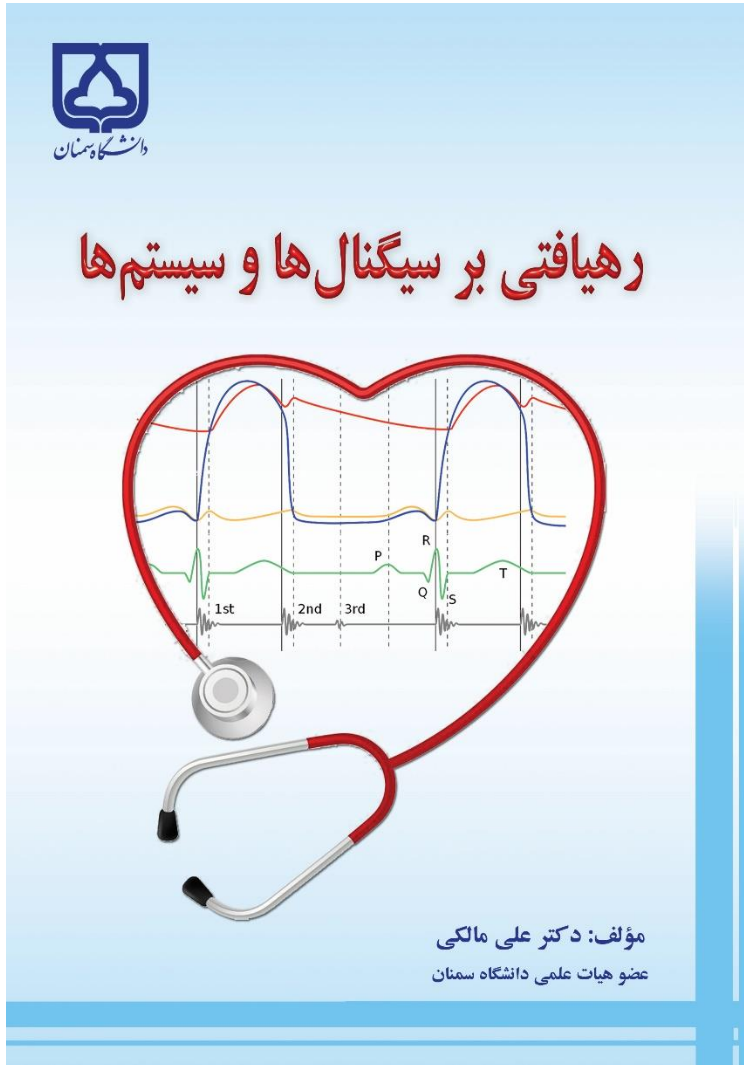
سیگنال‌ها و سیستم‌ها

مبحث اول
مفاهیم سیگنال و سیستم

دکتر علی مالکی
http://maleki.semnan.ac.ir


دانشگاه سمنان
رهیافتی بر سیگنال‌ها و سیستم‌ها
P
R
T
Q
S
1st
2nd
3rd
مؤلف: دکتر علی مالکی
عضو هیات علمی دانشگاه سمنان

اهداف فصل

پس از مطالعه این فصل، قادر خواهید بود:

تعریف دقیقی از سیگنال ارائه کنید؛

سیگنال‌های زمان- پیوسته و زمان- گسسته را توصیف نموده و نشانه‌گذاری قراردادی آنها را مطرح نمایید؛

دستکاری‌های متغیر مستقل سیگنال را انجام دهید؛

انرژی کل و توان متوسط سیگنال‌ها را محاسبه کنید؛

سیگنال نمایی مختلط را به عنوان یک سیگنال پرکاربرد توصیف کنید؛

سیگنال مهم ضربه واحد و ارتباط آن با پله واحد را توصیف کنید؛

ویژگی‌های سیگنال ضربه واحد را مطرح و توجیه کنید؛

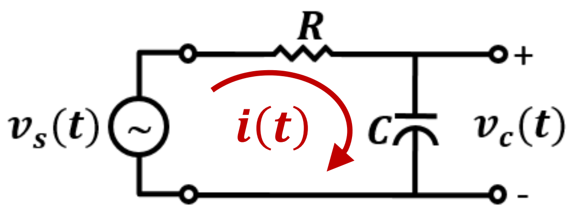
در مورد ویژگی‌های مختلف سیستم‌ها (حافظه‌دار بودن، معکوس‌پذیری، علی بودن، پایداری، استقلال از زمان و خطی بودن) نظر دهید.

فهرست مطالب

معرفی سیستم

مجموعه‌ای دارای ورودی و خروجی که رابطه‌ای بین ورودی و خروجی آن برقرار است. این رابطه نحوه‌ی عملکرد سیستم را توصیف می‌کند.

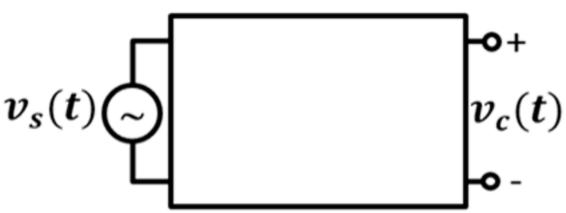
مثال ۱: مدار الکتریکی



$$v_s(t) = R\, i(t) + v_c(t)$$

$$i(t) = C\frac{dv_c(t)}{dt} \quad \Rightarrow v_s(t) = RC\frac{dv_c(t)}{dt} + v_c(t)$$

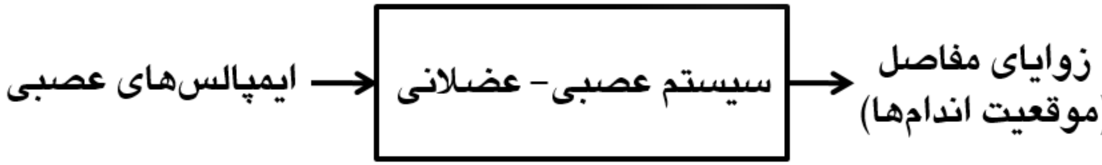
$$\Rightarrow v_s(t) = RC\frac{dv_c(t)}{dt} + v_c(t)$$ (رابطه ۳–۱)



«مجموعه‌ای (جعبه‌ی نشان داده شده در شکل روبرو) دارای ورودی ($v_s(t)$) و خروجی ($v_c(t)$) که رابطه‌ای (رابطه ۳–۱) بین ورودی و خروجی آن برقرار است. این رابطه نحوه‌ی عملکرد سیستم را نشان می‌دهد (این معادله دیفرانسیل، پایین‌گذر بودن و ثابت زمانی شارژ/ دشارژ خازن را تعیین می‌کند)»

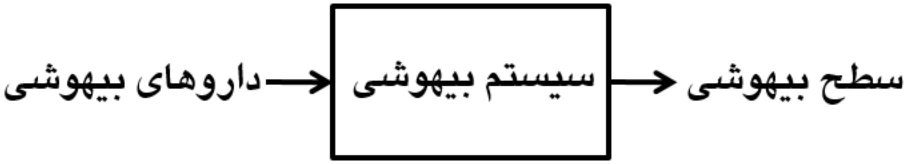
مثال ۲: موتور خودرو

مثال ۳: سیستم عضلانی– اسکلتی



مثال ۴: سیستم آموزشی دانشگاه

مثال ۵: سیستم بیهوشی



مثال ۶: سیستم تعلیق خودرو

مثال ۷: سیستم بهبود تصویر

مثال ۸: سیستم ناوبری خودرو

مثال ۹: نظام وام بانکی (محاسبه بدهی به روز شده در ماه‌های متوالی)

$y[n]$: مبلغ بدهی در انتهای ماه nام؛

$y[0]$: کل مبلغ وام؛

$y[1]$: مبلغ بدهی در پایان ماه نخست.

مبلغ بدهی در ماه نخست : $y[1] = y[0] + \frac{1}{12} \times \text{نرخ بهره‌ی سالیانه} \times \text{مبلغ وام} - \text{مبلغ قسط ماهیانه}$

مبلغ بدهی در ماه nام : $y[n] = y[n-1] + \frac{1}{12} \times \text{نرخ بهره‌ی سالیانه} \times y[n-1] - \text{مبلغ قسط ماهیانه}$

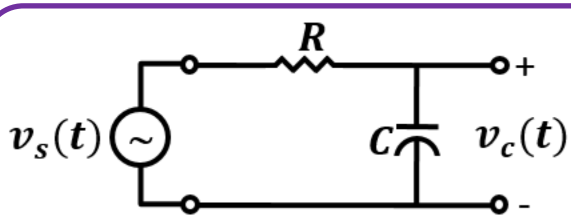
معرفی سیگنال

تعریف سیگنال: محرک‌ها و پاسخ‌های سیستم.

تعریف سیگنال: الگوی تغییرات یک کمیت فیزیکی بر حسب یک یا چند متغیر مستقل.

مثال: دما، فشار، ولتاژ، جریان، موقعیت، سرعت و ...

