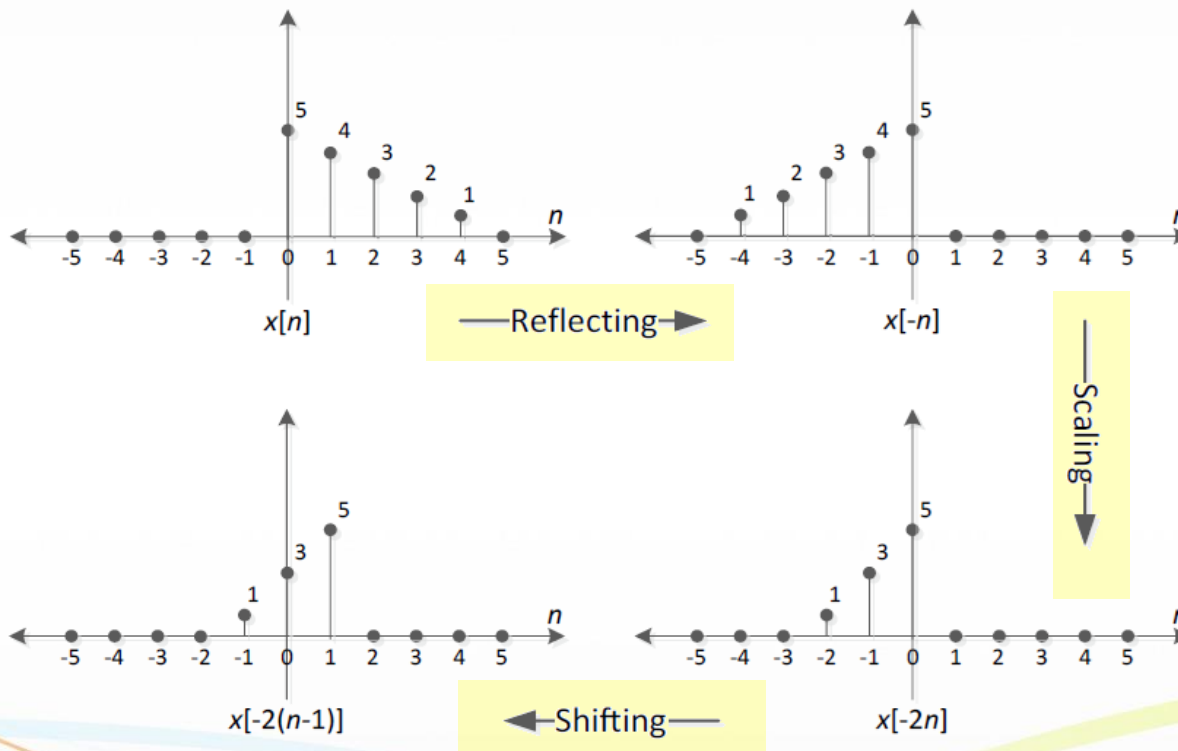
$$x[n] \xrightarrow{\text{shifting}} x[n + d] \xrightarrow{\text{reflecting}} x[-n + d] \xrightarrow{\text{scaling}} x[-qn + d]$$

مثال:

برای سیگنال $x[n]$ داده شده، $x[-2(n-1)]$ را رسم کنید.

$$x[n] = 5\delta[n] + 4\delta[n-1] + 3\delta[n-2] + 2\delta[n-3] + \delta[n-4]$$

حل: روند دستکاری



مثال:

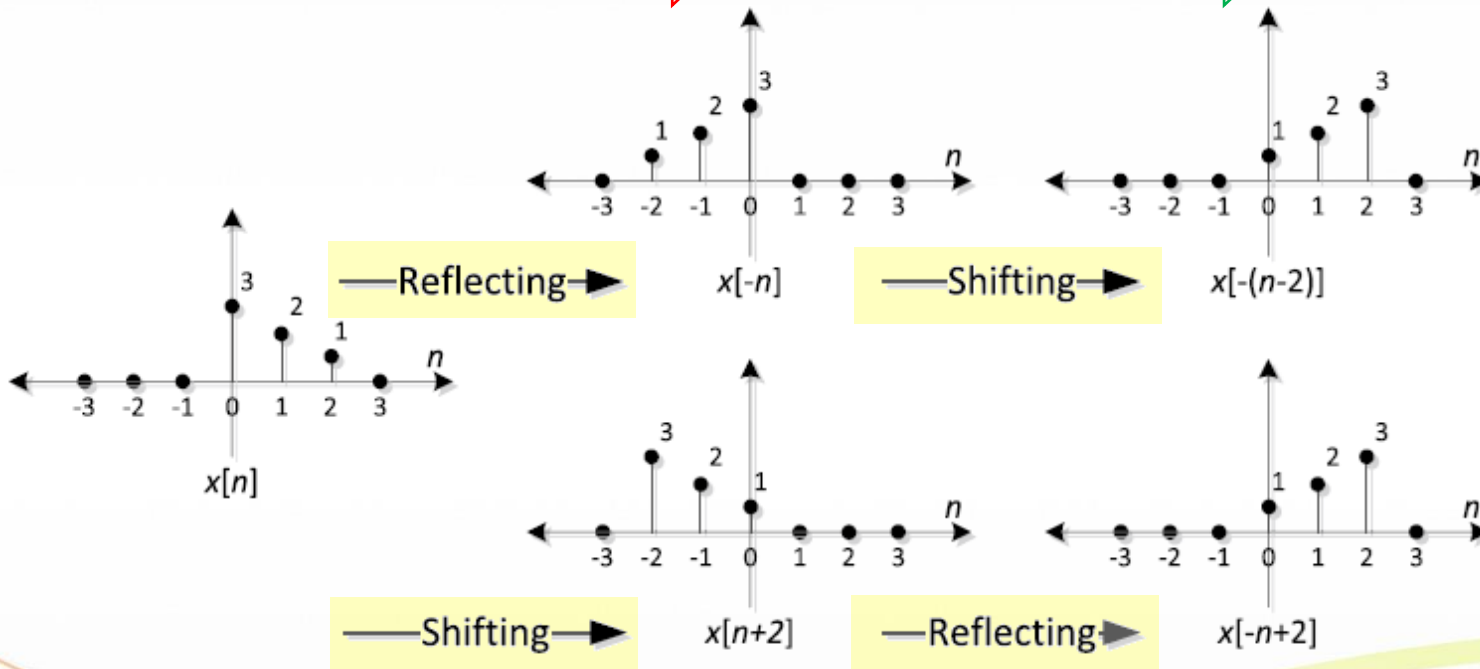
برای سیگنال $x[n]$ داده شده، $x[-n+2]$ و $x[-(n-2)]$ را رسم کنید.

