پردازش سیگنال دیجیتال

فصل دوم:
فرکانس و سیگنال‌ها در حوزه گسسته

دکتر مالکی

دانشگاه سمنان

اهداف فصل:

هدف این فصل، درک مفهوم فرکانس در سیگنال زمان گسسته است. بدین منظور، ابتدا مفهوم فرکانس در سیگنال زمان پیوسته و مفهوم نمونه‌برداری یادآوری می‌گردد.

عناوین مبحث:

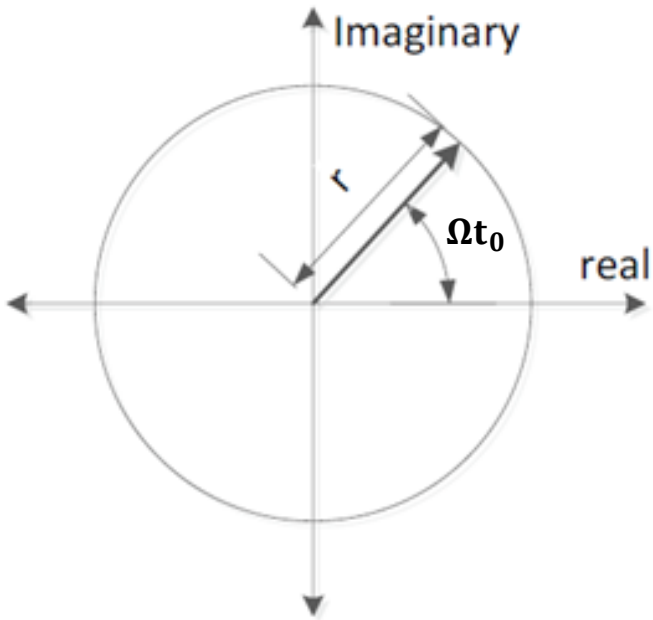
- سیگنال‌های سینوسی پیوسته
- نمونه‌برداری
- بازنمایی سیگنال
- فرکانس در سیگنال زمان گسسته
- مثال‌های مروری

سیگنال تک‌فرکانس زمان پیوسته:

$x(t) = re^{j\Omega t}$

r: شعاع دوران

Ωt: زاویه رادیان

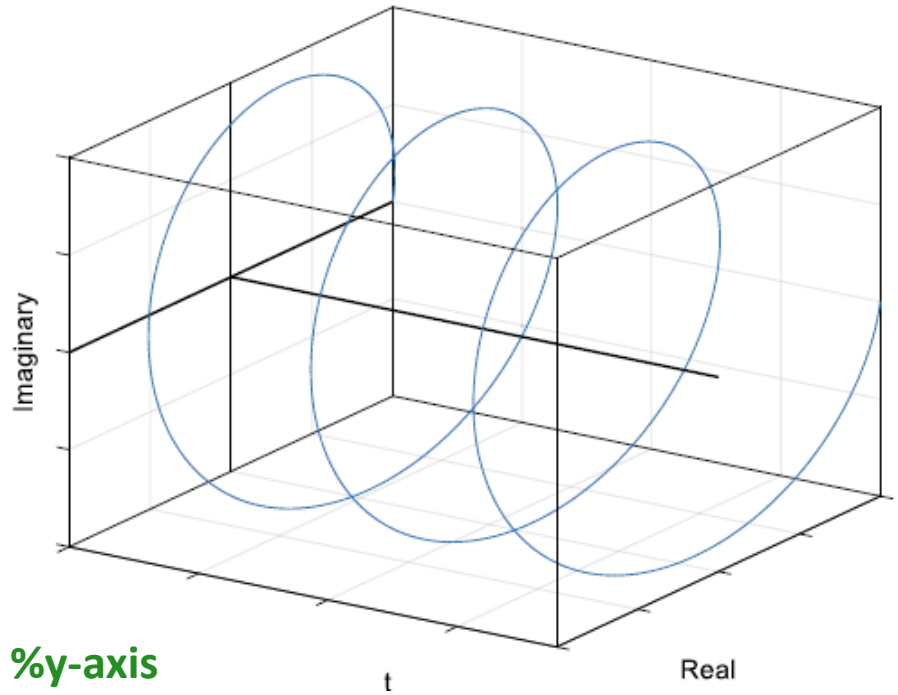


با افزایش t ، $x(t)$ روی دایره‌ای به شعاع r در صفحه مختلط جابجا می‌شود و در هر ثانیه، فاز آن به اندازه Ω رادیان تغییر می‌کند.

$\Omega = 2\pi f \Rightarrow f = \frac{\Omega}{2\pi}$ با واحد دور بر ثانیه یا هرتز

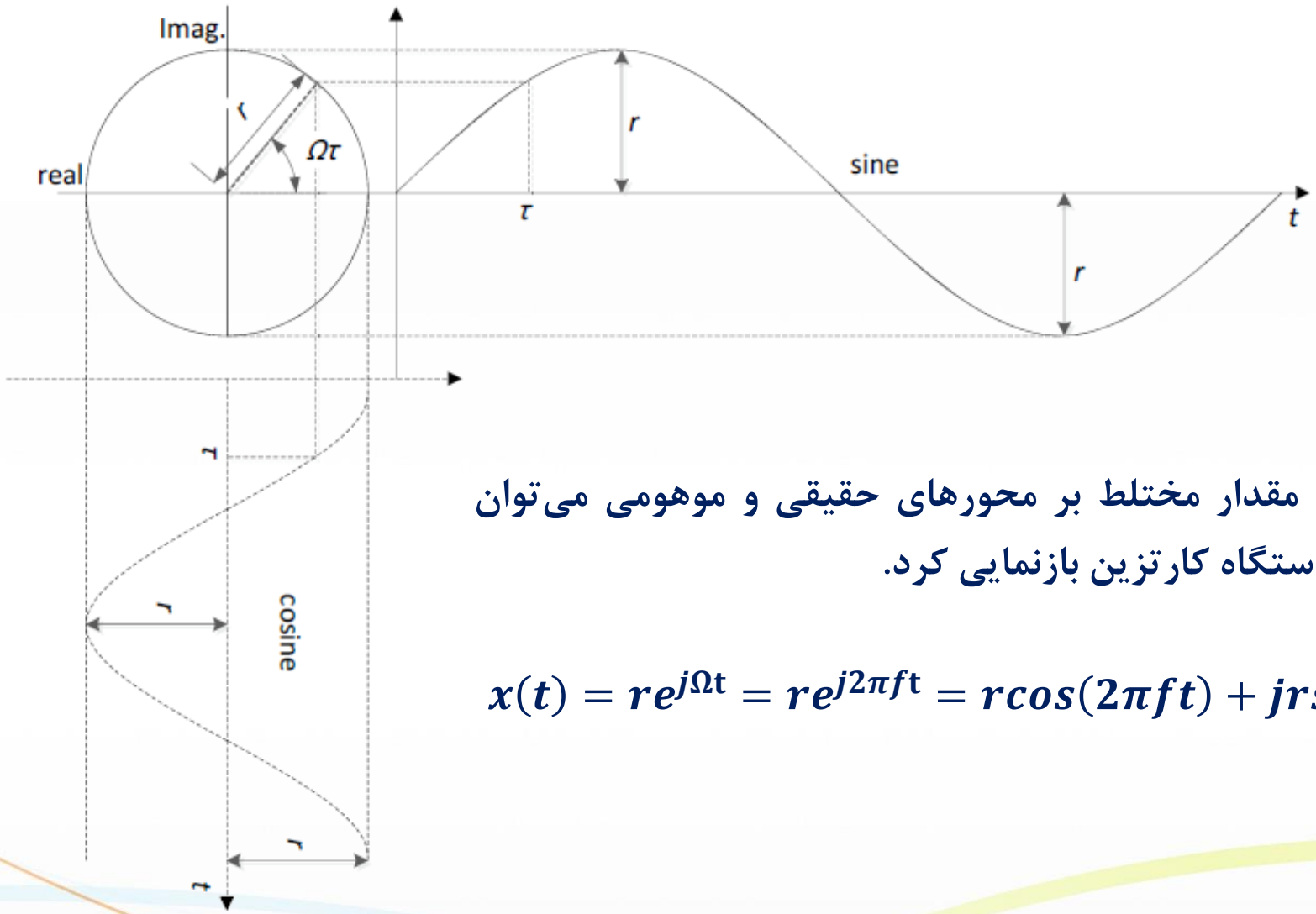
ترسیمه سه بعدی سیگنال نمایی مختلط:

سیگنال نمایی مختلط $x(t) = re^{j\Omega t}$ را بر حسب زمان رسم کنید.




```
xt = @(t) t;
yt = @(t) cos(t);
zt = @(t) sin(t);
fplot3(xt,yt,zt,[0 6*pi]); %3-D plot
xL = xlim;
yL = ylim;
zL = zlim;
line([0 0], yL, [0 0],'LineWidth',1,'Color','black'); %y-axis
line(xL, [0 0], [0 0],'LineWidth',1,'Color','black'); %x-axis
line([0 0], [0 0], zL,'LineWidth',1,'Color','black'); %z-axis
...
```

بازنمایی سیگنال نمایی مختلط در دستگاه کارتزین:



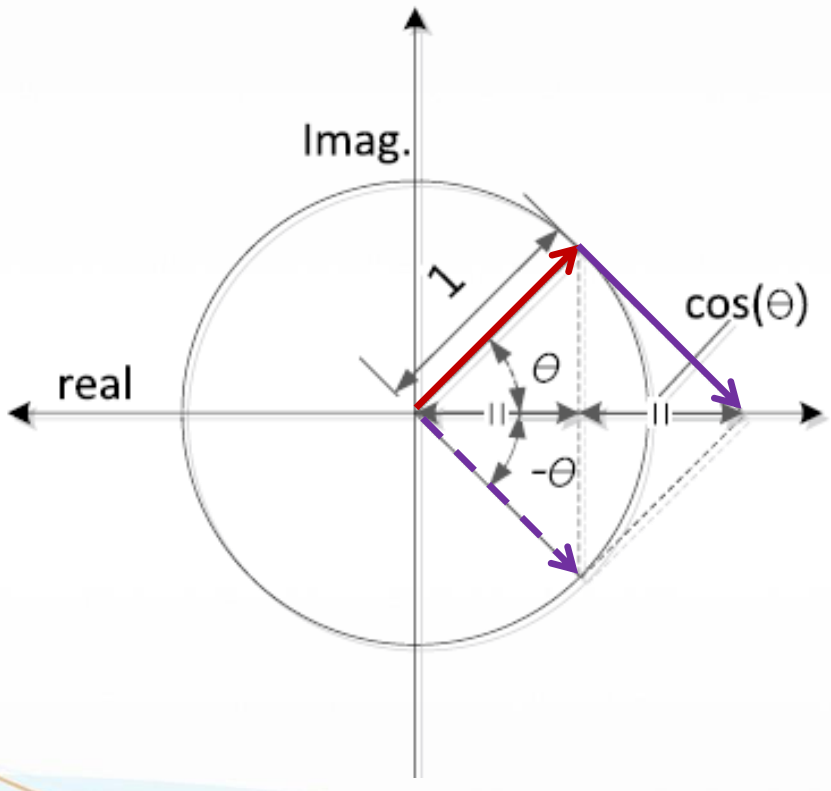
با تصویر کردن مقدار مختلط بر محورهای حقیقی و موهومی می‌توان سیگنال را در دستگاه کارتزین بازنمایی کرد.

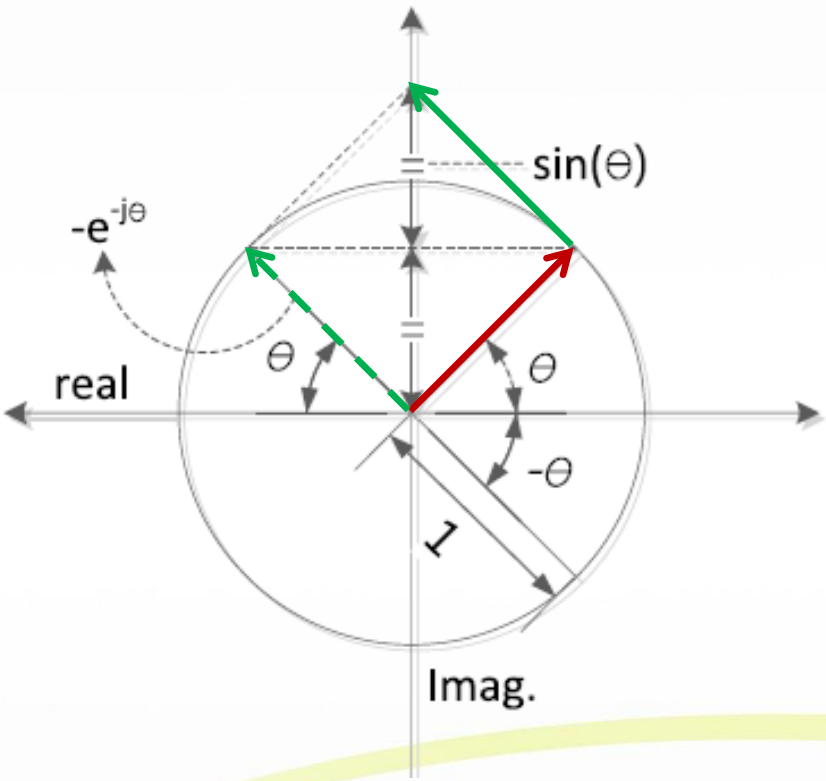
$$x(t) = re^{j\Omega t} = re^{j2\pi f t} = r\cos(2\pi f t) + jr\sin(2\pi f t)$$

رابطه اولر و بازنمایی ترسیمی آن:

$$\cos(\theta) = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$$

$$\sin(\theta) = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$$





مولفه‌های فرکانسی سینوس و کسینوس:

با استفاده از فرمول اولر، مولفه‌های فرکانسی $r\cos(\Omega t)$ و $r\sin(\Omega t)$ را تعیین کنید.

$$r\cos(\Omega t) = r.\frac{1}{2}\left(e^{j\Omega t} + e^{-j\Omega t}\right) = \frac{r}{2}e^{j\Omega t} + \frac{r}{2}e^{-j\Omega t}$$

$$r\sin(\Omega t) = r.\frac{1}{2j}\left(e^{j\Omega t} - e^{-j\Omega t}\right) = \frac{r}{2j}e^{j\Omega t} - \frac{r}{2j}e^{-j\Omega t}$$

این بدان معنا است که سینوس و کسینوس حاوی مولفه‌های فرکانسی Ω و $-\Omega$ است.

تجزیه کسینوسی دارای فاز به سینوس و کسینوس بدون فاز:

نشان دهید کسینوسی دارای فاز را می‌توان به ترکیب خطی سینوس و کسینوس بدون فاز تجزیه کرد.

$$cos(\Omega t+\theta)=cos(\theta)cos(\Omega \mathrm{t})-sin(\theta)sin(\Omega \mathrm{t})$$

حل:

$$cos(\Omega t+\theta)=Re\{e^{j(\Omega t+\theta)}\}\ =Re\{e^{j\theta}e^{j\Omega t}\}$$

$$=Re\{[cos(\theta)+jsin(\theta)][cos(\Omega t)+jsin(\Omega t)]\}$$

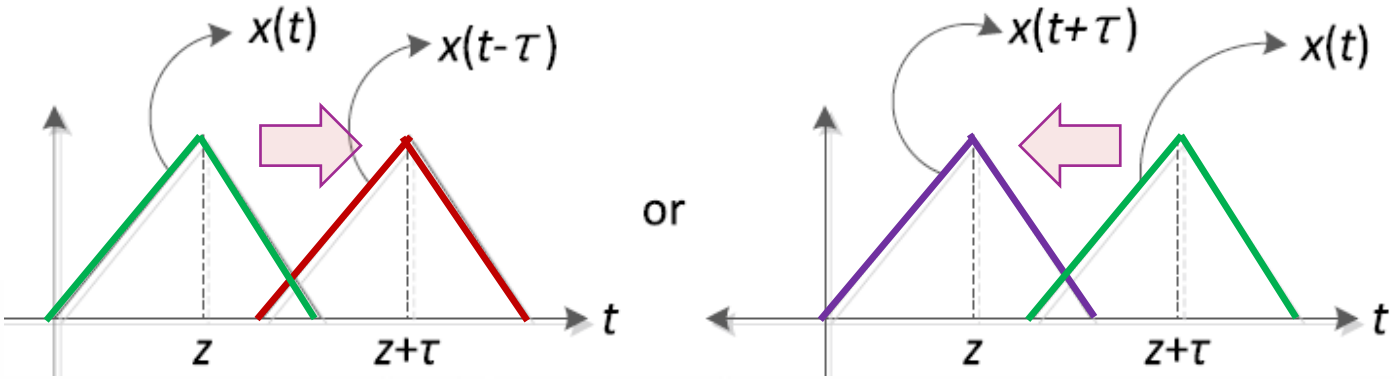
$$=Re\{cos(\theta)cos(\Omega t)+jcos(\theta)sin(\Omega t)+jsin(\theta)cos(\Omega t)-sin(\theta)sin(\Omega t)\}$$

$$=cos(\theta)cos(\Omega \mathrm{t})-sin(\theta)sin(\Omega \mathrm{t})$$

$$\Rightarrow\quad cos(\Omega t+\theta)=cos(\theta)cos(\Omega \mathrm{t})-sin(\theta)sin(\Omega \mathrm{t})$$

یادآوری جابجایی زمانی سیگنال

اگر مقدار مثبت τ به متغیر مستقل سیگنال (زمان t) افزوده یا از آن کاسته شود سیگنال به همان اندازه به ترتیب به سمت چپ یا راست جابجا می‌گردد.

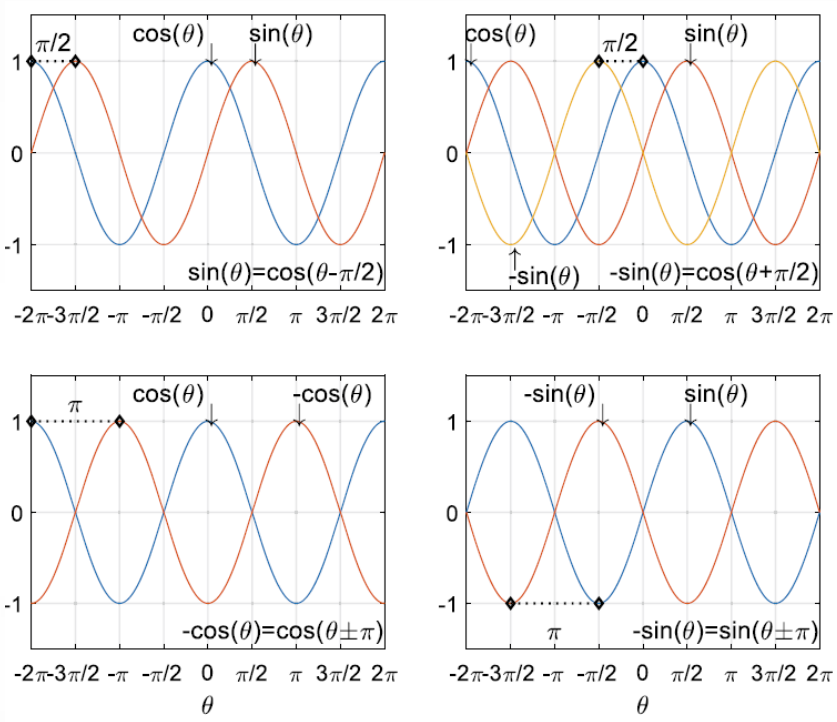


بازنمایی ترسیمی چند معادل مثلثاتی:

```
ome = -2*pi:pi/100:2*pi;
x1 = cos(ome);
x2 = sin(ome);
str = {'-2\pi','-3\pi/2','-\pi','-\pi/2','0','\pi/2','\pi','3\pi/2','2\pi'};

figure,
subplot(221), plot(ome,x1,ome,x2), grid
xticks([-2*pi -3*pi/2 -pi -pi/2 0 pi/2 pi 3*pi/2 2*pi])
xticklabels(str);
xlim([-2*pi 2*pi])
ylim([-1.5 1.5])

subplot(222), plot(ome,x1,ome,x2,ome,-x2), grid
xticks([-2*pi -3*pi/2 -pi -pi/2 0 pi/2 pi 3*pi/2 2*pi])
xticklabels(str);
xlim([-2*pi 2*pi])
ylim([-1.5 1.5])
```