«مثال ۱: مدار الکتریکی»:



سیگنال‌های ورودی و خروجی: کمیت فیزیکی «ولتاژ»

متغیر مستقل: یکی و از نوع «زمان»

«مثال ۶: سیستم تعلیق خودرو»:

سیگنال‌های ورودی و خروجی: کمیت فیزیکی «موقعیت»

متغیر مستقل: یکی و از نوع «زمان»

«مثال ۷: سیستم بهبود تصویر»:

	1	1	
1			1
1	1	1	1
1			1
1			1

سیگنال‌های ورودی و خروجی از نوع تصویر هستند.

متغیر مستقل: دو تا و از نوع «موقعیت»

مثال ۱۰: سیگنالی از نوع تصویر تک‌رنگ

	1	1	
1			1
1	1	1	1
1			1
1			1

فهرست مطالب

سیگنال‌های زمان- پیوسته و زمان- گسسته

سیگنال زمان-پیوسته: سیگنالی که متغیر مستقل آن می‌تواند مقادیر پیوسته‌ای داشته باشد.

سیگنال زمان-گسسته: سیگنالی که متغیر مستقل آن تنها بتواند مقادیر گسسته‌ای داشته باشد.

بنابراین متغیر مستقل سیگنال زمان- پیوسته می‌تواند هر مقدار حقیقی‌ای $(t \in R)$ داشته باشد حال آنکه متغیر مستقل سیگنال زمان- گسسته تنها می‌تواند مقدار صحیحی $n \in Z$ داشته باشد.

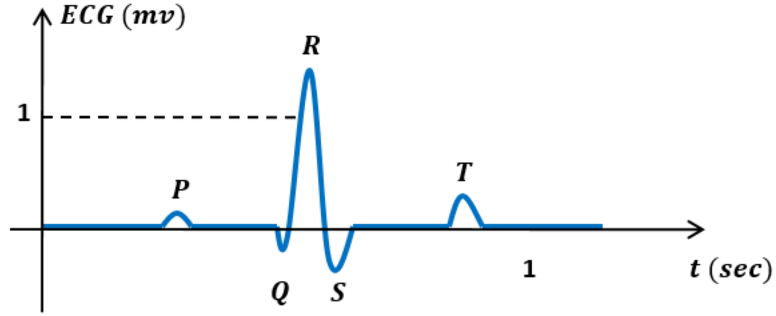
توجه کنید که متغیر مستقل سیگنال را به طور پیش فرض، زمان در نظر گرفته‌ایم.

قرارداد:

در این کتاب به طور قراردادی از نماد t و نشانه‌گذاری $(\cdot)$ برای متغیر مستقل سیگنال زمان- پیوسته استفاده می‌کنیم مثل $v(t)$. همچنین از نماد n و نشانه‌گذاری $[\cdot]$ برای متغیر مستقل سیگنال زمان- گسسته استفاده می‌نماییم مثل $x[n]$.

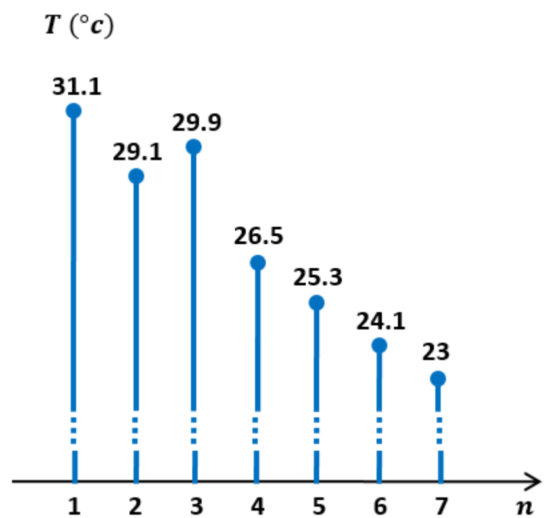
مثال ۱۱: سیگنال زمان- پیوسته

نمونه‌ای از سیگنال قلبی یا الکتروکاردیوگرام (ECG) ثبت شده از یکی از اشتقاق‌های سینه‌ای



مثال ۱۲: سیگنال زمان- گسسته

حداکثر دمای روزانه طی هفته‌ی آخر شهریور ماه سال ۱۳۸۲



بیشتر بدانیم: کوانتیزه کردن و سیگنال دیجیتال

برای یک سیگنال، همان‌گونه که متغیر مستقل می‌تواند ماهیت پیوسته یا گسسته داشته باشد مقدار یا دامنه سیگنال نیز می‌تواند ماهیت پیوسته یا گسسته داشته باشد. اگر دامنه یک سیگنال زمان- پیوسته ماهیت گسسته داشته باشد به آن «سیگنال زمان- پیوسته‌ی کوانتیزه شده[1]» گوییم. همچنین چنانچه دامنه یک سیگنال زمان- گسسته ماهیت گسسته داشته باشد به آن «سیگنال دیجیتال» گویند. در مقابل، اگر دامنه یک سیگنال زمان- پیوسته ماهیت پیوسته داشته باشد «سیگنال آنالوگ» نامیده می‌شود. سیگنال الکتروکاردیوگرام مثال ۱۰ نمونه‌ای از سیگنال آنالوگ است. بنابراین با رویکردی عمومی‌تر می‌توان سیگنال‌ها را به چهار دسته تقسیم نمود: سیگنال آنالوگ، سیگنال زمان- پیوسته‌ی کوانتیزه شده، سیگنال زمان- گسسته و سیگنال دیجیتال.

مثال ۱۳: سیگنال‌های زمان- پیوسته و زمان- گسسته

برای هر یک از موارد زیر، در مورد زمان- گسسته یا زمان- پیوسته بودن سیگنال نظر دهید؛

الف: تعداد لحظه‌ای لامپ‌های روشن در یک ساختمان طی زمان؛ پاسخ الف: زمان- پیوسته؛

ب: توان لحظه‌ای مصرفی در یک ساختمان طی زمان؛ پاسخ ب: زمان- پیوسته؛

ج: تعداد دانشجویان حاضر در جلسات کلاس یک درس در طول ترم؛ پاسخ ج: زمان- گسسته؛

د: نرخ تورم سالیانه در ایران؛ پاسخ د: زمان- گسسته.

مثال ۱۴: سیگنال‌های آنالوگ و دیجیتال

برای هر یک از موارد زیر، در مورد آنالوگ یا دیجیتال بودن سیگنال نظر دهید؛

الف: نمره‌ی میان‌ترم دانشجویان یک درس؛ پاسخ الف: دیجیتال؛

ب: حجم آب ذخیره‌ی یک سد در طول زمان؛ پاسخ ب: آنالوگ؛

ج: تعداد سفرهای نوروزی ثبت شده طی ده سال اخیر؛ پاسخ ج: دیجیتال؛

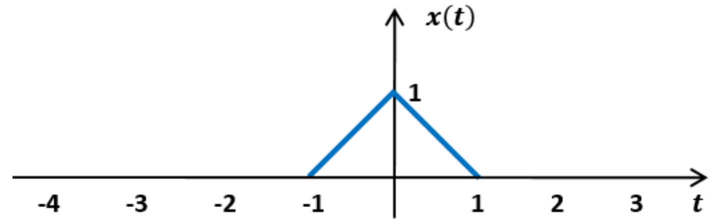
د: دبی لحظه‌ای آب مصرفی یک ساختمان؛ پاسخ د: آنالوگ.

دستکاری‌های متغیر مستقل سیگنال

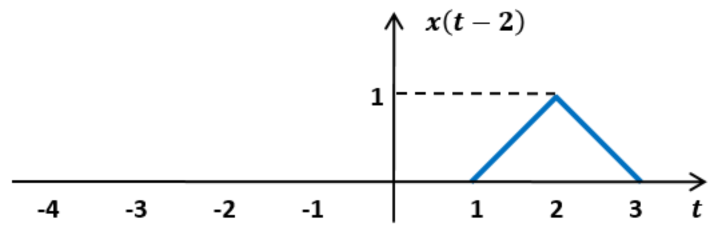
- ❖ جابجایی زمانی (time-shift)
- ❖ مقیاس کردن زمانی (time-scaling)

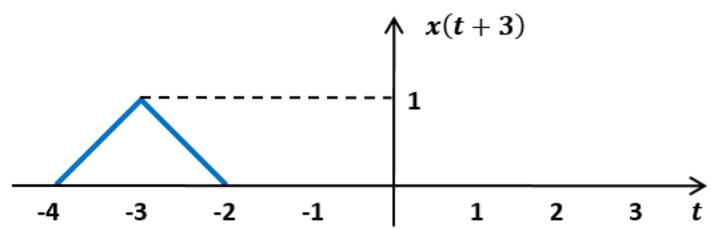
مثال ۱۵: جابجایی زمانی سیگنال زمان– پیوسته

برای سیگنال زمان– پیوسته‌ی $x(t)$ داده شده، سیگنال‌های $x(t-2)$ و $x(t+3)$ را تعیین و ترسیم نمایید.