$$x[n] = 3\delta[n] + 2\delta[n-1] + \delta[n-2]$$

حل:

روند ۱: $x[n] \xrightarrow{\text{reflecting}} x[-n] \xrightarrow{\text{shifting}} x[-(n-2)]$

روند ۲: $x[n] \xrightarrow{\text{shifting}} x[n+2] \xrightarrow{\text{reflecting}} x[-n+2]$



سیستم‌های خطی مستقل از زمان (LTI):

توصیف سیستم : $y[n] = \mathbf{S}\{x[n]\}$

مفهوم خطی بودن:

$$\text{if } \begin{cases} \mathbf{S}\{x_1[n]\} = y_1[n] \\ \mathbf{S}\{x_2[n]\} = y_2[n] \end{cases} \Rightarrow \mathbf{S}\{\alpha x_1[n] + \beta x_2[n]\} = \alpha y_1[n] + \beta y_2[n]$$

مفهوم استقلال از زمان:

$$\text{if } \mathbf{S}\{x[n]\} = y[n] \Rightarrow \mathbf{S}\{x[n-d]\} = y[n-d]$$

تعیین پاسخ سیستم‌های LTI توصیف شده با پاسخ ضربه:

برای سیستم‌های LTI، با داشتن پاسخ سیستم به ضربه واحد، می‌توان پاسخ سیستم به هر ورودی دلخواه را به دست آورد:

مفهوم پاسخ ضربه: $\mathcal{S}\{\delta[n]\} = h[n]$

توصیف سیگنال با ضربه و جابجا شده‌های آن: $x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta[n-k]$

$$\Rightarrow y[n] = \mathcal{S}\{x[n]\} = \mathcal{S}\left\{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta[n-k]\right\}$$

به پشتوانه خطی بودن سیستم:

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] \mathcal{S}\{\delta[n-k]\}$$

به پشتوانه استقلال از زمان سیستم:

$$\Rightarrow y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] h[n-k]$$

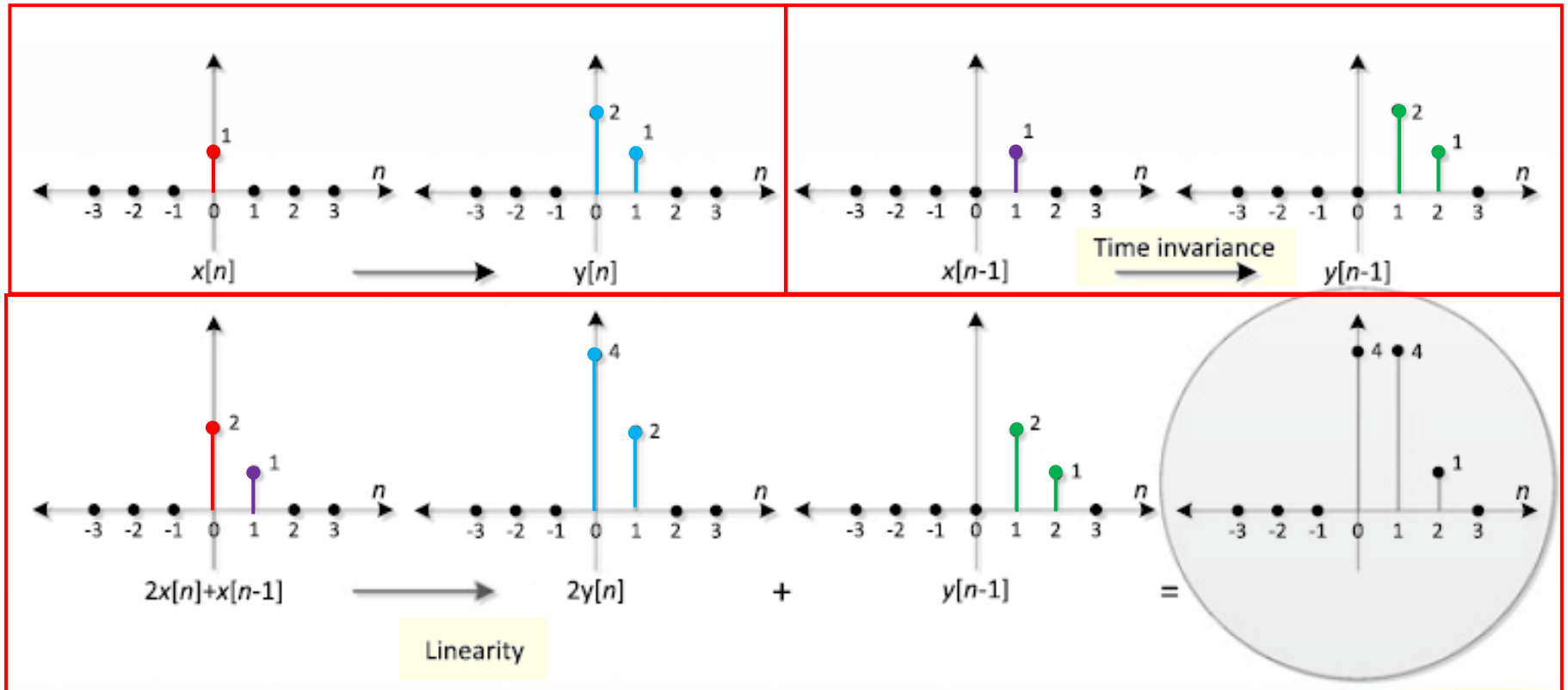
$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] h[n-k]$$

رابطه «جمع کانولوشن» امکان محاسبه خروجی فیلتر برای هر سیگنال ورودی دلخواه را فراهم می‌سازد. بنابراین، پاسخ ضربه توصیف کاملی از فیلتر از جمله مشخصات فرکانسی فیلتر است.