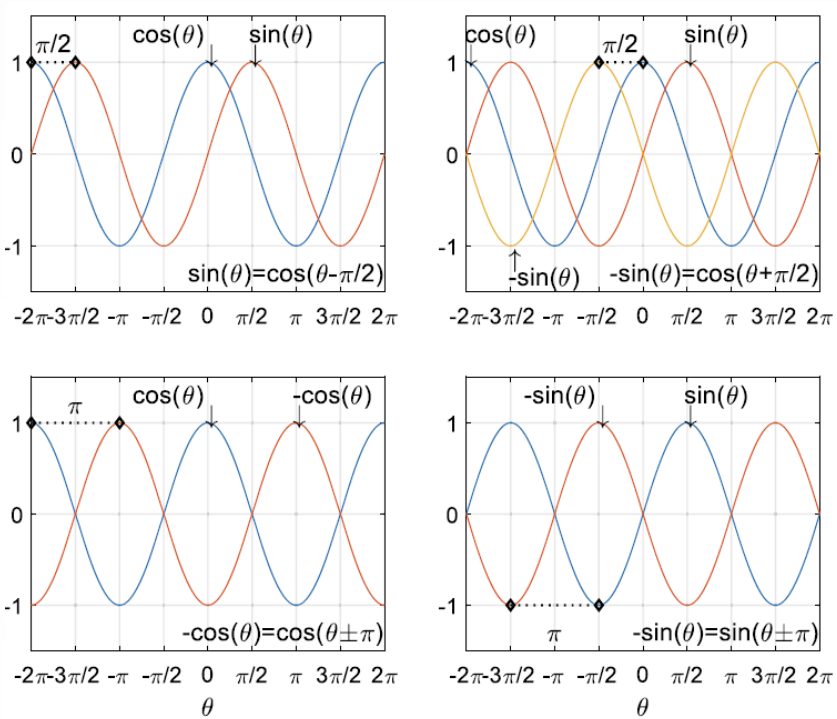
ادامه دارد

بازنمایی ترسیمی چند معادل مثلثاتی:

ادامه:

```
subplot(223), plot(ome,x1,ome,-x1), grid
xticks([-2*pi -3*pi/2 -pi -pi/2 0 pi/2 pi 3*pi/2 2*pi])
xticklabels(str);
xlim([-2*pi 2*pi])
ylim([-1.5 1.5])
xlabel('\theta')

subplot(224), plot(ome,x2,ome,-x2), grid
xticks([-2*pi -3*pi/2 -pi -pi/2 0 pi/2 pi 3*pi/2 2*pi])
xticklabels(str);
xlim([-2*pi 2*pi])
ylim([-1.5 1.5])
xlabel('\theta')
```



مثال:

مفهوم رابطه زیر چیست؟

$$A\cos(\Omega t+\theta) = A\cos(\theta)\cos(\Omega t) - A\sin(\theta)\sin(\Omega t)$$

حل:

ترکیب خطی $\cos(\Omega t)$ و $\sin(\Omega t)$ وزن‌دار می‌تواند تابع کسینوسی با همان فرکانس و هر دامنه و فاز دلخواهی را فراهم سازد. وزن‌ها ($A\cos(\theta)$ و $-A\sin(\theta)$) بر اساس دامنه (A) و فاز (θ) سیگنال تعیین می‌گردند.

$\cos(\Omega t)$ سیگنالی زوج و $\sin(\Omega t)$ سیگنالی فرد است. بنابراین رابطه داده شده نشانگر تجزیه سیگنال $A\cos(\Omega t+\theta)$ (که لزوما سیگنال زوج یا فرد نیست) به بخش‌های زوج و فرد است.

$$A\cos(\Omega t+\theta) = A\cos(\theta)\cos(\Omega t) - A\sin(\theta)\sin(\Omega t)$$

بخش زوج سیگنال:

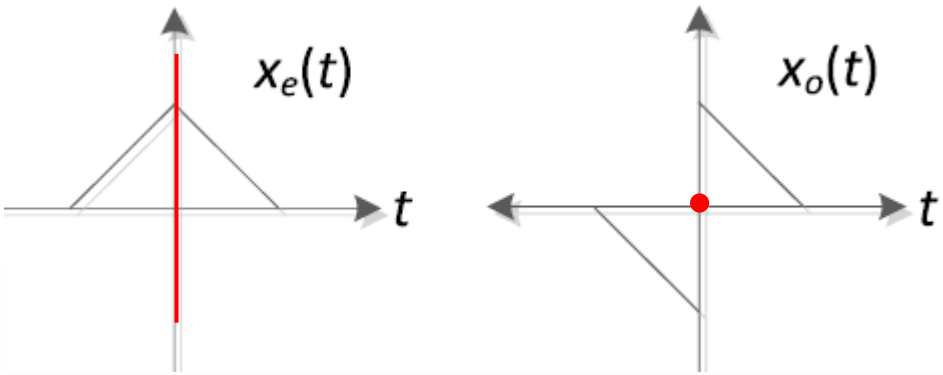
بخش فرد سیگنال:

یادآوری سیگنال‌های زوج و فرد:

تعریف سیگنال زوج : $x_e(t) = x_e(-t)$

تعریف سیگنال فرد : $x_o(t) = -x_o(-t)$

سیگنال زوج نسبت به محور y متقارن است و سیگنال فرد نسبت به مبدا دستگاه مختصات متقارن است.



یادآوری تجزیه سیگنال به بخش‌های زوج و فرد:

هر سیگنال دلخواهی را می‌توان به اجزای زوج و فرد تجزیه کرد.

$$x(t) = x_e(t) + x_o(t)$$

بخش زوج سیگنال:

بخش فرد سیگنال:

$$x_e(t) = \frac{1}{2}\{x(t) + x(-t)\}$$

$$x_o(t) = \frac{1}{2}\{x(t) - x(-t)\}$$

مثال:

بخش‌های زوج و فرد سیگنال $A\,cos(\Omega t+\theta)$ را به دست آورید.

حل به روش اول:

با توجه به رابطه $A\,cos(\Omega t+\theta)=A\,cos(\theta)\,cos(\Omega t)-A\,sin(\theta)\,sin(\Omega t)$

و علم به زوج بودن $cos(\Omega t)$ و فرد بودن $sin(\Omega t)$ داریم:

بخش زوج سیگنال : $x_e(t)=A\,cos(\theta)\,cos(\Omega t)$

بخش فرد سیگنال : $x_o(t)=-A\,sin(\theta)\,sin(\Omega t)$

حل به روش دوم:

$$x_e(t)=\frac{1}{2}\{x(t)+x(-t)\}=\frac{1}{2}\{A\,cos(\Omega t+\theta)+A\,cos(-\Omega t+\theta)\}$$

$$=\frac{A}{4}\left\{e^{j(\Omega t+\theta)}+e^{-j(\Omega t+\theta)}+e^{j(-\Omega t+\theta)}+e^{-j(-\Omega t+\theta)}\right\}$$

$$=\frac{A}{4}\left\{e^{j\Omega t}e^{j\theta}+e^{-j\Omega t}e^{-j\theta}+e^{-j\Omega t}e^{j\theta}+e^{j\Omega t}e^{-j\theta}\right\}$$

$$=\frac{A}{4}\left\{e^{j\Omega t}\,(e^{j\theta}+e^{-j\theta})+e^{-j\Omega t}(e^{j\theta}+e^{-j\theta})\right\}$$

$$=\frac{A}{2}\,cos(\theta)\left\{e^{j\Omega t}+e^{-j\Omega t}\right\}=A\,cos(\theta)cos(\Omega t)$$

مثال:

بخش‌های زوج و فرد سیگنال $A\,cos(\Omega t+\theta)$ را به دست آورید.

ادامه حل به روش دوم:

$$x_o(t)=\frac{1}{2}\{x(t)-x(-t)\}=\frac{1}{2}\{A\,cos(\Omega t+\theta)-A\,cos(-\Omega t+\theta)\}$$

$$=\frac{A}{4}\left\{e^{j(\Omega t+\theta)}+e^{-j(\Omega t+\theta)}-e^{j(-\Omega t+\theta)}-e^{-j(-\Omega t+\theta)}\right\}$$

$$=\frac{A}{4}\left\{e^{j\Omega t}e^{j\theta}+e^{-j\Omega t}e^{-j\theta}-e^{-j\Omega t}e^{j\theta}-e^{j\Omega t}e^{-j\theta}\right\}$$

$$=\frac{-A}{4j^2}\left\{e^{j\Omega t}\left(e^{j\theta}-e^{-j\theta}\right)-e^{-j\Omega t}\left(e^{j\theta}-e^{-j\theta}\right)\right\}$$

$$=\frac{-A}{2j}\,sin(\theta)\left\{e^{j\Omega t}-e^{-j\Omega t}\right\}=-A\,sin(\theta)sin(\Omega t)$$

استفاده از فازور برای ترکیب چند سینوسی هم‌فرکانس:

اگر چند سینوسی هم‌فرکانس داشته باشیم می‌توان آنها را با هم ترکیب کرد و با یک سینوسی با همان فرکانس بازنمایی نمود. این کار را با بهره بردن از مفهوم فازور به سادگی انجام داد.