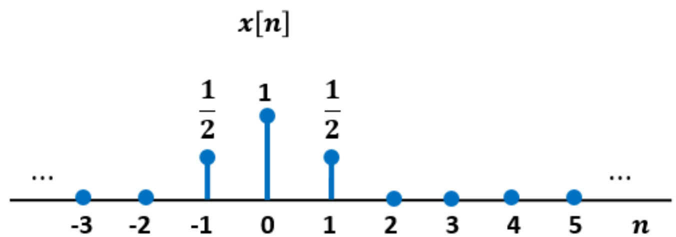
حل:



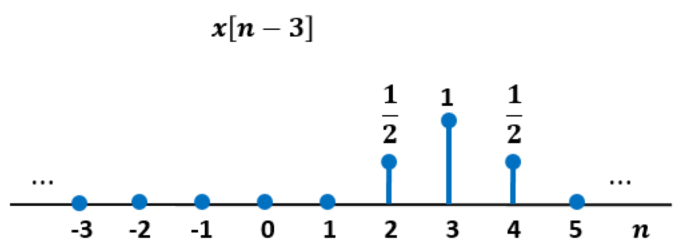


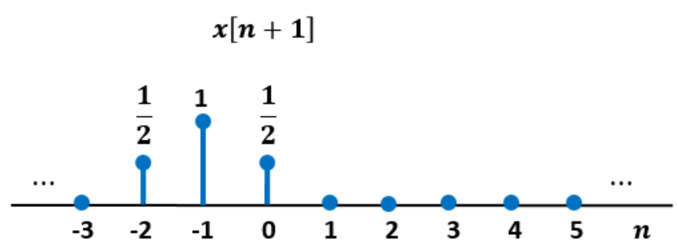
مثال ۱۶: جابجایی زمانی سیگنال زمان– گسسته

برای سیگنال زمان– گسسته $x[n]$ داده شده، سیگنال‌های $x[n-3]$ و $x[n+1]$ را تعیین و ترسیم نمایید.



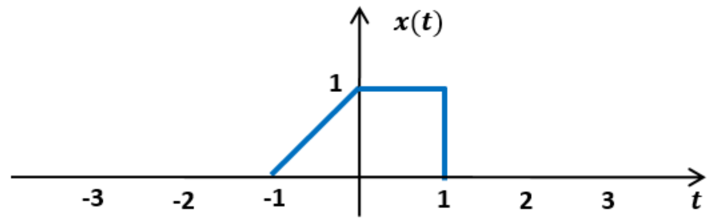
حل:



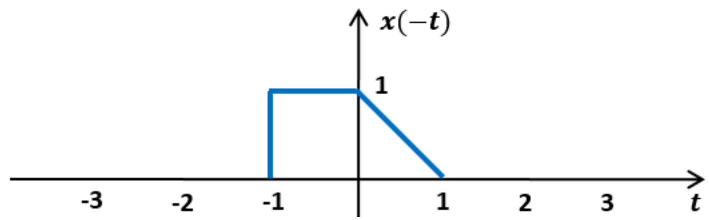


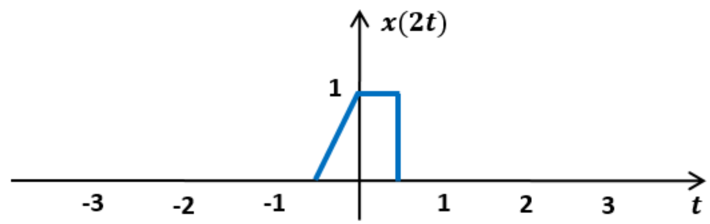
مثال ۱۷: مقیاس زمانی سیگنال زمان– پیوسته

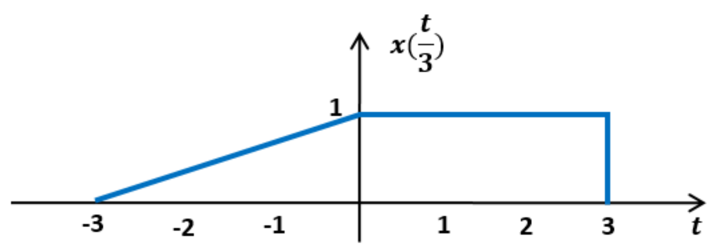
برای سیگنال زمان پیوسته‌ی $x(t)$ داده شده، سیگنال‌های $x(-t)$، $x(2t)$ و $x\left(\frac{t}{3}\right)$ را تعیین و ترسیم نمایید.



حل:

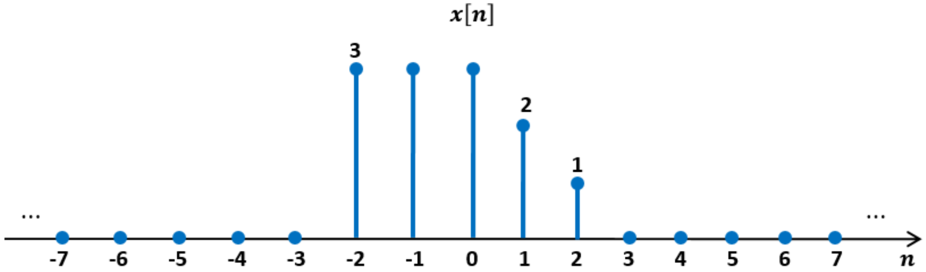




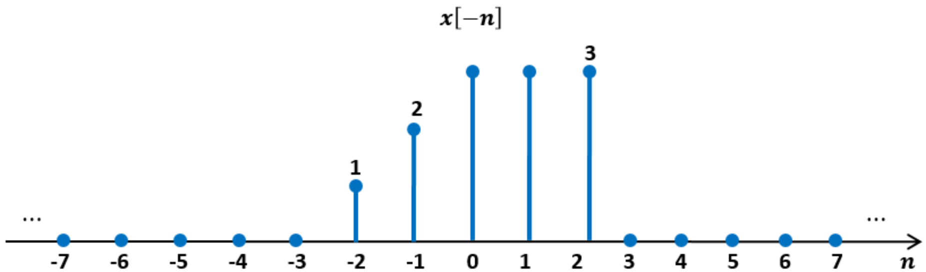


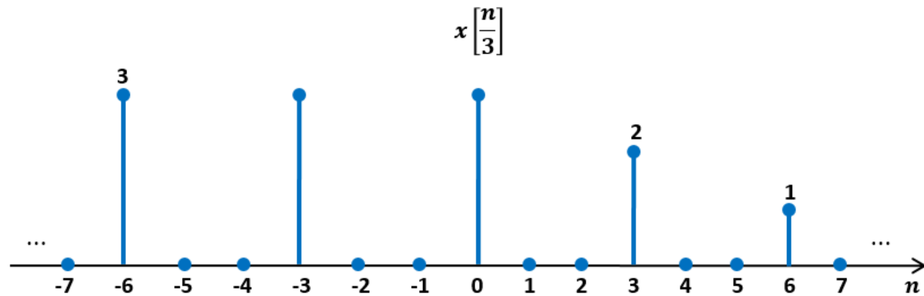
مثال ۱۸: مقیاس زمانی سیگنال زمان- گسسته

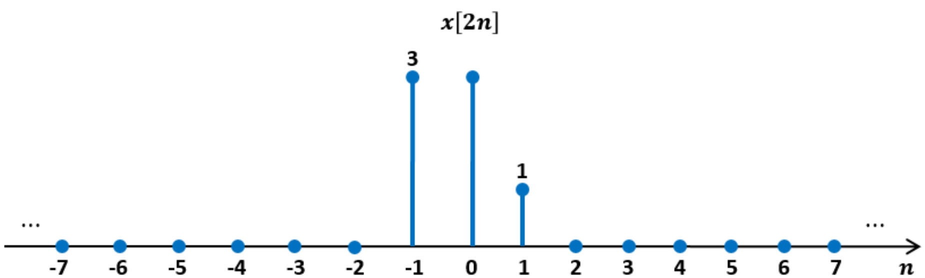
برای سیگنال زمان- گسسته‌ی $x[n]$ داده شده، سیگنال‌های $x[-n]$، $x[2n]$، $x\left[\frac{n}{3}\right]$ و $x\left[\frac{2n}{3}\right]$ را تعیین و ترسیم نمایید.

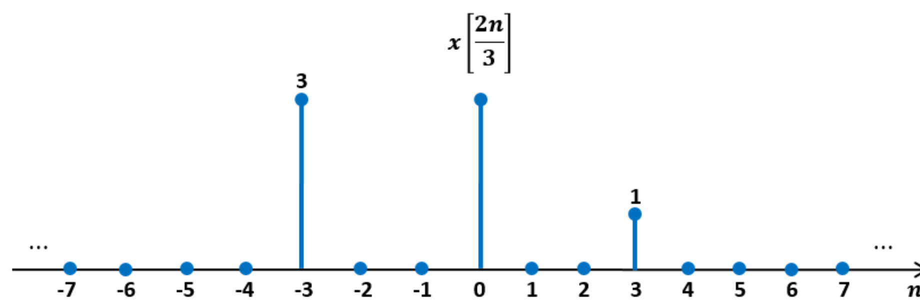


حل:









دقت کنید:

فرض کنید سیگنال $x(t)$ و عدد صحیح مثبت a داده شده است:

- برای دستیابی به $x(t-a)$ لازم است سیگنال را به اندازه‌ی a به سمت راست جابجا کنیم؛
- برای دستیابی به $x(t+a)$ لازم است سیگنال را به اندازه‌ی a به سمت چپ جابجا کنیم؛
- برای دستیابی به $x(at)$ لازم است سیگنال را به نسبت a مقیاس کنیم. اگر $a>1$ باشد سیگنال فشرده شده و اگر $a<1$ باشد سیگنال گسترده می‌شود.