مثال:

پاسخ ضربه یک سیستم LTI به صورت $h[n] = 2\delta[n] + \delta[n - 1]$ داده شده است. پاسخ این سیستم را به ورودی $x[n] = 2\delta[n] + \delta[n - 1]$ به دست آورید.

حل: به روش ترسیمی



مثال:

پاسخ ضربه یک سیستم LTI به صورت $h[n] = 2\delta[n] + \delta[n - 1]$ داده شده است. پاسخ این سیستم را به ورودی $x[n] = 2\delta[n] + \delta[n - 1]$ به دست آورید.

حل: به روش تحلیلی

$$\begin{aligned}y[n] &= \mathcal{S}\{x[n]\} = \mathcal{S}\{2\delta[n] + \delta[n - 1]\} = 2\mathcal{S}\{\delta[n]\} + \mathcal{S}\{\delta[n - 1]\} \\&= 2h[n] + h[n - 1] \\&= 2(2\delta[n] + \delta[n - 1]) + 2\delta[n - 1] + \delta[n - 2] \\&= 4\delta[n] + 4\delta[n - 1] + \delta[n - 2]\end{aligned}$$

مثال:

پاسخ ضربه $h[n]$ یک سیستم LTI داده شده است. پاسخ این سیستم را به ورودی $x[n]$ به دست آورید.

$$h[n] = \delta[n] + \delta[n - 1]$$

$$x[n] = \delta[n] - \delta[n - 2]$$

حل: به روش تحلیلی

$$y[n] = \mathcal{S}\{x[n]\} = \mathcal{S}\{\delta[n] - \delta[n - 2]\} = \mathcal{S}\{\delta[n]\} - \mathcal{S}\{\delta[n - 2]\}$$

$$= h[n] - h[n - 2]$$

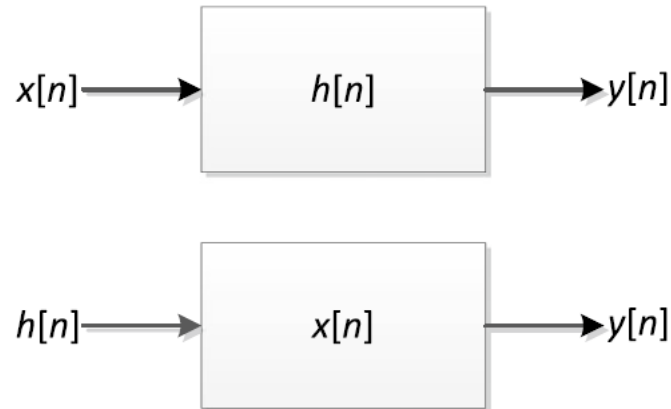
$$= \delta[n] + \delta[n - 1] - (\delta[n - 2] + \delta[n - 3])$$

$$= \delta[n] + \delta[n - 1] - \delta[n - 2] - \delta[n - 3]$$

ویژگی جابجایی کانولوشن (Commutative Law):

$$y[n] = x[n] * h[n] = h[n] * x[n]$$

⇒
$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k] x[n-k]$$



ارتباط مفهومی «جمع کانولوشن» با مفاهیم پایه‌ای فیلتر:

در مبحث اول، خروجی فیلتر را با جمع وزن‌دار نمونه‌های اخیر ورودی محاسبه کردیم:

$$y[n] = \frac{1}{5}x[n] + \frac{1}{5}x[n-1] + \frac{1}{5}x[n-2] + \frac{1}{5}x[n-3] + \frac{1}{5}x[n-4]$$

در رابطه جمع کانولوشن، پاسخ ضربه را قرینه کرده و به محل محاسبه خروجی منتقل می‌کنیم. نمونه‌های ورودی را در نمونه‌های دستکاری شده (قرینه و جابجا شده) پاسخ ضربه ضرب و با هم جمع می‌کنیم تا نمونه خروجی حاصل شود:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] h[n-k]$$

به بیان مفهومی، ضربه که حاوی تمام مولفه‌های فرکانسی است به فیلتر اعمال می‌شود تا پاسخ ضربه که شامل تمام مولفه‌های فرکانسی‌ای است که امکان عبور از فیلتر را دارند به دست آید. از پاسخ ضربه استفاده می‌شود تا مولفه‌های نظیر را در ورودی یافته و از فیلتر عبور دهد تا سیگنال خروجی به دست آید.

توان و انرژی سیگنال:

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2$$

انرژی سیگنال: مجموع مربع نمونه‌های سیگنال

$$P_x = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{+N} |x[n]|^2$$

توان سیگنال: متوسط مربع نمونه‌های سیگنال

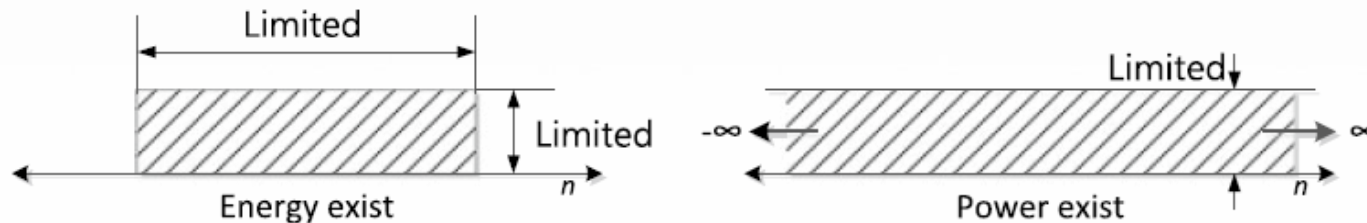
برای محاسبه توان سیگنال‌های متناوب، متوسط را می‌توان روی یک تناوب محاسبه کرد:

$$P_x = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} |x[n]|^2 \quad N: \text{fundamental period}$$

سیگنال توان و سیگنال انرژی (وجود توان و انرژی):

سیگنال انرژی (شرط وجود انرژی): سیگنالی که دارای انرژی محدود غیر صفری باشد.