فازور نشانگر بردار استاتیک سیگنال سینوسی است یعنی:

$$\boldsymbol{Phasor}\{\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{cos}(\boldsymbol{\Omega}\mathbf{t}+\boldsymbol{\theta})\} = \boldsymbol{A}\ \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{j\omega t}}$$

برای جمع کردن دو سیگنال سینوسی هم‌فرکانس، لازم است فازور آنها را با هم جمع کنیم و بر اساس فازور حاصل، سیگنال سینوسی حاصل را بنویسیم.

پشتوانه استفاده از فازور برای جمع کردن دو سینوسی:

$$A_1\, cos(\Omega t + \theta_1) + A_2\, cos(\Omega t + \theta_2) = Re\{A_1\, e^{j(\Omega t+\theta_1)}\} + Re\{A_2\, e^{j(\Omega t+\theta_2)}\}$$

$$= Re\{A_1 e^{j\Omega t} e^{j\theta_1} + A_2 e^{j\Omega t} e^{j\theta_2}\} \;= Re\{e^{j\Omega t}(A_1 e^{j\theta_1} + A_2 e^{j\theta_2})\}$$

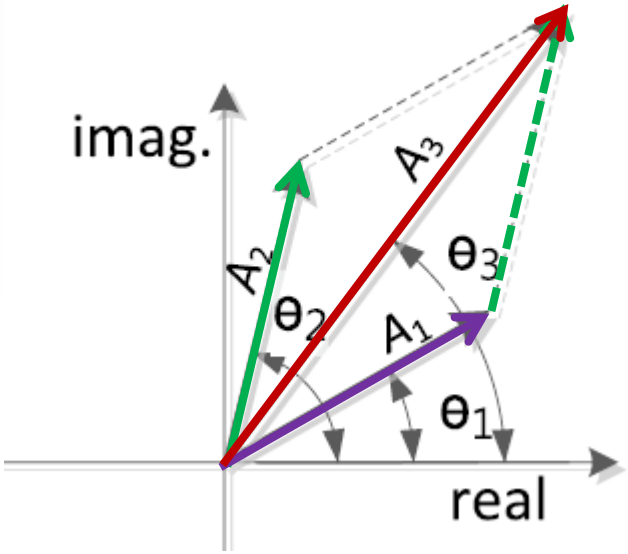
اگر مجموع دو مقدار مختلط را به صورت یک مقدار مختلط بنویسیم، یعنی: $A_1 e^{j\theta_1} + A_2 e^{j\theta_2} = A_3 e^{j\theta_3}$

$$= Re\{e^{j\Omega t}(A_3 e^{j\theta_3})\} \;= Re\{A_3 e^{j(\Omega t+\theta_3)}\} \;= A_3 cos(\Omega t + \theta_3)$$

بنابراین، برای جمع کردن دو سیگنال سینوسی هم‌فرکانس، لازم است فازور آنها را با هم جمع کنیم و بر اساس فازور حاصل، سیگنال سینوسی حاصل را بنویسیم.

روش جمع کردن فازورها به شیوه ترسیمی با جمع بردارها:

برای جمع کردن فازورها که مقادیری مختلط هستند می‌توان از جمع برداری آنها در مختصات قطبی بهره برد.



$$A_1 e^{j\theta_1} + A_2 e^{j\theta_2} = A_3 e^{j\theta_3}$$

مثال:

حاصل جمع عبارت $cos(\Omega t) + sin(\Omega t + \pi)$ را به فرم یک سیگنال کسینوسی بنویسید.

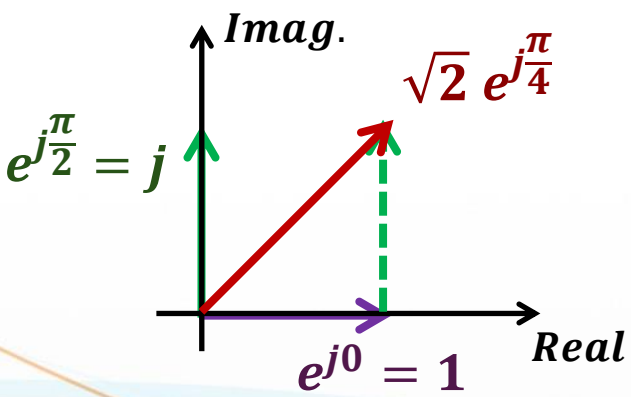
حل: چون یکی از سینوس و دیگری کسینوس است ابتدا هر دو را به فرم کسینوس می‌نویسم:

$$cos(\Omega t) + sin(\Omega t + \pi) = cos(\Omega t) + sin\left(\Omega t + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= cos(\Omega t) + cos\left(\Omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

با بهره‌گیری از فازور داریم:

$$Phasor\{cos(\Omega t)\} + Phasor\left\{cos\left(\Omega t + \frac{\pi}{2}\right)\right\} = e^{j0} + e^{j\frac{\pi}{2}} = 1 + j = \sqrt{2}\, e^{j\frac{\pi}{4}}$$



$$\Rightarrow \quad cos(\Omega t) + sin(\Omega t + \pi) = \sqrt{2}\, cos\left(\Omega t + \frac{\pi}{4}\right)$$

بازنمایی هر سیگنال دلخواه با ترکیب خطی پیوسته سینوسی:

ترکیب خطی پیوسته از سینوسی‌ها می‌تواند هر سیگنال دلخواهی را بازنمایی کند:

$$x(t) = \int_0^{+\infty} m(\Omega)cos\big(\Omega t + \theta(\Omega)\big)d\Omega \qquad ,\Omega \epsilon R$$

$$= \int_0^{+\infty} m(\Omega)\big[cos\big(\theta(\Omega)\big)cos(\Omega t) - sin\big(\theta(\Omega)\big)sin(\Omega t)\big]d\Omega$$

$$= \int_0^{+\infty} m(\Omega)\left[cos\big(\theta(\Omega)\big)\frac{1}{2}\big(e^{j\Omega t} + e^{-j\Omega t}\big) - sin\big(\theta(\Omega)\big)\frac{-j}{2}\big(e^{j\Omega t} - e^{-j\Omega t}\big)\right]d\Omega$$

$$= \int_0^{+\infty} m(\Omega)\left[\frac{cos\big(\theta(\Omega)\big) + jsin\big(\theta(\Omega)\big)}{2}e^{j\Omega t} + \frac{cos\big(\theta(\Omega)\big) - jsin\big(\theta(\Omega)\big)}{2}e^{-j\Omega t}\right]d\Omega$$

$$= \int_0^{+\infty} m(\Omega)\left[\frac{e^{j\theta(\Omega)}}{2}e^{j\Omega t} + \frac{e^{-j\theta(\Omega)}}{2}e^{-j\Omega t}\right]d\Omega$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{1}{2}m(\Omega)e^{j\theta(\Omega)}e^{j\Omega t}d\Omega + \int_0^{+\infty} \frac{1}{2}m(\Omega)e^{-j\theta(\Omega)}e^{-j\Omega t}d\Omega$$

$$= \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{2} m(\Omega) e^{j\theta(\Omega)} e^{j\Omega t} d\Omega + \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{2} m(\Omega) e^{-j\theta(\Omega)} e^{-j\Omega t} d\Omega$$

$$= \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{2} m(\Omega) e^{j\theta(\Omega)} e^{j\Omega t} d\Omega + \int_{0}^{-\infty} \frac{1}{2} m(-\Omega) e^{-j\theta(-\Omega)} e^{-j(-\Omega)t} (-d\Omega)$$

با فرض تقارن زوج برای اندازه $m(\Omega)$ و تقارن فرد برای فاز $\theta(\Omega)$ داریم:

$$= \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{2} m(\Omega) e^{j\theta(\Omega)} e^{j\Omega t} d\Omega + \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{2} m(\Omega) e^{j\theta(\Omega)} e^{j(\Omega)t} (+d\Omega)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} m(\Omega) e^{j\theta(\Omega)} e^{j\Omega t} d\Omega$$

$$c(\Omega) = \frac{1}{2} m(\Omega) e^{j\theta(\Omega)} \Rightarrow x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} c(\Omega)\, e^{j\Omega t}\, d\Omega$$

نگرش مفهومی به روابط:

$$x(t) = \int_{0}^{+\infty} m(\Omega)cos\big(\Omega t + \theta(\Omega)\big)d\Omega \qquad ,\Omega \epsilon R$$ ۱

$$x(t) = \int_{0}^{+\infty} m(\Omega)\big[cos\big(\theta(\Omega)\big)cos(\Omega t) - sin\big(\theta(\Omega)\big)sin(\Omega t)\big]d\Omega$$

$$x(t) = \int_{0}^{+\infty} \big[m(\Omega)cos\big(\theta(\Omega)\big)cos(\Omega t) - m(\Omega)sin\big(\theta(\Omega)\big)sin(\Omega t)\big]d\Omega$$

$$a(\Omega) = m(\Omega)cos\big(\theta(\Omega)\big)$$
$$b(\Omega) = m(\Omega)sin\big(\theta(\Omega)\big)$$

$$x(t) = \int_{0}^{+\infty} [a(\Omega)cos(\Omega t) - b(\Omega)sin(\Omega t)]d\Omega$$ ۲

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} c(\Omega)\, e^{j\Omega t}\, d\Omega$$ ۳

$c(\Omega)$: Complex

$c(\Omega)$: Magnitude of individual frequency component

$a(\Omega)$, $b(\Omega)$, $m(\Omega)$: Amplitude of individual frequency component

هر سیگنال دلخواهی را می‌توان با ترکیب سیگنال‌های کسینوسی دارای فاز، سیگنال‌های کسینوسی و سینوسی بدون فاز و نمایی مختلط بازنمایی کرد.