دقت کنید:

برای دستیابی به سیگنال $x\left[\frac{a}{b}n\right]$ از سیگنال $x[n]$، بهتر است ابتدا $x[n]$ را به نسبت b گسترش دهیم و سپس حاصل را به نسبت a فشرده نماییم.

مقیاس کردن به همراه جابجایی زمانی

رهیافت اول دستیابی به $x(at+b)$: ابتدا جابجایی به اندازه‌ی b، بعد مقیاس به نسبت a

$$x_1(t) = x(t+b)$$
$$x_2(t) = x_1(at) = x(at+b)$$

رهیافت دوم دستیابی به $x(at+b)$: ابتدا مقیاس به نسبت a، بعد جابجایی به اندازه‌ی $\frac{b}{a}$

$$x_1(t) = x(at)$$

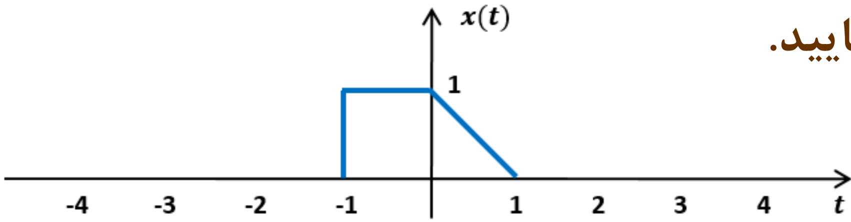
$$x_2(t) = x_1\left(t+\frac{b}{a}\right) = x\left(a\left(t+\frac{b}{a}\right)\right) = x(at+b)$$

دقت کنید:

برای دستیابی به سیگنال $x(at+b)$ از سیگنال $x(t)$، بهتر است ابتدا سیگنال را به اندازه‌ی b جابجا کنید و سپس حاصل را به نسبت a مقیاس کنید.

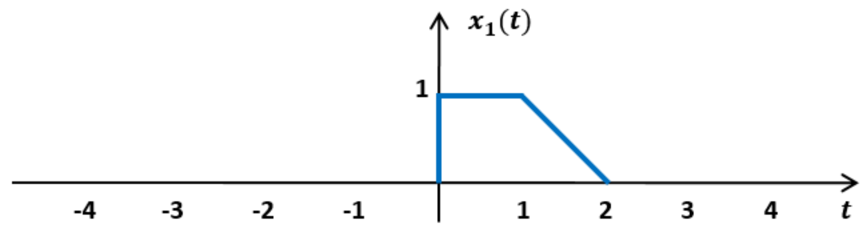
مثال ۱۹: مقیاس کردن و جابجایی زمانی

برای $x(t)$ داده شده، $x\left(\frac{1}{2}t-1\right)$ را تعیین و ترسیم نمایید.

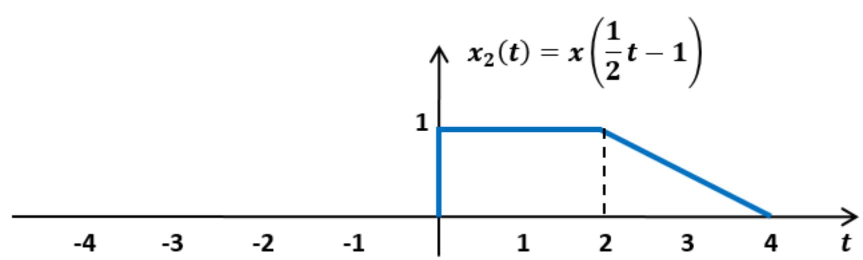


حل به روش اول:

$$x_1(t) = x(t-1)$$

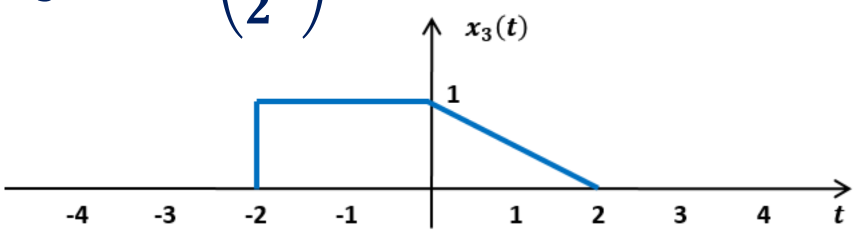


$$x_2(t) = x_1\left(\frac{1}{2}t\right) = x\left(\frac{1}{2}t-1\right)$$

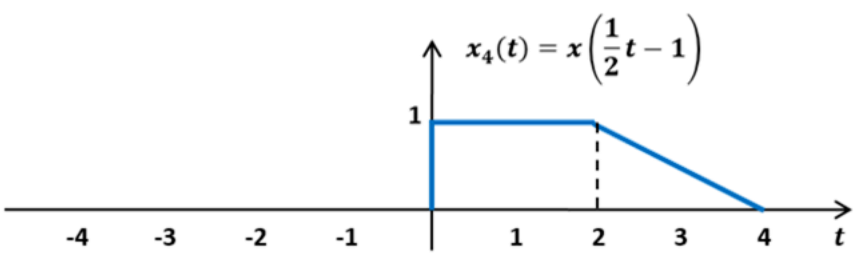


حل به روش دوم:

$$x_3(t) = x\left(\frac{1}{2}t\right)$$

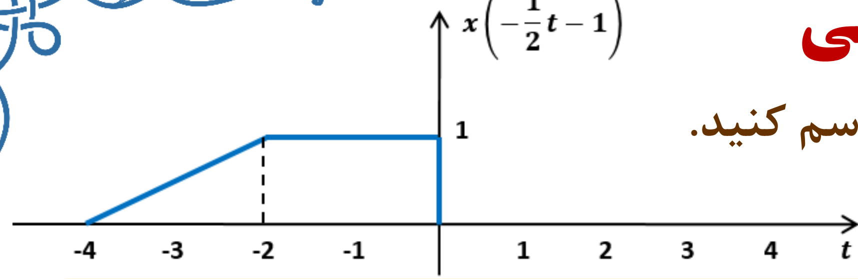


$$x_4(t) = x_3(t-2) = x\left(\frac{1}{2}t-1\right)$$



مثال ۲۰: مقیاس کردن و جابجایی زمانی

$x\left(-\frac{1}{2}t-1\right)$ داده شده است. $x(t)$ را تعیین نموده و رسم کنید.

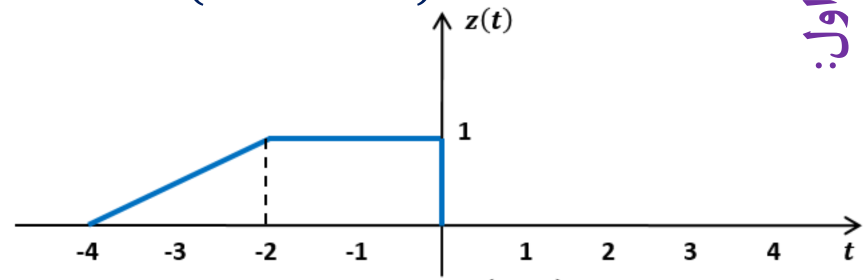


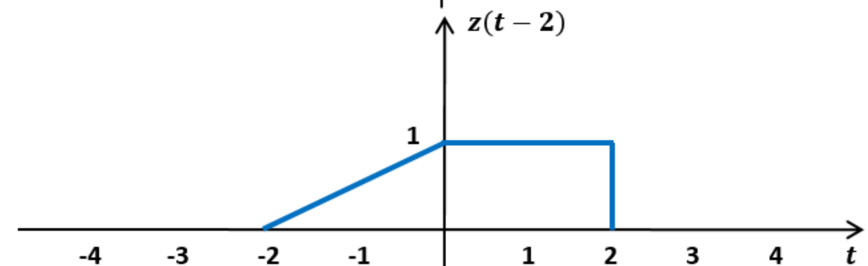
حل به روش اول:

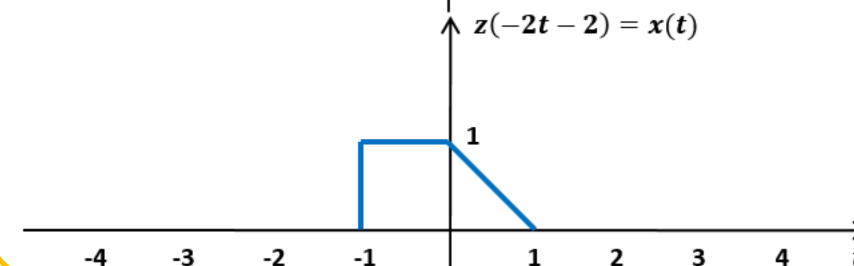
$$x\left(-\frac{1}{2}t-1\right)=z(t)$$

$$x(t-1)=z(-2t)$$

$$x(t)=z\big(-2(t+1)\big)=z(-2t-2)$$





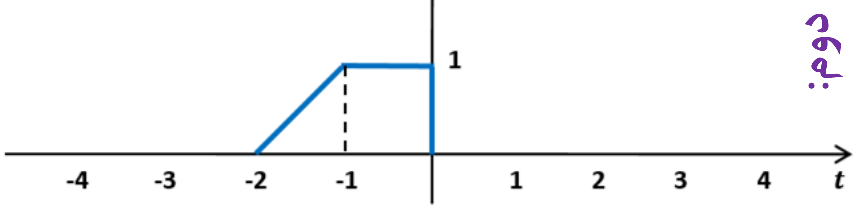


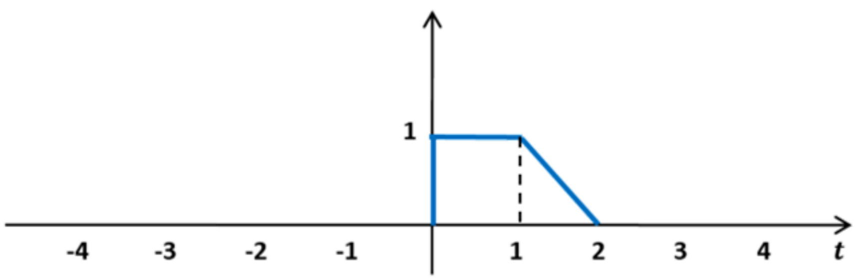
حل به روش دوم:

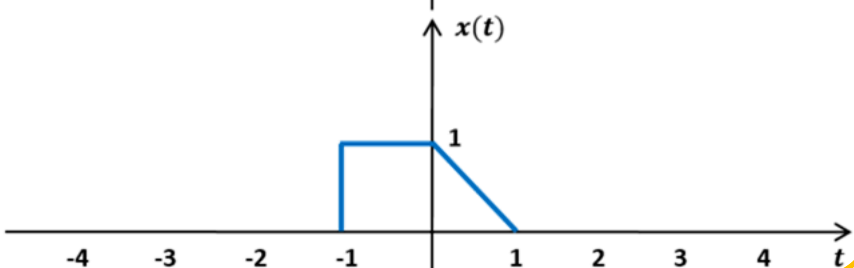
اول: یک واحد جابجایی به سمت راست؛

دوم: قرینه کردن سیگنال؛

سوم: گسترش سیگنال به نسبت ۲؛





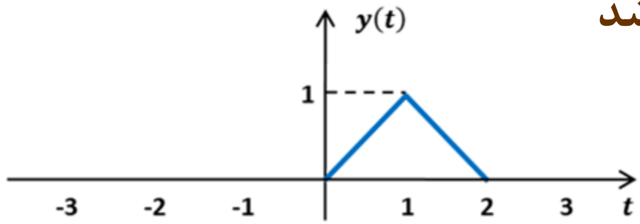


تست ۱: کنکور کارشناسی ارشد ۱۳۸۶، سوال ۲۶

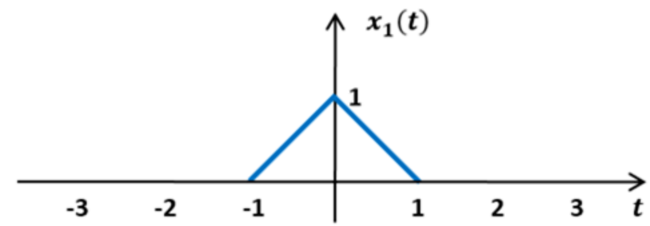
ضابطه‌ی ورودی $x(t)$ و خروجی $y(t)$ یک سیستم به صورت زیر است:

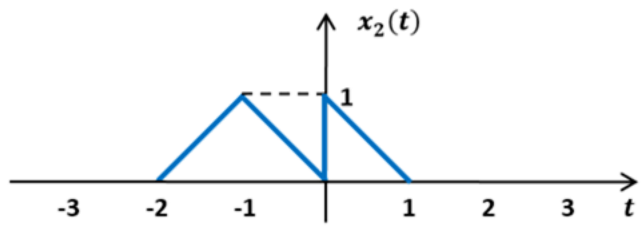
$$y(t)=\begin{cases} x(t-1) & t\geq 1 \\ x(-t+1) & t\leq 1 \end{cases}$$

اگر خروجی سیستم به صورت $y(t)$ باشد



ورودی سیستم به کدام یک از دو شکل $x_1(t)$ و $x_2(t)$ می‌تواند باشد؟





الف) فقط $x_1(t)$

ب) فقط $x_2(t)$

ج) هر دو

د) هیچ یک

سیگنال‌های توان و انرژی

تعریف «انرژی کل»:

$$E \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2\,dt$$

$$E \triangleq \sum_{-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2$$

تعریف «توان متوسط»:

$$P_\infty \triangleq \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |x(t)|^2\,dt$$

$$P_\infty \triangleq \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N} |x[n]|^2$$

توان متوسط برای سیگنال‌های متناوب:

$$P_\infty = P_{T_0} = \frac{1}{T_0}\int_{\langle T_0\rangle} |x(t)|^2\,dt$$

$$P_\infty = P_{N_0} = \frac{1}{N_0}\sum_{n=\langle N_0\rangle} |x[n]|^2$$

❖ **سیگنال انرژی:** سیگنالی که انرژی کل آن مقدار محدود غیرصفری باشد. $0 < E < \infty$

❖ **سیگنال توان:** سیگنالی که توان متوسط آن مقدار محدود غیرصفری باشد. $0 < P_\infty < \infty$

دقت کنید:

- توان متوسط سیگنال انرژی برابر صفر است.
- انرژی کل سیگنال توان برابر بی‌نهایت است.
- سیگنال‌های متناوب کران‌دار، سیگنال توان هستند یعنی دارای توان متوسط محدود غیرصفر و انرژی کل بی‌نهایت می‌باشند.

دقت کنید: بازنویسی سری توانی به صورت بسته

اگر یک سری توانی پایدار داشته باشیم می‌توان با رابطه‌ی زیر آن را به فرم بسته بازنویسی نمود:

$$\text{حاصل} = \frac{\left(\text{جمله‌ی بعد از جمله آخر}\right)-\left(\text{جمله اول}\right)}{1-\left(\text{قدر نسبت}\right)}$$

به عبارت دیگر داریم:

(۱۲-۱) سری محدود:
$$\sum_{n=0}^{N-1} \alpha^n = \begin{cases} N & \alpha = 1 \\ \frac{1-\alpha^N}{1-\alpha} & \alpha \neq 1 \end{cases}$$

(۱۳-۱) سری نامحدود با شرط $|\alpha| < 1$:
$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n = \frac{1}{1-\alpha}$$

(۱٤-۱) سری نامحدود با شرط $|\alpha| < 1$:
$$\sum_{n=0}^{\infty} n\alpha^n = \frac{\alpha}{(1-\alpha)^2}$$

روابط ۱۲-۱ تا ۱٤-۱ را در قالب تمرین اثبات خواهید کرد. این روابط در محل‌های مختلف کتاب استفاده می‌شوند و از این‌رو بهتر است آنها را به خاطر بسپارید.

مثال ۲۱: سیگنال‌های توان و انرژی

تعیین کنید که هر کدام از سیگنال‌های زیر، سیگنال توان است، سیگنال انرژی است یا هیچ‌کدام.

الف: $x(t)=\begin{cases}1 & 0\le t\le 1\\ 0 & others\end{cases}$

ب: $x(t)=\begin{cases}1 & 0\le t< 1\\ 0 & 1\le t< 2\end{cases},\qquad x(t)=x(t+2)$

ج: $x(t)=4$

د: $x(t)=t$

ه: $x(t)=Ae^{-t}u(t)$

و: $x[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$

ز: $x[n]=\begin{cases}1 & n=0\\ 2 & n=1\\ 3 & n=2\\ 0 & n=3\end{cases},\qquad x[n+4]=x[n]$

حل الف: سیگنال انرژی است.

$$E=\int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|^2\,dt=\int_0^1 dt=1$$

حل ب: سیگنال توان است.

$$P_\infty=P_T=\frac{1}{T}\int_{\langle T\rangle}|x(t)|^2\,dt=\frac{1}{2}\int_0^2|x(t)|^2\,dt=\frac{1}{2}\int_0^1 dt=\frac{1}{2}$$

حل ج: سیگنال توان است.

$$P_\infty=P_T=\frac{1}{T}\int_0^T|x(t)|^2\,dt=\frac{1}{1}\int_0^1|4|^2\,dt=16$$

حل د: نه سیگنال انرژی است و نه سیگنال توان.

$$P_\infty=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|x(t)|^2\,dt=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}t^2\,dt=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T t^2\,dt$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\frac{t^3}{3}\bigg|_0^T=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\frac{T^3}{3}\to\infty$$

حل ه:

$$E=\int_{\mp\infty}^{+\infty}|x(t)|^2\,dt=\int_0^{+\infty}|Ae^{-t}|^2\,dt=A^2\int_0^{+\infty}e^{-2t}\,dt=\frac{A^2}{-2}e^{-2t}\bigg|_0^\infty=\frac{A^2}{2}$$

سیگنال انرژی است.