سیگنال توان (شرط وجود توان): سیگنالی که دارای توان محدود غیر صفری باشد.



سیگنال‌های توان دارای انرژی بی‌نهایت و
سیگنال‌های انرژی دارای توان صفر می‌باشند.

مثال: ارزیابی توان و انرژی سیگنال

برای هر یک از سیگنال‌های زیر، وجود توان و انرژی را ارزیابی کنید.

الف: $x_1[n] = \cos\left(\frac{2\pi}{4}n\right)$

ب: $x_2[n] = \tan\left(\frac{2\pi}{8}n\right)$

ج: $x_3[n] = 0.5^n$

د: $x_4[n] = 2^n u[-n]$

ه: $x_5[n] = 1$

مثال: ارزیابی توان و انرژی سیگنال

برای هر یک از سیگنال‌های زیر، وجود توان و انرژی را ارزیابی کنید.

الف: $x_1[n] = \cos\left(\frac{2\pi}{4}n\right)$

حل الف: با توجه به ماهیت سیگنال، متناوب بودن و مقدار توان سیگنال را ارزیابی می‌کنیم.

$$\frac{2\pi}{\Omega_0} = \frac{2\pi}{2\pi/4} = 4 \Rightarrow N = 4$$

$$P_{x1} = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^3 \left| \cos\left(\frac{2\pi}{4}n\right) \right|^2 = \frac{1}{4} \{1 + 0 + 1 + 0\} = \frac{1}{2}$$

بنابراین $x_1[n]$ «سیگنال توان» است.

مثال: ارزیابی توان و انرژی سیگنال

برای هر یک از سیگنال‌های زیر، وجود توان و انرژی را ارزیابی کنید.

ب: $x_2[n] = \tan\left(\frac{2\pi}{8}n\right)$

حل ب: با توجه به ماهیت سیگنال، متناوب بودن و مقدار توان سیگنال $x_2[n]$ را ارزیابی می‌کنیم.

$$\frac{2\pi}{\Omega_0} = \frac{2\pi}{2\pi/8} = 8 \Rightarrow N = 8$$

$$\Rightarrow P_{x_2} = \frac{1}{8} \sum_{n=0}^7 \left| \tan\left(\frac{2\pi}{8}n\right) \right|^2 = \frac{1}{8} \{0 + 1 + \infty + 1 + 0 + 1 + \infty + 1\}$$

$$\Rightarrow P_{x_2} \rightarrow \infty$$

بنابراین $x_2[n]$ «نه سیگنال توان و نه سیگنال انرژی» است.

مثال: ارزیابی توان و انرژی سیگنال

برای هر یک از سیگنال‌های زیر، وجود توان و انرژی را ارزیابی کنید.

ج: $x_3[n] = 0.5^n$

حل ج: با توجه به ماهیت سیگنال، توان را ارزیابی می‌کنیم.

$$\begin{aligned} P_{x3} &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{+N} |x_3[n]|^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{+N} 0.5^{2n} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{+N} 0.25^n = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \cdot \frac{0.25^{-N} - 0.25^{N+1}}{1 - 0.25} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \cdot \frac{4^N - 0.25^{N+1}}{0.75} \end{aligned}$$

با توجه به $\frac{\infty}{\infty}$ شدن عبارت، از قاعده هوپیتال برای

رفع ابهام استفاده می‌کنیم:

hint: $\frac{d}{dx} a^x = \ln(a) a^x$

$$= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{\ln(4) 4^N - \ln(0.25) 0.25^{N+1}}{0.75} \Rightarrow P_{x3} \rightarrow \infty$$

بنابراین $x_3[n]$ «نه سیگنال توان و نه سیگنال انرژی» است.

مثال: ارزیابی توان و انرژی سیگنال

برای هر یک از سیگنال‌های زیر، وجود توان و انرژی را ارزیابی کنید.

$$\text{د: } x_4[n] = 2^n u[-n]$$

حل د: با توجه به ماهیت سیگنال، انرژی سیگنال را ارزیابی می‌کنیم.

$$\begin{aligned} E_{x_4} &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x_4[n]|^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |2^n u[-n]|^2 = \sum_{n=-\infty}^0 2^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-2n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (0.25)^n = \frac{1}{1-0.25} = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

بنابراین $x_4[n]$ «سیگنال انرژی» است.

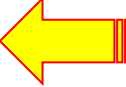
$$\text{ه: } x_5[n] = 1$$

حل ه: با توجه به ماهیت سیگنال، توان سیگنال را ارزیابی می‌کنیم.

$$\Rightarrow P_{x_5} = 1$$

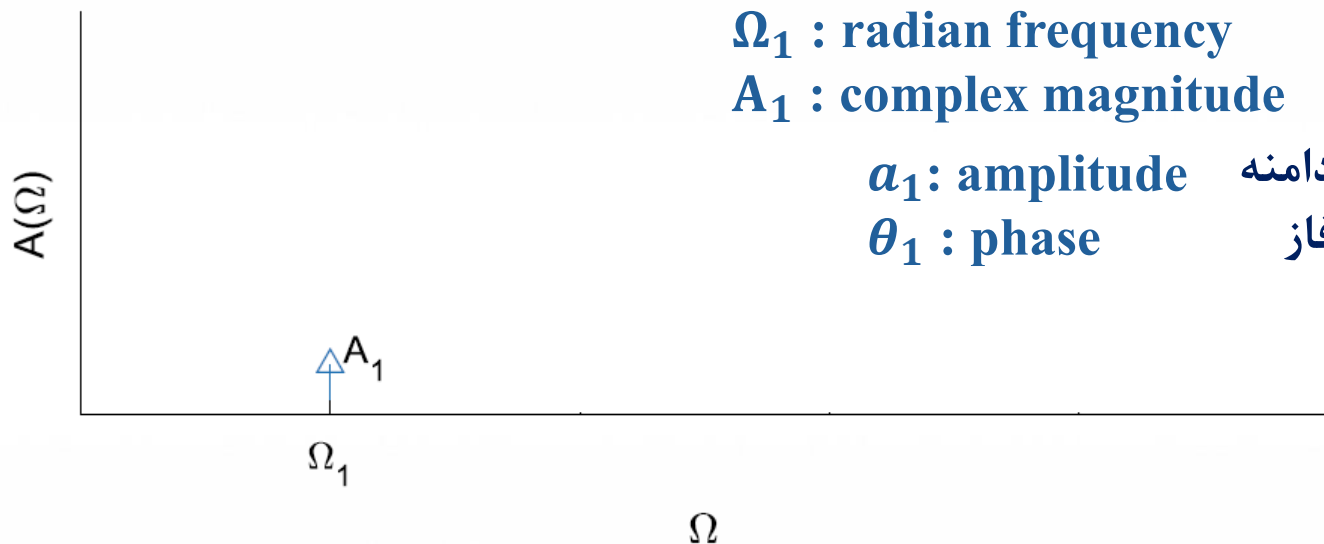
بنابراین $x_5[n]$ «سیگنال توان» است.