معادله آنالیز تبدیل فوریه زمان پیوسته: تعیین $C(\Omega)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j\Omega t}\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} c(\Psi)\, e^{j\Psi t}\, d\Psi\; e^{-j\Omega t}\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} c(\Psi)\, e^{j\Psi t}\; e^{-j\Omega t}\, d\Psi dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} c(\Psi)\, e^{j\Psi t}\; e^{-j\Omega t}\, dt d\Psi$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} c(\Psi) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j(\Psi-\Omega)t}\, dt\, d\Psi$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j(\Psi-\Omega)t}\, dt = ?}$$

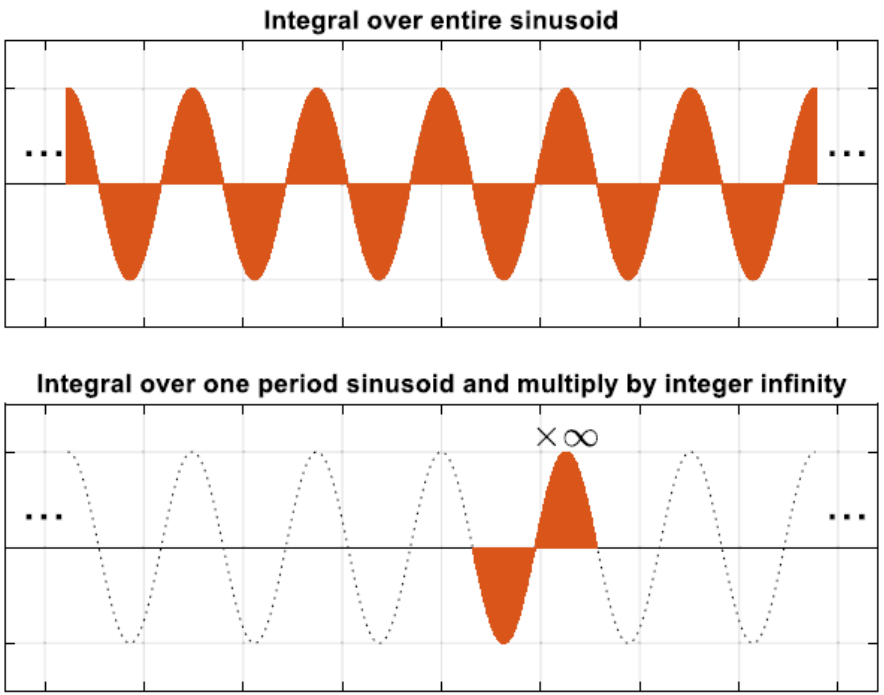
$c(\Omega)$: Magnitude of individual frequency component

$a(\Omega)$, $b(\Omega)$, $m(\Omega)$: Amplitude of individual frequency component

هر سیگنال دلخواهی را می‌توان با ترکیب سیگنال‌های کسینوسی دارای فاز،

سیگنال‌های کسینوسی و سینوسی بدون فاز و نمایی مختلط بازنمایی کرد.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j(\Psi-\Omega)t}\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\cos\big((\Psi-\Omega)t\big) + j\sin\big((\Psi-\Omega)t\big)\right] dt$$

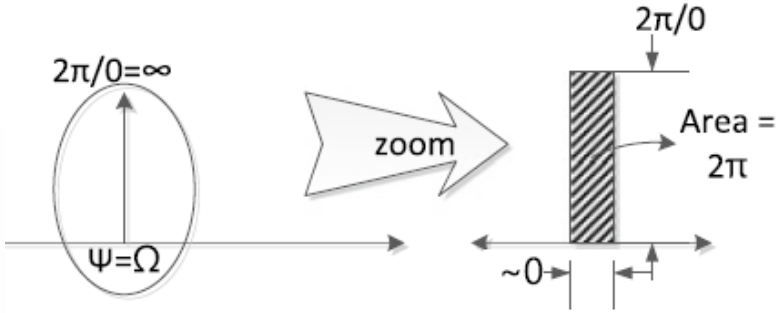


اگر $\Psi \neq \Omega$ باشد انتگرال sin و cos در هر تناوب صفر است و بنابراین برای بی‌نهایت دوره تناوب هم انتگرال کل صفر می‌شود.

اگر $\Psi = \Omega$ باشد دوره تناوب یعنی $\frac{2\pi}{\Psi-\Omega}$ به سمت بی‌نهایت میل می‌کند و $sin\big((\Psi-\Omega)t\big)$ به سمت صفر میل می‌کند و $cos\big((\Psi-\Omega)t\big)$ به سمت یک میل می‌کند و حاصل انتگرال در $\Psi = \Omega$ به سمت بی‌نهایت میل می‌کند.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j(\Psi-\Omega)t}\, dt = 2\pi\delta(\Psi-\Omega)$$

تعیین ضریب 2π بر اساس قاعده هوپیتال



معادله آنالیز تبدیل فوریه زمان پیوسته: تعیین $C(\Omega)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j\Omega t}\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} c(\Psi)\, e^{j\Psi t}\, d\Psi\; e^{-j\Omega t}\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} c(\Psi)\, e^{j\Psi t}\; e^{-j\Omega t}\, d\Psi dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} c(\Psi)\, e^{j\Psi t}\; e^{-j\Omega t}\, dt d\Psi$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} c(\Psi) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j(\Psi-\Omega)t}\, dt\, d\Psi$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j(\Psi-\Omega)t}\, dt = 2\pi\delta(\Psi-\Omega)}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} 2\pi\, c(\Psi)\, \delta(\Psi-\Omega)\, d\Psi = \int_{-\infty}^{+\infty} 2\pi\, c(\Omega)\, \delta(\Psi-\Omega)\, d\Psi$$

ویژگی غربال کردن ضربه:

$$= 2\pi\, c(\Omega) \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\Psi-\Omega)\, d\Psi = 2\pi\, c(\Omega)$$

رابطه آنالیز تبدیل فوریه:

$$c(\Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j\Omega t}\, dt$$

یادآوری تعریف و ویژگی غربال کردن دلتای دیراک:

تعریف دلتای دیراک:

$$\delta(t) = \begin{cases} \to \infty & for\ t = 0 \\ 0 & for\ t \neq 0 \end{cases} \quad \& \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\, dt = 1$$

ویژگی غربال کردن ضربه:

$$x(t)\, \delta(t - t_0) = x(t_0)\, \delta(t - t_0)$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, \delta(t - t_0)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t_0)\, \delta(t - t_0)\, dt$$

$$= x(t_0) \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0)\, dt = x(t_0)$$

زوج تبدیل فوریه:

$$c(\Omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j\Omega t}\, dt$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} c(\Omega)\, e^{j\Omega t}\, d\Omega$$

$$X(\Omega) = 2\pi\, c(\Omega)$$

$$\begin{cases} X(\Omega) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j\Omega t}\, dt \\ x(t) = \displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\Omega)\, e^{j\Omega t}\, d\Omega \end{cases}$$

If $x(t)$: $Real$

$$\begin{cases} Real\{X(\Omega)\} : Even\ Symmetric \\ Imag.\{X(\Omega)\} : Odd\ Symmetric \\ |X(\Omega)| : Even\ Symmetric \\ \measuredangle X(\Omega) : Odd\ Symmetric \end{cases}$$

مثال:

$X(\Omega)$ را برای سیگنال $x(t)$ روبرو محاسبه و رسم کنید.

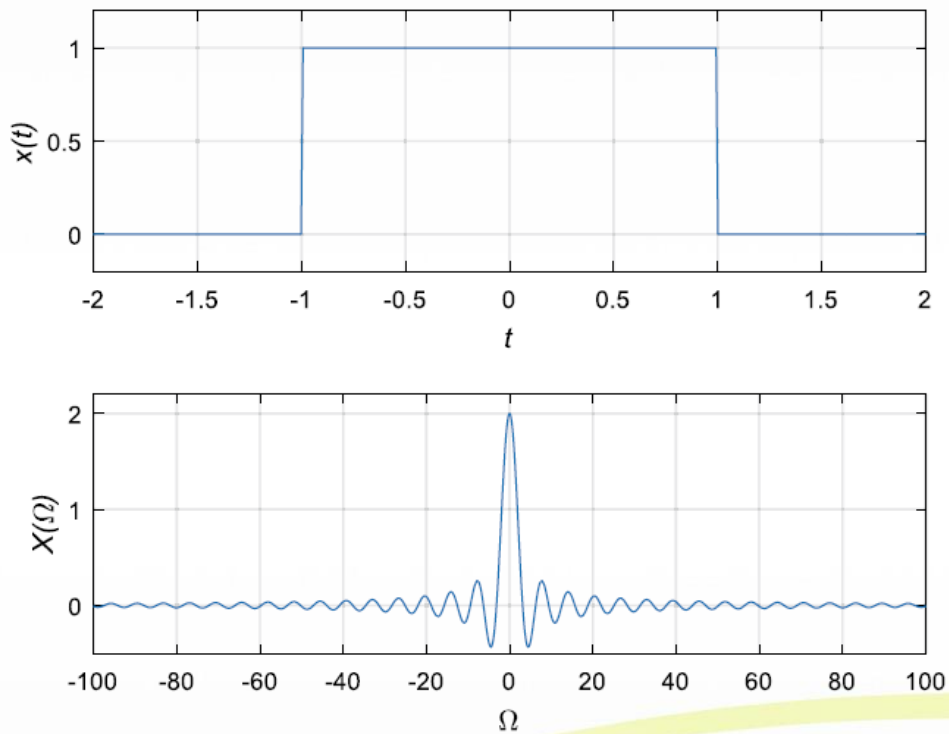
$$x(t) = \begin{cases} 1 & -1 \le t \le 1 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