حل و: سیگنال انرژی است.

$$E=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|x[n]|^2=\sum_{n=0}^{+\infty}\left|\frac{1}{2}\right|^{2n}=\sum_{n=0}^{+\infty}\left|\frac{1}{4}\right|^{n}=\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=\frac{4}{3}$$

مثال ۲۱: سیگنال‌های توان و انرژی

تعیین کنید که هر کدام از سیگنال‌های زیر، سیگنال توان است، سیگنال انرژی است یا هیچ‌کدام.

الف : $x(t) = \begin{cases} 1 & 0 \le t \le 1 \\ 0 & others \end{cases}$

ب : $x(t) = \begin{cases} 1 & 0 \le t < 1 \\ 0 & 1 \le t < 2 \end{cases}, \qquad x(t) = x(t+2)$

ج : $x(t) = 4$

د : $x(t) = t$

ه : $x(t) = Ae^{-t}u(t)$

و : $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$

ز : $x[n] = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 2 & n = 1 \\ 3 & n = 2 \\ 0 & n = 3 \end{cases}, \qquad x[n+4] = x[n]$

حل ز : سیگنال توان است.

$$P_\infty = P_{N_0} = \frac{1}{N_0}\sum_{n=\langle N_0\rangle} |x[n]|^2 = \frac{1}{4}\left(1^2 + 2^2 + 3^2 + 0^2\right) = \frac{1}{4}(1+4+9) = \frac{14}{4}$$

دقت کنید

بهتر است پیش از محاسبه توان متوسط یا انرژی کل، سیگنال را به دقت وارسی کنید تا از محاسبات بی‌فایده پرهیز گردد. به عنوان مثال، اگر برای بند د، انرژی کل سیگنال را محاسبه کنیم بی‌نهایت به دست می‌آید که نمی‌توان بر اساس آن نتیجه‌گیری کرد و لازم است توان متوسط سیگنال را نیز در ادامه محاسبه کرد.

سیگنال‌های زوج و فرد

تعریف «سیگنال زوج»:

$x(t)$ زوج است اگر: $x(t) = x(-t)$

$x[n]$ زوج است اگر: $x[n] = x[-n]$

تعریف «سیگنال فرد»:

$x(t)$ فرد است اگر: $x(t) = -x(-t)$

$x[n]$ فرد است اگر: $x[n] = -x[-n]$

هر سیگنال دلخواه را می‌توان به یک سیگنال زوج و یک سیگنال فرد تجزیه نمود که با جمع‌کردن آنها، سیگنال اصلی حاصل می‌گردد.

$$Even\{x[n]\} = x_e[n] = \frac{1}{2}(x[n] + x[-n])$$

$$Odd\{x[n]\} = x_o[n] = \frac{1}{2}(x[n] - x[-n])$$

$$x_e[n] + x_o[n] = x[n]$$

$$Even\{x(t)\} = x_e(t) = \frac{1}{2}\big(x(t) + x(-t)\big)$$

$$Odd\{x(t)\} = x_o(t) = \frac{1}{2}\big(x(t) - x(-t)\big)$$

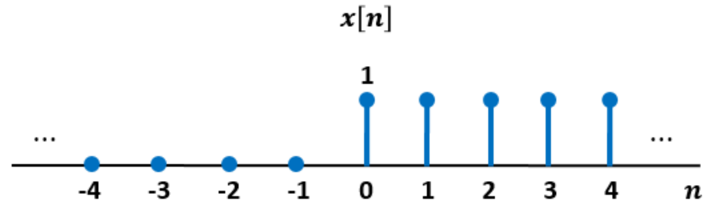
$$x_e(t) + x_o(t) = x(t)$$

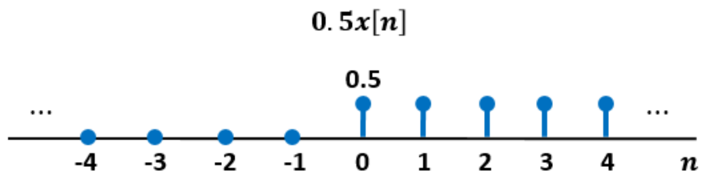
مثال ۲۲: تجزیه سیگنال زمان- گسسته به بخش‌های زوج و فرد

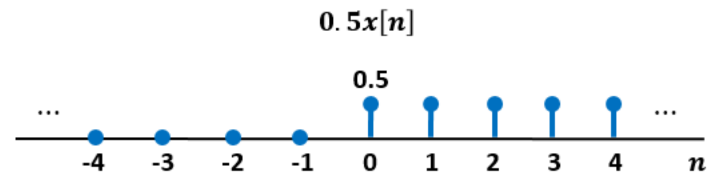
بخش‌های زوج و فرد سیگنال زمان- گسسته $x[n]$ داده شده را تعیین و ترسیم نمایید.

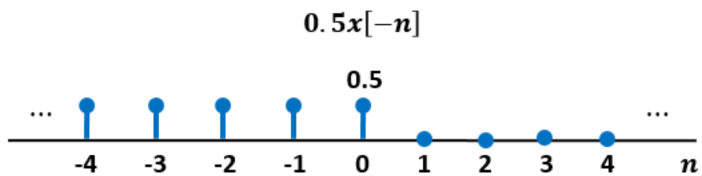
$$x[n] = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

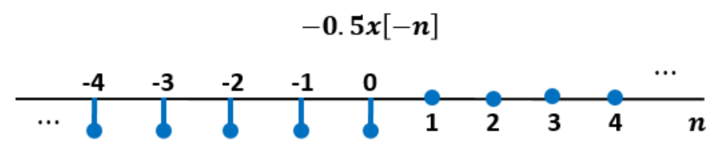
حل:

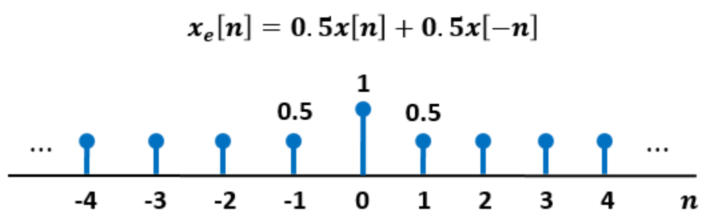


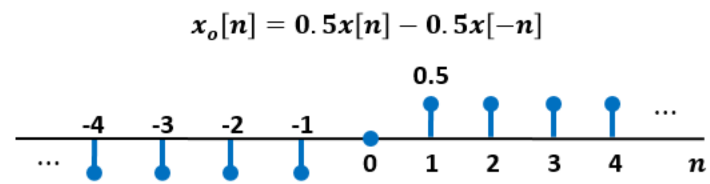






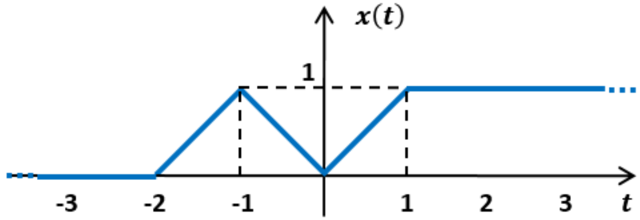




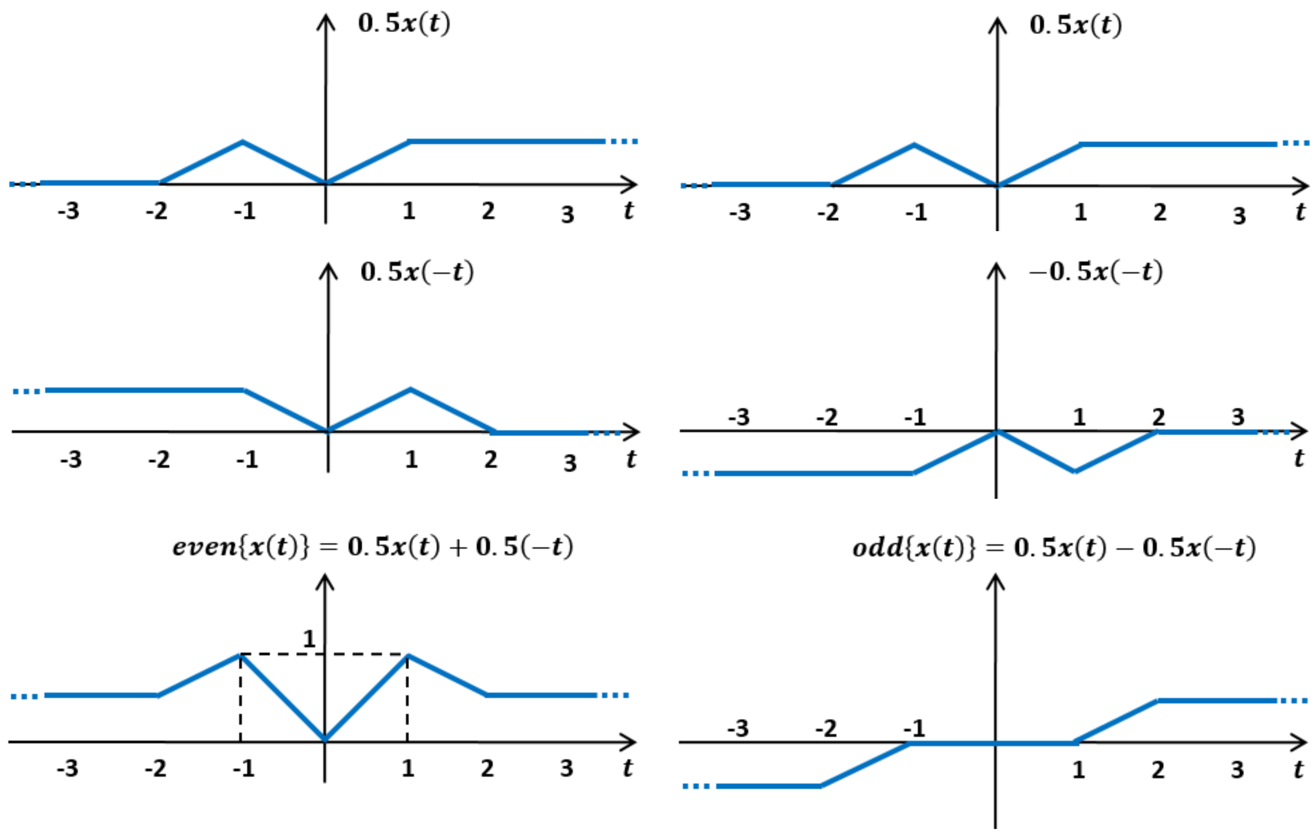


مثال ۲۳: تجزیه سیگنال زمان– پیوسته به بخش‌های زوج و فرد

بخش‌های زوج و فرد سیگنال زمان- پیوسته $x(t)$ داده شده را تعیین و ترسیم نمایید.



حل:



مثال ۲۴: تجزیه‌ی سیگنال به بخش‌های زوج و فرد– روش تحلیلی

برای سیگنال $x[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^{n}u[n]$، بخش‌های زوج و فرد سیگنال را تعیین نمایید.

$$Even\{x[n]\}=x_e[n]=\frac{1}{2}(x[n]+x[-n])=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{n}u[n]+\left(\frac{1}{2}\right)^{-n}u[-n]\right\}$$

$$\Longrightarrow Even\{x[n]\}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}u[n]+\left(\frac{1}{2}\right)^{-n+1}u[-n]$$

$$Odd\{x[n]\}=x_o[n]=\frac{1}{2}(x[n]-x[-n])=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{n}u[n]-\left(\frac{1}{2}\right)^{-n}u[-n]\right\}$$

$$\Longrightarrow Odd\{x[n]\}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}u[n]-\left(\frac{1}{2}\right)^{-n+1}u[-n]$$

ویژگی‌های سیگنال زوج و فرد

ویژگی اول:

$$x_o(0) = 0\,, \qquad x_o[0] = 0 \qquad\qquad x_e(0) = x(0)\,, \qquad x_e[0] = x[0]$$

ویژگی دوم:

حاصل‌ضرب یک سیگنال زوج و یک سیگنال فرد، سیگنالی فرد خواهد بود.

حاصل ضرب دو سیگنال زوج یا دو سیگنال فرد، سیگنالی زوج خواهد بود.

ویژگی سوم:

$$for\ \forall\, \tau \in R, \qquad \int_{-\tau}^{\tau} x_o(t)dt = 0 \qquad\qquad \int_{-\infty}^{+\infty} x_o(t)dt = 0$$

$$for\ \forall\, \eta \in Z, \qquad \sum_{n=-\eta}^{\eta} x_o[n] = 0 \qquad\qquad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_o[n] = 0$$

ویژگی چهارم:

$$for\ \forall\, \tau \in R, \qquad \int_{-\tau}^{\tau} x_e(t)dt = 2\int_{0}^{\tau} x_e(t)dt$$

$$for\ \forall\, \eta \in Z, \qquad \sum_{n=-\eta}^{\eta} x_e[n] = 2\sum_{n=0}^{\eta} x_e[n] - x_e[0] = 2\sum_{n=1}^{\eta} x_e[n] + x_e[0]$$

ویژگی پنجم:

$$for\ \forall\ \tau \in R, \qquad \int_{-\tau}^{+\tau} x^2(t)dt = \int_{-\tau}^{+\tau} x_e^2(t)dt + \int_{-\tau}^{+\tau} x_o^2(t)dt$$

$$for\ \forall\ \eta \in Z, \qquad \sum_{n=-\eta}^{\eta} x^2[n] = \sum_{n=-\eta}^{\eta} x_e^2[n] + \sum_{n=-\eta}^{\eta} x_o^2[n]$$

سیگنال‌های متناوب/ نامتناوب

شرط تناوب سیگنال زمان–پیوسته:

$$\exists\, T \in R, \qquad x(t+T) = x(t)$$

شرط تناوب سیگنال زمان–گسسته:

$$\exists\, N \in Z, \qquad x[n+N] = x[n]$$

مثال ۲۵: بررسی متناوب بودن سینوسی/ کسینوسی زمان– گسسته

متناوب بودن سیگنال‌های $x(t) = \sin \omega_0 t$ و $x[n] = \cos \Omega_0 n$ را بررسی نموده و در صورت متناوب بودن، دوره تناوب اساسی را تعیین نمایید.

حل:

در فرم زمان– پیوسته، سیگنال‌های سینوسی و کسینوسی همواره متناوب‌اند.

پس سیگنال $x(t) = sin\, \omega_0 t$ متناوب با دوره‌ی تناوب $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ است.

در فرم زمان– گسسته، سیگنال‌های سینوسی و کسینوسی می‌توانند متناوب باشند یا نباشند. برای بررسی متناوب بودن $sin\, \Omega_0 n$ و $cos\, \Omega_0 n$ باید $\frac{2\pi}{\Omega_0}$ را تشکیل داده و گویا (rational) بودن آن را بررسی کنیم. اگر $\frac{2\pi}{\Omega_0}$ گویا باشد سیگنال متناوب است. برای تعیین دوره‌ی تناوب اساسی سیگنال متناوب، اعداد صورت و مخرج عبارت $\frac{2\pi}{\Omega_0}$ را ساده می‌کنیم تا نسبت به هم اول شوند. در این شرایط، عدد صحیح صورت کسر، دوره‌ی تناوب اساسی سیگنال را مشخص می‌کند.

مثال ۲۶: بررسی متناوب بودن و تعیین دوره‌ی تناوب

متناوب بودن سیگنال‌های زیر را بررسی نموده و در صورت متناوب بودن، دوره‌ی تناوب اساسی را تعیین نمایید.

الف : $x(t)=\cos\left(\frac{5\pi}{3}t\right)$

حل الف: با دوره‌ی تناوب $\mathrm{T}=\frac{2\pi}{\Omega_0}=\frac{2\pi}{(5\pi/3)}=\frac{6}{5}$ متناوب است.

ب : $x(t)=\sin\left(\frac{5\pi}{3}t+\frac{\pi}{2}\right)$

حل ب: با دوره‌ی تناوب $\mathrm{T}=\frac{2\pi}{\Omega_0}=\frac{2\pi}{(5\pi/3)}=\frac{6}{5}$ متناوب است.

ج : $x[n]=\cos\left(\frac{5\pi}{3}n\right)$

حل ج: با دوره‌ی تناوب $N=6$ متناوب است. $\frac{2\pi}{\Omega_0}=\frac{2\pi}{(5\pi/3)}=\frac{6}{5}$

د : $x[n]=\sin\left(\frac{5}{3}n\right)$

حل د: $\frac{6\pi}{5}=\frac{2\pi}{(5/3)}=\frac{2\pi}{\Omega_0}$ سیگنال نامتناوب است.

ه : $x(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}e^{-(2t+n)}$

حل ه: $x(t+T)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}e^{-(2(t+T)+n)}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}e^{-(2t+(2T+n))}$

برای تعیین دوره‌ی تناوب، باید T را به نحوی انتخاب کنیم که $2T$ کوچکترین مقدار صحیح مثبت شود.

پس سیگنال با دوره تناوب $T=0.5$ متناوب است.

و : $x(t)=\cos(2\pi t)+j\sin(\pi t)$

حل و: بخش اول سیگنال با دوره‌ی $T_1=1$ و بخش دوم با دوره‌ی $T_2=2$ متناوب هستند. بنابراین سیگنال با دوره‌ی تناوب برابر کوچکترین مضرب مشترک T_1 و T_2 یعنی $T=2$ متناوب است.