عناوین بحث:

- ✓ سیگنال های سینوسی پیوسته
- ✓ نمونه برداری
- ✓ بازنمایی سیگنال
- ◯ فرکانس در سیگنال زمان گسسته 
- ◯ مثال های مروری

سیگنال زمان پیوسته تک فرکانس:

$$x(t) = A_1 e^{j\Omega_1 t} = a_1 e^{j\theta_1} e^{j\Omega_1 t} = a_1 e^{j(\Omega_1 t + \theta_1)}$$



فرکانس رادیان
اندازه مختلط

a_1 : amplitude
 θ_1 : phase

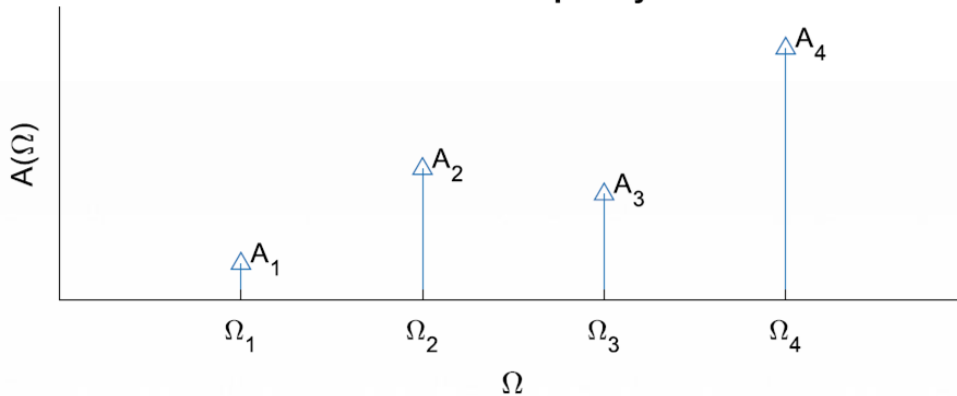
دامنه
فاز

سیگنال زمان پیوسته چند فرکانسی:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k e^{j\Omega_k t} = \dots + A_1 e^{j\Omega_1 t} + A_1 e^{j\Omega_1 t} + A_1 e^{j\Omega_1 t} + \dots$$

برای Ω_k گسسته:

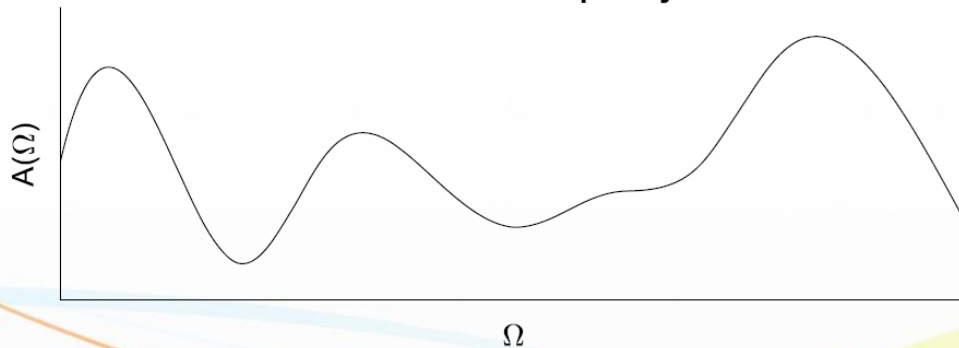
Discrete frequency



$\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \dots$: radian frequencies
 $A_1, A_2, A_3, \dots$: complex magnitudes