حل:

$$X(\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j\Omega t}\, dt = \int_{-1}^{+1} e^{-j\Omega t}\, dt = \left.\frac{e^{-j\Omega t}}{-j\Omega}\right|_{-1}^{1} = \frac{e^{j\Omega} - e^{-j\Omega}}{j\Omega}$$

$$\Rightarrow \quad X(\Omega) = \frac{2sin(\Omega)}{\Omega}$$

```
syms t;
b = [-100:1/100:100];
x1 = heaviside(t+1) - heaviside(t-1);
y2 = 2*(sin(b+eps))./(b+eps);
                    %Add eps to avoid NaN
figure,
subplot(211), ezplot(x1, [-2 2]), grid
axis([-2 2 -0.2 1.2]);
subplot(212), plot(b, y2), grid
axis([-100.0000 100.0000 -0.5 2.2])
```



مثال: محاسبه وارون تبدیل فوریه به روش عددی

برای $X(\Omega)$ روبرو و با محاسبه وارون تبدیل فوریه به روش عددی، $\tilde{x}(t)$ را برای دوره $-10\pi \le \Omega_k \le 10\pi$ به دست آورید.

$$X(\Omega) = \frac{2sin(\Omega)}{\Omega}$$

حل:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\Omega)\, e^{j\Omega t}\, d\Omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2sin(\Omega)}{\Omega}\, e^{j\Omega t}\, d\Omega$$

با فرض:

$d\Omega \to \Delta\Omega,$

$\Omega = k\Delta\Omega\,,$ $\quad k: -N \to N$

$$\tilde{x}(t) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-N}^{N} \frac{2sin(k\Delta\Omega)}{k\Delta\Omega}\, e^{jk\Delta\Omega t}\, \Delta\Omega$$

$hint:\ sinc(0) = 1$

با جداسازی زیگما برای محدوده منفی، مقدار صفر و محدوده مثبت داریم:

$$\tilde{x}(t) = \frac{1}{2\pi}\left[\sum_{k=-N}^{-1} \frac{2sin(k\Delta\Omega)}{k\Delta\Omega}\, e^{jk\Delta\Omega t} + 2 + \sum_{k=1}^{N} \frac{2sin(k\Delta\Omega)}{k\Delta\Omega}\, e^{jk\Delta\Omega t}\right]\Delta\Omega$$

$hint:\ sinc(t) = Even\ symmetric$

با تغییر متغیر زیگمای اول از k به $-k$ داریم:

$$\tilde{x}(t) = \frac{1}{2\pi}\left[\sum_{k=1}^{N} \frac{2sin(k\Delta\Omega)}{k\Delta\Omega}\, e^{-jk\Delta\Omega t} + 2 + \sum_{k=1}^{N} \frac{2sin(k\Delta\Omega)}{k\Delta\Omega}\, e^{jk\Delta\Omega t}\right]\Delta\Omega$$

$$\tilde{x}(t) = \frac{1}{2\pi}\left[\sum_{k=1}^{N} \frac{2sin(k\Delta\Omega)}{k\Delta\Omega} e^{-jk\Delta\Omega t} + 2 + \sum_{k=1}^{N} \frac{2sin(k\Delta\Omega)}{k\Delta\Omega} e^{jk\Delta\Omega t}\right]\Delta\Omega$$

با یکپارچه نوشتن دو زیگما داریم:

$$\tilde{x}(t) = \frac{1}{2\pi}\left[\sum_{k=1}^{N} \frac{2sin(k\Delta\Omega)}{k\Delta\Omega}\left(e^{jk\Delta\Omega t} + e^{-jk\Delta\Omega t}\right) + 2\right]\Delta\Omega$$

با یکپارچه نوشتن دو زیگما داریم:

$$\tilde{x}(t) = \left[\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{N} \frac{2sin(k\Delta\Omega)}{k\Delta\Omega} cos(k\Delta\Omega t) + \frac{1}{\pi}\right]\Delta\Omega$$

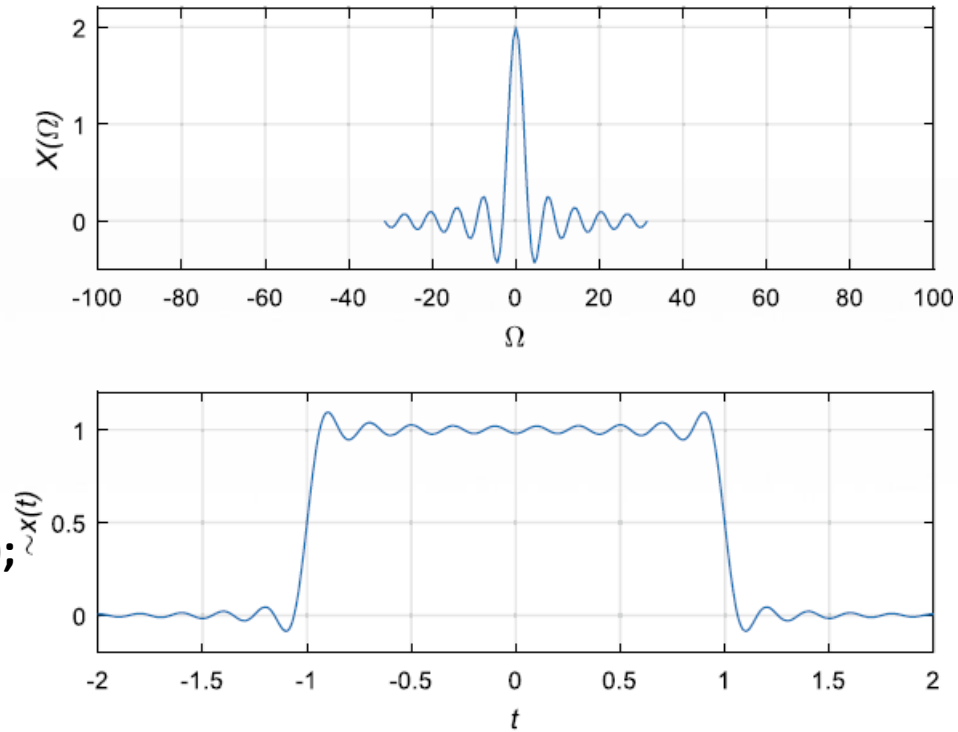
$$\Delta\Omega = 2\pi\,\Delta f$$

گام فرکانس رادیانی:

گام فرکانسی:

```
delf = 0.1; % Frequency interval
delt = 0.001; % Time interval
fmax = 30/(2*pi);
tmax = 2;
ff = 0.1:delf:fmax;
tt = -tmax:delt:tmax;
out = [];
f1 = 2*pi*(-fmax:delf:fmax);
xc = 2*sin(f1+eps)./(f1+eps);
for k1 = tt % time
  temp = 0;
  for k2 = ff % frequency
    temp = temp + ...
        sin(2*pi*k2)*cos(2*pi*k2*k1)/(2*pi*k2);
  end
  out = [out ((temp*2/pi)+(1/pi))*2*pi*delf];
end
figure,
subplot(211), plot(f1,xc), grid
axis([-100.0000 100.0000 -0.5 2.2])
subplot(212), plot(tt,out), grid
axis([-2 2 -0.2 1.2]);
```

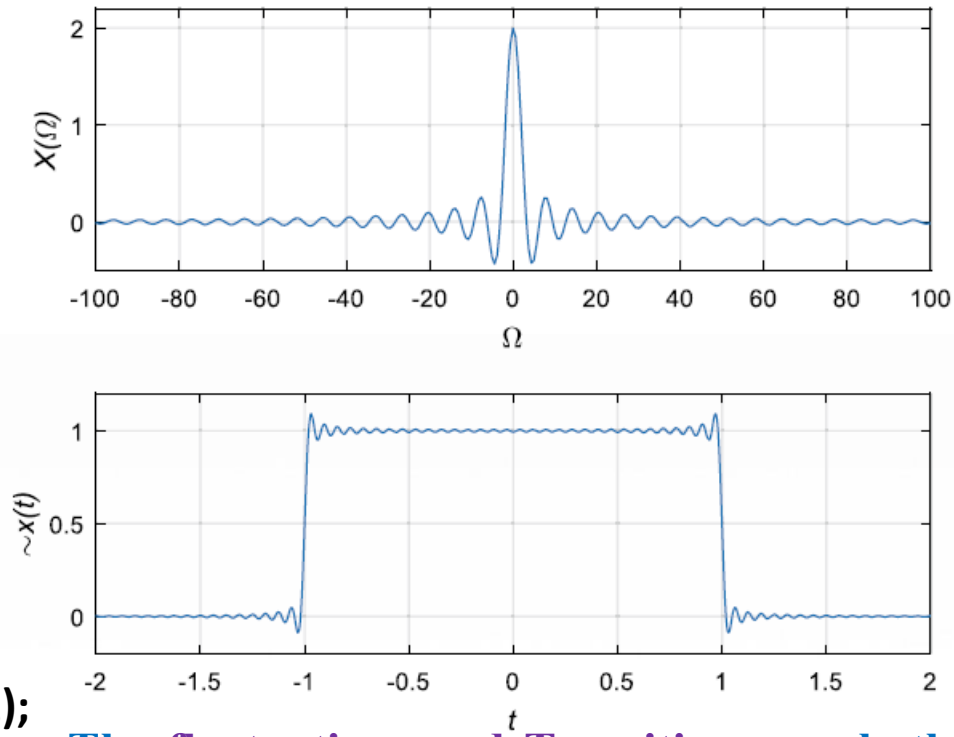
$$\tilde{x}(t) = \left[\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{N}\frac{2sin(k\Delta\Omega)}{k\Delta\Omega}cos(k\Delta\Omega t) + \frac{1}{\pi}\right]\Delta\Omega$$



The wide fluctuations and Transitions are observed due to the limited frequency range in the inverse Fourier transform.

با گسترش محدوده فرکانسی به $-100 < \Omega < 100$ داریم:

```
delf = 0.1; % Frequency interval
delt = 0.001; % Time interval
fmax = 100/(2*pi);
tmax = 2;
ff = 0.1:delf:fmax;
tt = -tmax:delt:tmax;
out = [];
f1 = 2*pi*(-fmax:delf:fmax);
xc = 2*sin(f1+eps)./(f1+eps);
for k1 = tt % time
  temp = 0;
  for k2 = ff % frequency
    temp = temp + ...
        sin(2*pi*k2)*cos(2*pi*k2*k1)/(2*pi*k2);
  end
  out = [out ((temp*2/pi)+(1/pi))*2*pi*delf];
end
figure,
subplot(211), plot(f1,xc), grid
axis([-100.0000 100.0000 -0.5 2.2])
subplot(212), plot(tt,out), grid
axis([-2 2 -0.2 1.2]);
```



The fluctuations and Transitions are both narrow to follow the precise window shape in the time domain.