$$x(t) = \int_{\Omega=-\infty}^{+\infty} A_{\Omega} e^{j\Omega t} d\Omega$$

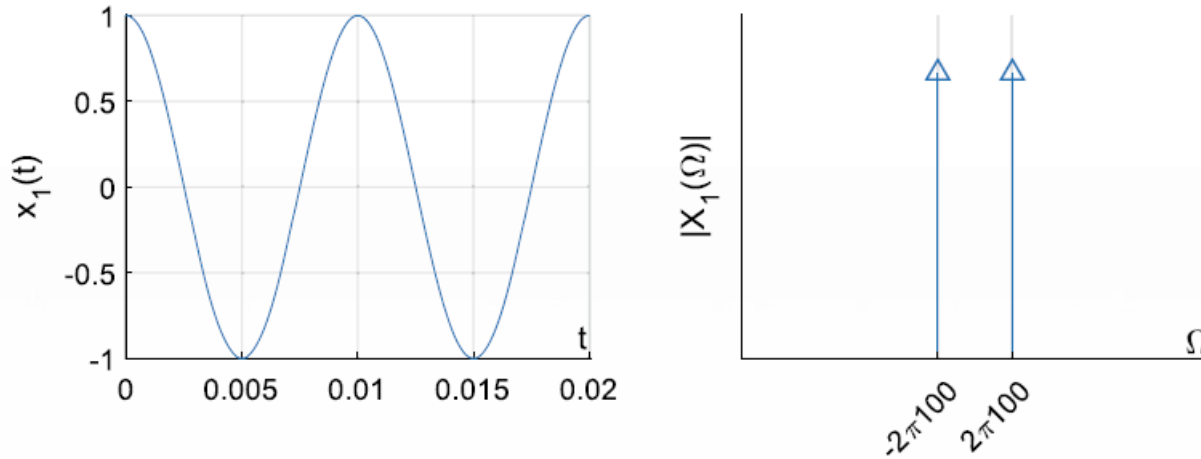
Continuous frequency



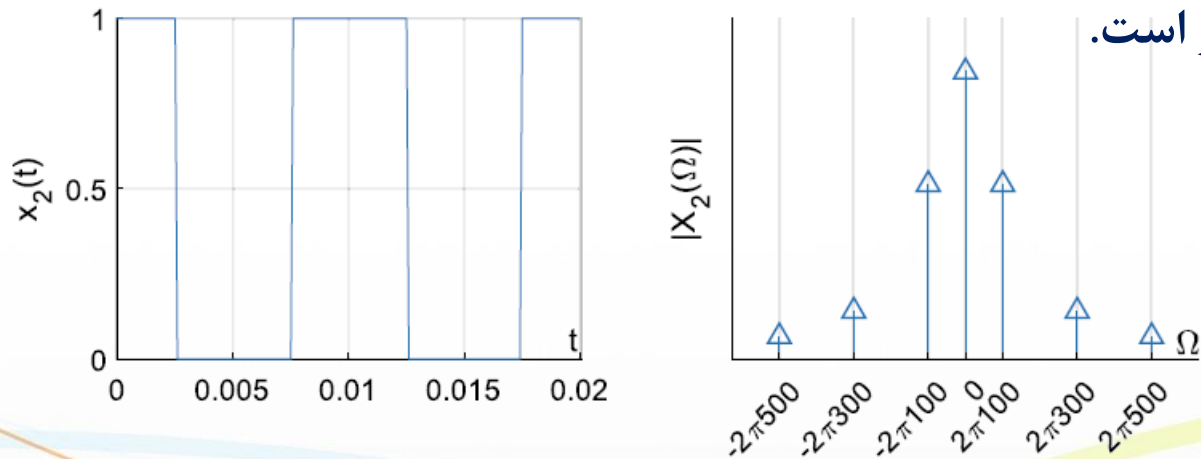
برای Ω_k پیوسته:

سیگنال تک فرکانس / سیگنال چند فرکانسی:

سیگنال کسینوسی با دوره تناوب 0.01 ثانیه شامل مولفه فرکانسی 100 هرتز است (فرکانس‌های مثبت و منفی).



موج مربعی با دوره تناوب 0.01 ثانیه شامل مولفه فرکانسی 100 هرتز و همچنین مولفه‌های فرکانسی با فرکانس ضرایب صحیح 100 هرتز است.



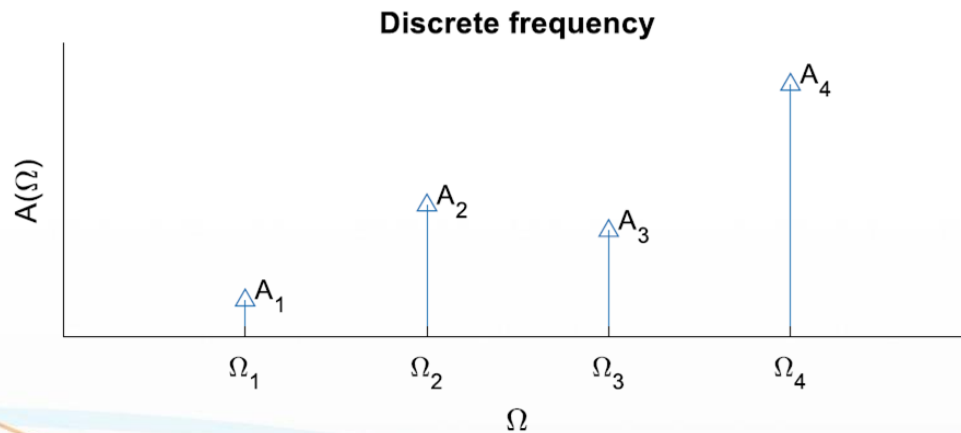
شباهت!

سیگنال در حوزه زمان گسسته توسط ترکیب خطی توابع ضربه قابل بازنمایی است:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] \delta[n - k] = \dots + x[-1] \delta[n + 1] + x[0] \delta[n] + x[1] \delta[n - 1] + \dots$$

به طور مشابه، $e^{j\Omega t}$ مولفه اساسی در حوزه فرکانس است.

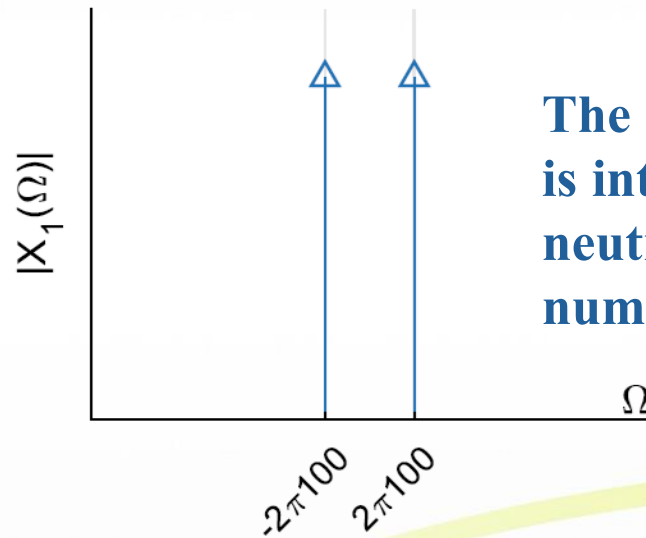
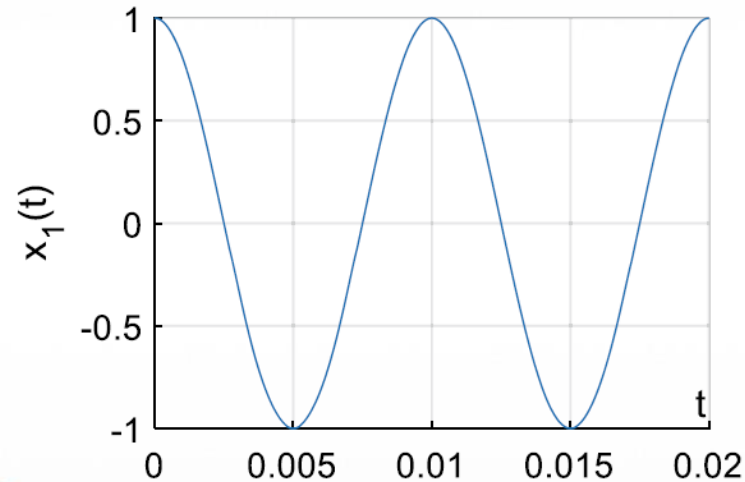
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k e^{j\Omega_k t} = \dots + A_1 e^{j\Omega_1 t} + A_1 e^{j\Omega_1 t} + A_1 e^{j\Omega_1 t} + \dots$$