برای اینکه بتوان با محاسبه وارون تبدیل فوریه، دقیقا به $x(t)$ دست یافت لازم است گستره فرکانسی، بی‌نهایت در نظر گرفته شود.

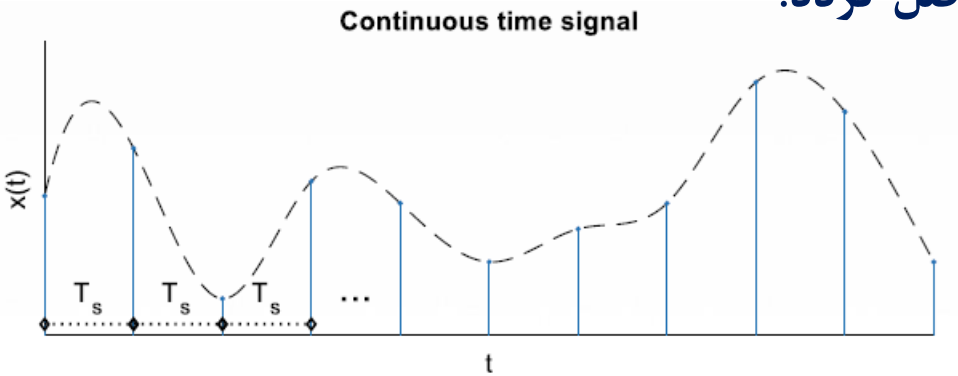
عناوین مبحث:

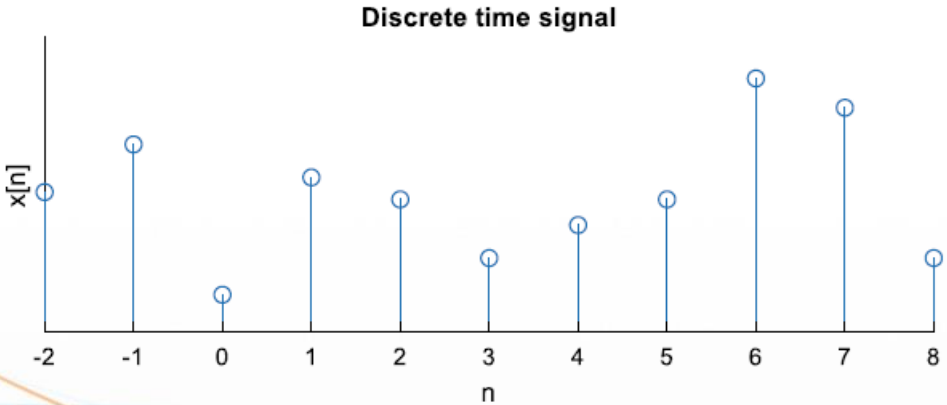
- سیگنال‌های سینوسی پیوسته
- نمونه‌برداری
- بازنمایی سیگنال
- فرکانس در سیگنال زمان گسسته
- مثال‌های مروری

نمونه‌برداری (Sampling):

نمونه‌برداری، فرآیندی برای تبدیل سیگنال پیوسته به دنباله دادگان گسسته است.

به این منظور، سیگنال پیوسته در لحظاتی که ضریب صحیحی از گام **نمونه‌برداری** (T_s) هستند نمونه‌برداری می‌شود تا سیگنال زمان گسسته حاصل گردد.





$$x[n] = x(nT_s) \qquad n \in \mathbb{Z}\ ,$$
$$x[.], x(.), T_s \in \mathbb{R}$$

T_s : *sampling period*

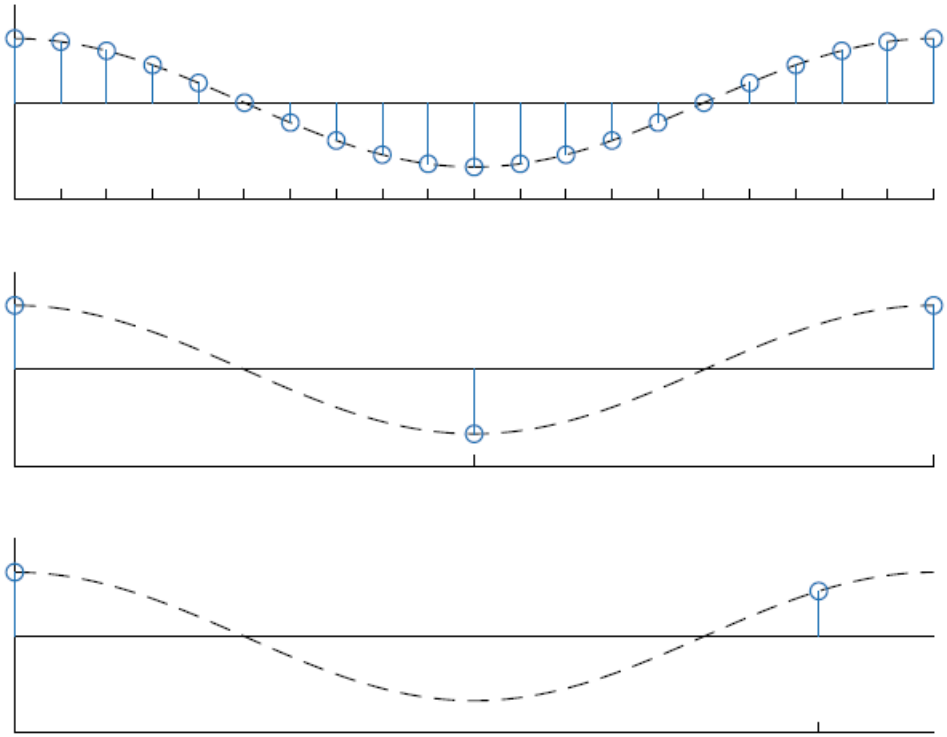
$$f_s = \frac{1}{T_s} : \textit{sampling frequency}$$

f_s : تعداد نمونه‌های گرفته شده در یک ثانیه

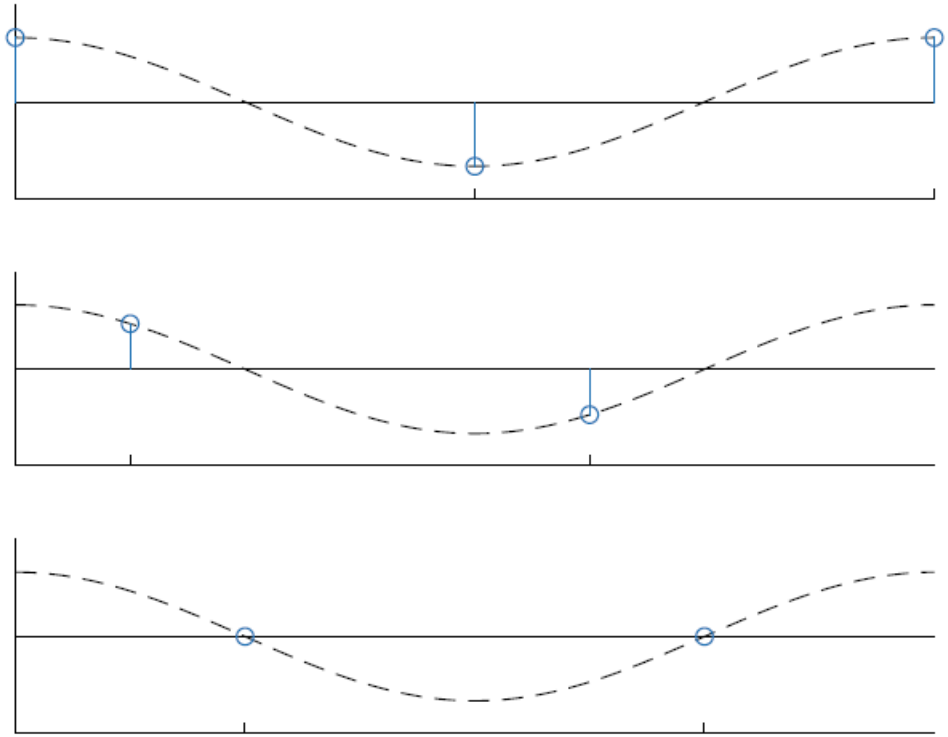
```
nn0 = 0:pi/100:2*pi;
nn1 = 0:pi/10:2*pi;
nn2 = 0:pi:2*pi;
nn3 = [0 (3*pi/2+2*pi)/2];

xn0 = cos(nn0);
xn1 = cos(nn1);
xn2 = cos(nn2);
xn3 = cos(nn3);

figure,
subplot(311)
plot(nn0,xn0,'k','LineStyle','--');
hold on, stem(nn1,xn1); hold off
subplot(312)
plot(nn0,xn0, 'k','LineStyle','--');
hold on, stem(nn2,xn2); hold off
subplot(313)
plot(nn0,xn0, 'k','LineStyle','--');
hold on, stem(nn3,xn3); hold off
```



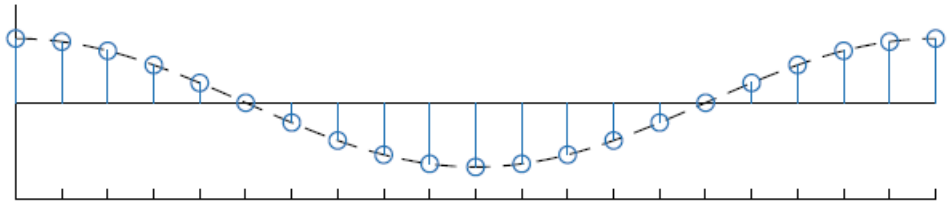
```
nn0 = 0:pi/100:2*pi;
nn2 = 0:pi:2*pi;
nn4 = nn2+pi/4;
nn5 = nn2+pi/2;
xn0 = cos(nn0);
xn2 = cos(nn2);
xn4 = cos(nn4);
xn5 = cos(nn5);
figure,
subplot(311)
plot(nn0,xn0, 'k','LineStyle','--');
hold on, stem(nn2,xn2); hold off
ylim([-1.5 1.5]), xlim([0 2*pi])
subplot(312)
plot(nn0,xn0, 'k','LineStyle','--');
hold on, stem(nn4,xn4); hold off
ylim([-1.5 1.5]), xlim([0 2*pi])
subplot(313)
plot(nn0,xn0, 'k','LineStyle','--');
hold on, stem(nn5,xn5); hold off
ylim([-1.5 1.5]), xlim([0 2*pi])
```



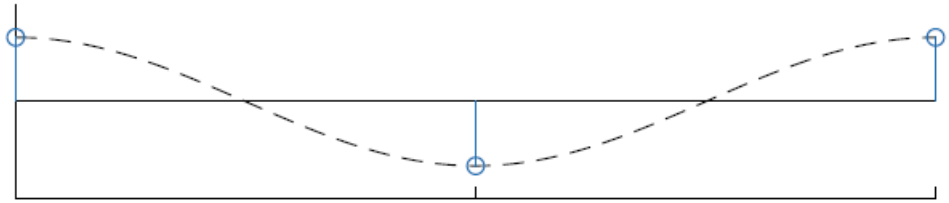
تعیین کمترین فرکانس نمونه‌برداری برای یک سیگنال:

برای اینکه بتوان از نمونه‌های سیگنال، سیگنال پیوسته را بازسازی نمود لازم است نمونه‌برداری با نرخ بیش از دو برابر بالاترین نمونه فرکانسی سیگنال انجام گردد.

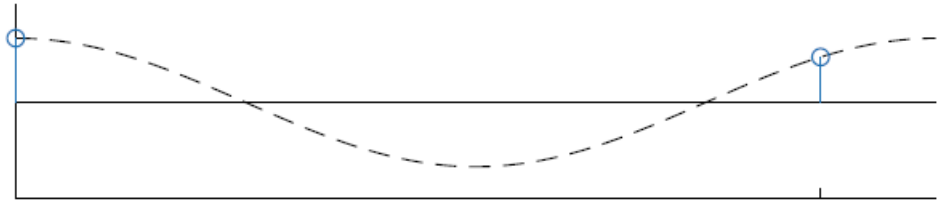
نرخ نمونه‌برداری نایکوئیست: $f_s > 2f_{max}$



نمونه‌برداری با نرخ بیشتر از دو برابر فرکانس سیگنال:

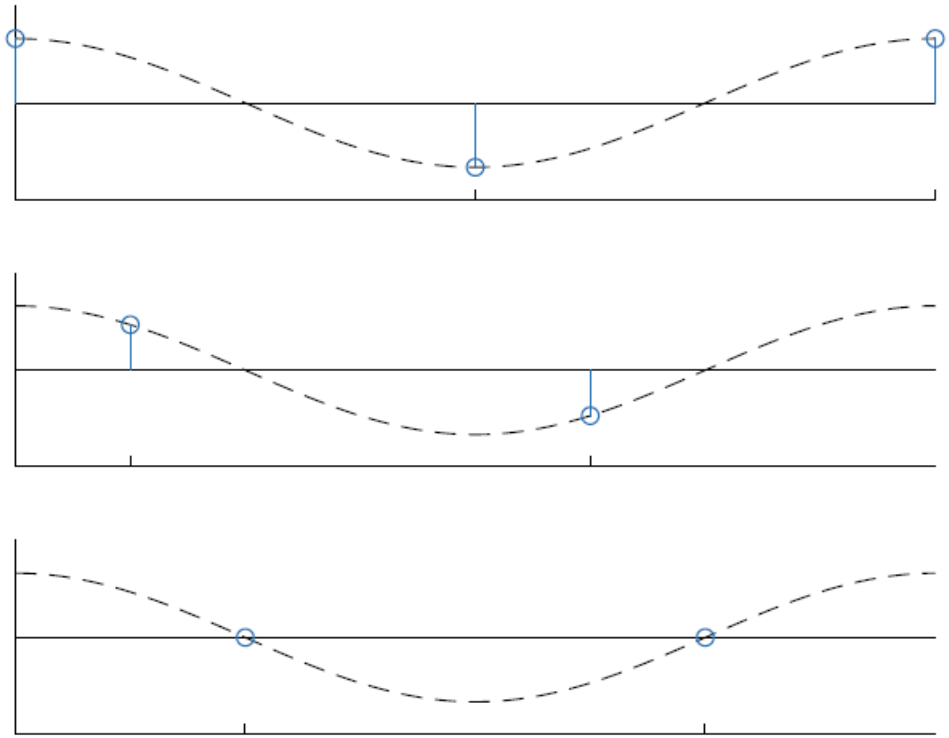


نمونه‌برداری با نرخ برابر با دو برابر فرکانس سیگنال:



نمونه‌برداری با نرخ کمتر از دو برابر فرکانس سیگنال:

اثر فاز نمونه برداری:



در عمل، نمونه‌برداری با نرخی بالاتر از دو برابر فرکانس بالاترین مولفه فرکانسی سیگنال انجام می‌گردد (۴ تا ۱۰ برابر بالاترین مولفه فرکانسی سیگنال)

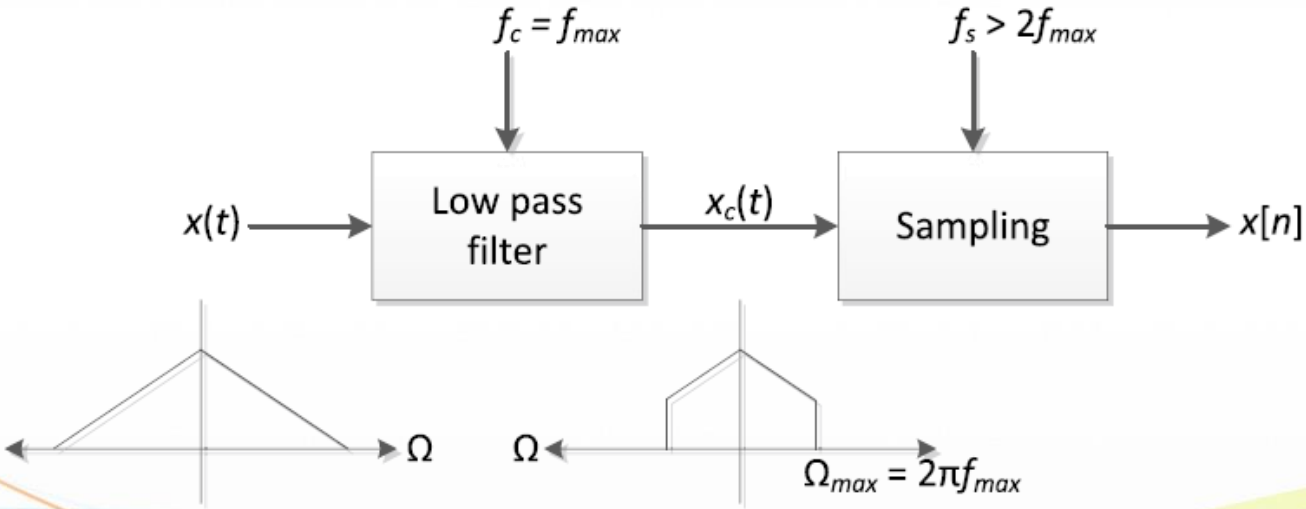
نمونه برداری از یک سیگنال پیوسته باند محدود:

سیگنال پیوسته باندمحدودی (band-limited) با بالاترین مولفه فرکانسی Ω_{max} در نظر بگیرید:

$$x(t) = \int_0^{\Omega_{max}} m(\Omega)cos\big(\Omega t + \theta(\Omega)\big)d\Omega$$

اگر فرکانس نمونه‌برداری مناسبی برای مولفه فرکانسی Ω_{max} تعیین گردد ملزومات نمونه‌برداری مولفه‌های با فرکانس پایین‌تر هم برآورده می‌شود.

اگر سیگنال باندمحدود نباشد یا نرخ نمونه‌برداری محدود باشد لازم است پیش‌پردازشی با هدف حذف فرکانس‌های بالاتر از Ω_{max} انجام گردد:



مثال:

حداقل نرخ نمونه‌برداری سیگنال زیر را بیابید.

$$x(t) = cos(100\pi t) + sin(200\pi t) + cos\left(500\pi t + \frac{\pi}{4}\right) + 7$$

حل:

$$\Omega_{\max} = 500\pi \Rightarrow f_{\max} = \frac{\Omega_{\max}}{2\pi} = \frac{500\pi}{2\pi} = 250 \Rightarrow f_s > 500\ Hz$$

عناوین مبحث:

- سیگنال‌های سینوسی پیوسته
- نمونه‌برداری
- بازنمایی سیگنال
- فرکانس در سیگنال زمان گسسته
- مثال‌های مروری

عناوین مبحث:

- سیگنال‌های سینوسی پیوسته
- نمونه‌برداری
- بازنمایی سیگنال
- فرکانس در سیگنال زمان گسسته
- مثال‌های مروری

عناوین مبحث:

- سیگنال‌های سینوسی پیوسته
- نمونه‌برداری
- بازنمایی سیگنال
- فرکانس در سیگنال زمان گسسته
- مثال‌های مروری

عناوین مبحث:

- سیگنال‌های سینوسی پیوسته
- نمونه‌برداری
- بازنمایی سیگنال
- فرکانس در سیگنال زمان گسسته
- مثال‌های مروری

هر چیز که در جستن آنی آنی...