سیگنال‌های حقیقی تک فرکانس:

$$\begin{aligned} a_1 \cos(\Omega_1 t + \theta_1) &= \frac{1}{2} (a_1 e^{j(\Omega_1 t + \theta_1)} + a_1 e^{-j(\Omega_1 t + \theta_1)}) \\ &= \frac{1}{2} (a_1 e^{j\theta_1} e^{j\Omega_1 t} + a_1 e^{-j\theta_1} e^{-j\Omega_1 t}) = \frac{1}{2} (A_1 e^{j\Omega_1 t} + A_1^* e^{-j\Omega_1 t}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_1 \sin(\Omega_1 t + \theta_1) &= \frac{1}{2j} (b_1 e^{j(\Omega_1 t + \theta_1)} - b_1 e^{-j(\Omega_1 t + \theta_1)}) \\ &= \frac{1}{2j} (b_1 e^{j\theta_1} e^{j\Omega_1 t} - b_1 e^{-j\theta_1} e^{-j\Omega_1 t}) = \frac{1}{2j} (B_1 e^{j\Omega_1 t} - B_1^* e^{-j\Omega_1 t}) \end{aligned}$$

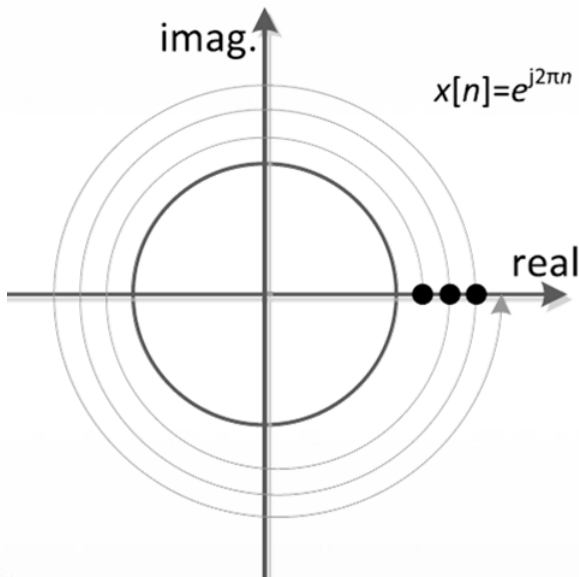
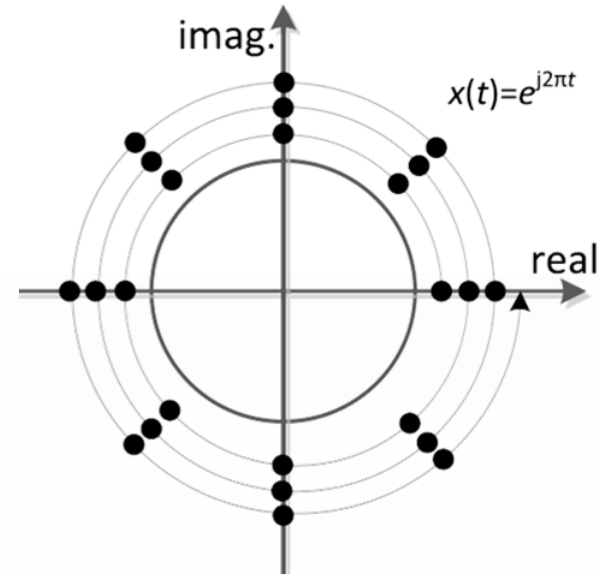


The negative frequency is introduced in order to neutralize the complex numbers.

فرکانس در سیگنال‌های زمان گسسته:

Continuous time signal notation: $x(t) = e^{j2\pi t}$, $t \in \mathbb{R}$

$x(t) = e^{j2\pi t}$ نشانگر یک دور بر ثانیه است.



Discrete time signal notation: $x[n] = e^{j2\pi n}$, $n \in \mathbb{Z}$

$x[n] = e^{j2\pi n}$, $n \in \mathbb{Z}$ در هر نمونه‌ی دنباله (n) ، یک دور می‌چرخد.
بنابراین برای پارامترهای داده شده، حرکت زاویه‌ای دیده نمی‌شود.



The **sampling procedure** reads the continuous time data in every T_s interval to obtain the discrete time sequence.

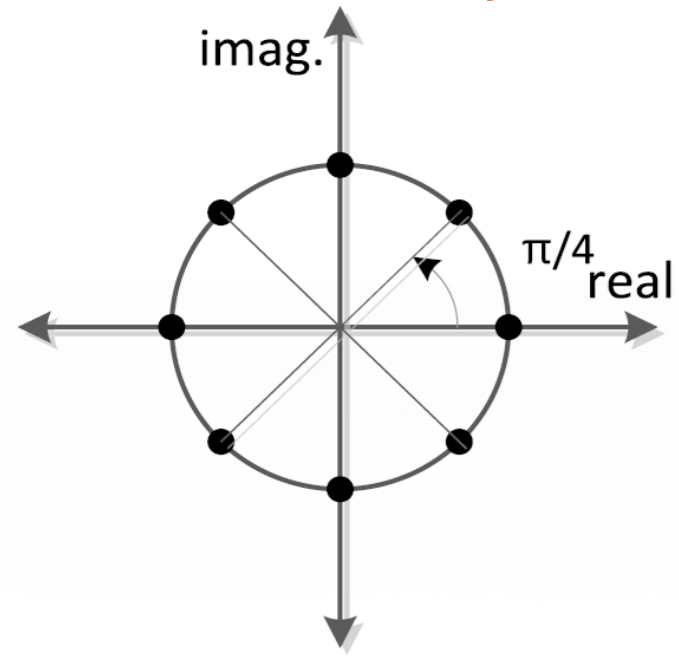
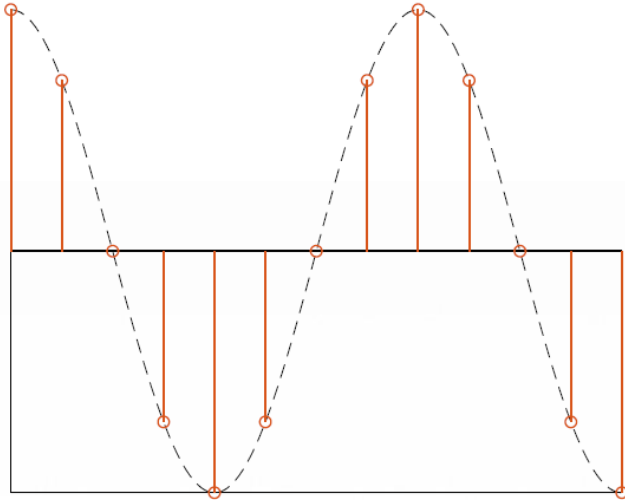
$$x(t) = e^{j\Omega t} \quad \xrightarrow{\text{Sampling : } t = nT_s} \quad x[n] = e^{j\Omega T_s n} = e^{j2\pi f T_s n} = e^{j2\pi \frac{f}{f_s} n} = e^{j\omega n}$$

$\omega = 2\pi \frac{f}{f_s}$: discrete frequency

According to Nyquist rate, the sampling frequency should be at least twice greater than the given frequency:

$$f_s > 2f \quad \Rightarrow \quad \frac{f}{f_s} < \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \omega = 2\pi \frac{f}{f_s} < \pi$$

Sampling the Cosine with different f_s :



$$\omega = \frac{\pi}{4} \Rightarrow 2\pi \frac{f}{f_s} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow f_s = 8f$$

The one period signal is sampled eight times in cosine function as well as the complex circle.

The sampling is dense enough to **recover** the given continuous signal by connecting the neighbor dots. So, it is **proper sampling**.

Periodic Spectrum:

The frequency distribution for the discrete time signal is periodic in spectrum.

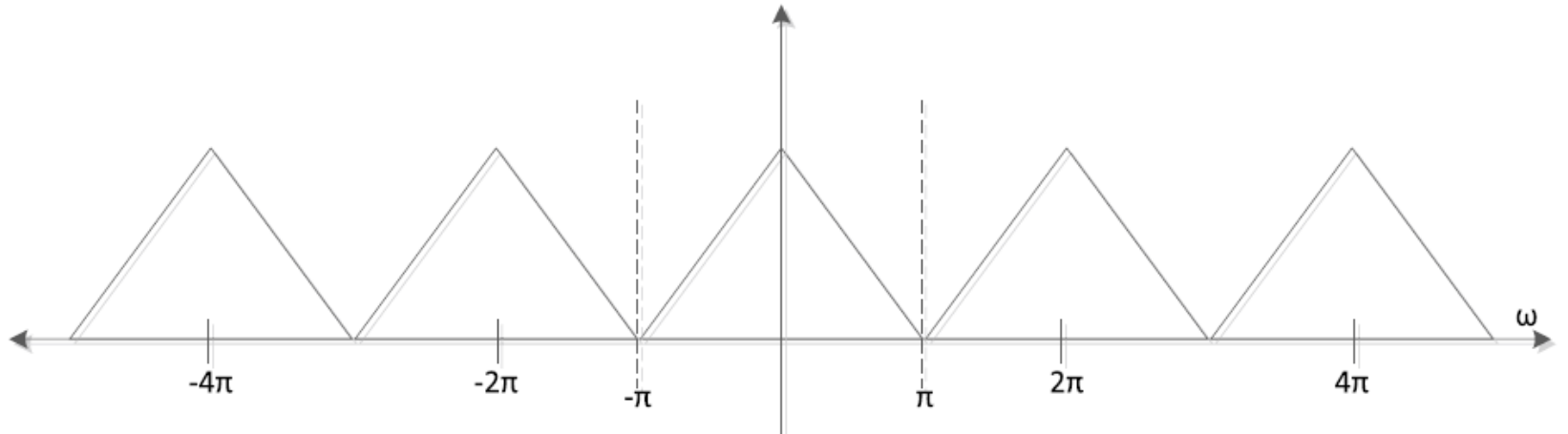


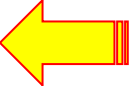
Fig. 2.38 Spectral periodicity in discrete frequency ω

Frequency Aliasing:

The spectrum is repeated for every 2π interval for positive and negative frequency range as well.

If the discrete frequency crosses the $\pm\pi$ borders, then spectrum between the neighbours starts to be overlapped and contaminated.

عناوین بحث:

- ✓ سیگنال های سینوسی پیوسته
- ✓ نمونه برداری
- ✓ بازنمایی سیگنال
- ✓ فرکانس در سیگنال زمان گسسته
- ◯ مثال های مروری 

عناوین بحث:

- ✓ سیگنال‌های سینوسی پیوسته
- ✓ نمونه‌برداری
- ✓ بازنمایی سیگنال
- ✓ فرکانس در سیگنال زمان گسسته
- ✓ مثال‌های مروری



هر خنجر که در جستن آنی آنی ...