نکته: دوره‌ی تناوب ترکیب خطی دو سیگنال متناوب

اگر دو سیگنال $x_1(t)$ و $x_2(t)$ به ترتیب دوره‌ی تناوب T_1 و T_2 متناوب باشند هر ترکیب خطی آنها یعنی $\alpha x_1(t)+\beta x_2(t)$ تنها در صورتی متناوب است که نسبت T_1/T_2 مقداری *rational* باشد در این صورت، دوره‌ی تناوب برابر با کوچکترین مضرب مشترک T_1 و T_2 است.

فهرست مطالب

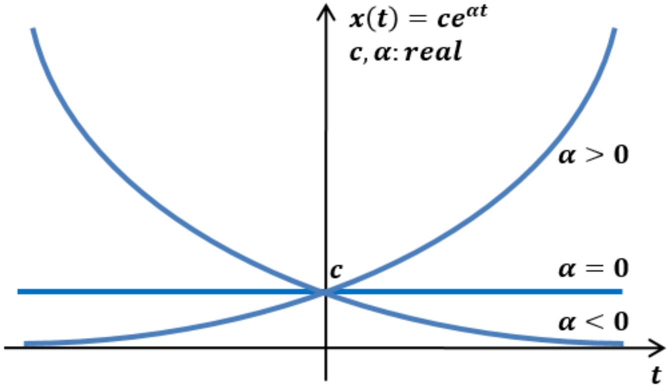
- مفاهیم سیگنال و سیستم
- ویژگی‌های سیگنال
- معرفی سیگنال‌های پایه
- انواع سیستم
- اتصال سیستم‌ها
- ویژگی‌های سیستم‌ها
- مثال‌های مروری
- مثال‌های نرم‌افزاری
- تمرین‌های تئوری
- تمرین‌های نرم‌افزاری

فرم عمومی سیگنال نمایی مختلط زمان– پیوسته:

$$x(t) = ce^{\alpha t} \qquad c, \alpha : complex$$

برای آشنایی با این سیگنال و درک شهودی آن، بهتر است ابتدا آن را به فرم ساده‌تر وارسی کنیم.

حالت اول: با فرض حقیقی بودن c و α.



حالت دوم: با فرض حقیقی بودن c و موهومی محض بودن α (فرض کنید $\alpha = j\omega_0$).

$$x(t) = ce^{j\omega_0 t} = c(\cos \omega_0 t + j \sin \omega_0 t)$$

- با دوره‌ی تناوب $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ متناوب است.
- با افزایش ω_0، دوره‌ی تناوب سیگنال کاهش می‌یابد.
- این سیگنال توان است.

$$P_\infty = P_T = \frac{1}{T}\int_{\langle T\rangle} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{T}\int_0^T \left|ce^{j\omega_0 t}\right|^2 dt = \frac{1}{T}\int_0^T c^2 dt = c^2 < \infty$$

- انرژی کل این سیگنال بی‌نهایت است.

حالت سوم: با فرض مختلط بودن c و α (حالت عمومی).

$$x(t) = ce^{\alpha t} \quad , \qquad c, \alpha : complex$$

$$c = |c|e^{j\theta}$$

$$\alpha = r + j\omega_0$$

$$\Rightarrow x(t) = |c|e^{j\theta}\, e^{(r+j\omega_0)t} \quad \Rightarrow x(t) = |c|e^{j\theta}\, e^{rt} e^{j\omega_0 t} \quad \Rightarrow x(t) = |c|\, e^{rt} e^{j(\omega_0 t + \theta)}$$

مثال ۲۷: ترسیم اندازه‌ی سیگنال نمایی مختلط

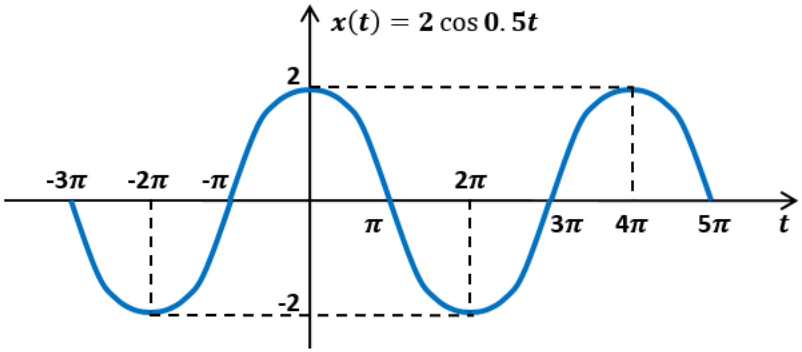
اندازه‌ی سیگنال $x(t) = e^{j3t} + e^{j2t}$ را رسم کنید.

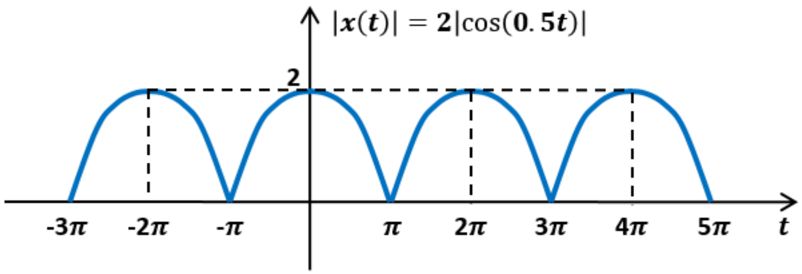
$$x(t) = e^{j3t} + e^{j2t} = e^{j2.5t}\left(e^{j0.5t} + e^{-j0.5t}\right)$$

$$\Longrightarrow x(t) = e^{j2.5t}(2\cos(0.5t))$$

$$\Longrightarrow |x(t)| = \left|2\cos(0.5t)\, e^{j2.5t}\right| = 2\,|\cos(0.5t)|\left|e^{j2.5t}\right|$$

$$\Longrightarrow |x(t)| = 2\,|\cos(0.5t)|$$





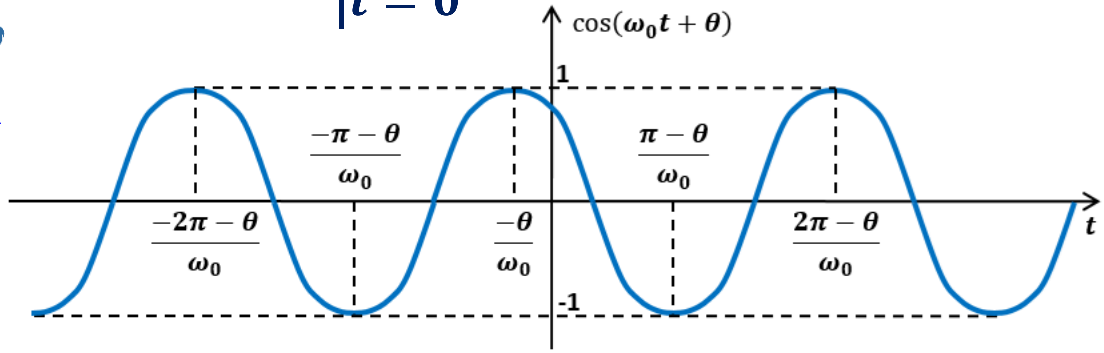
http://maleki.semnan.ac.ir
دکتر علی مالکی

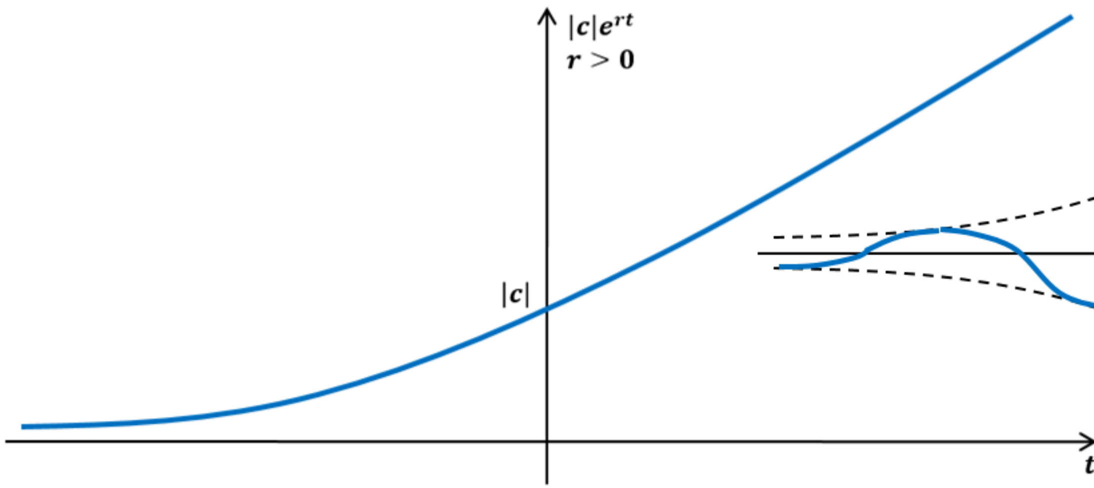
مثال ۲۸: ترسیم سیگنال نمایی

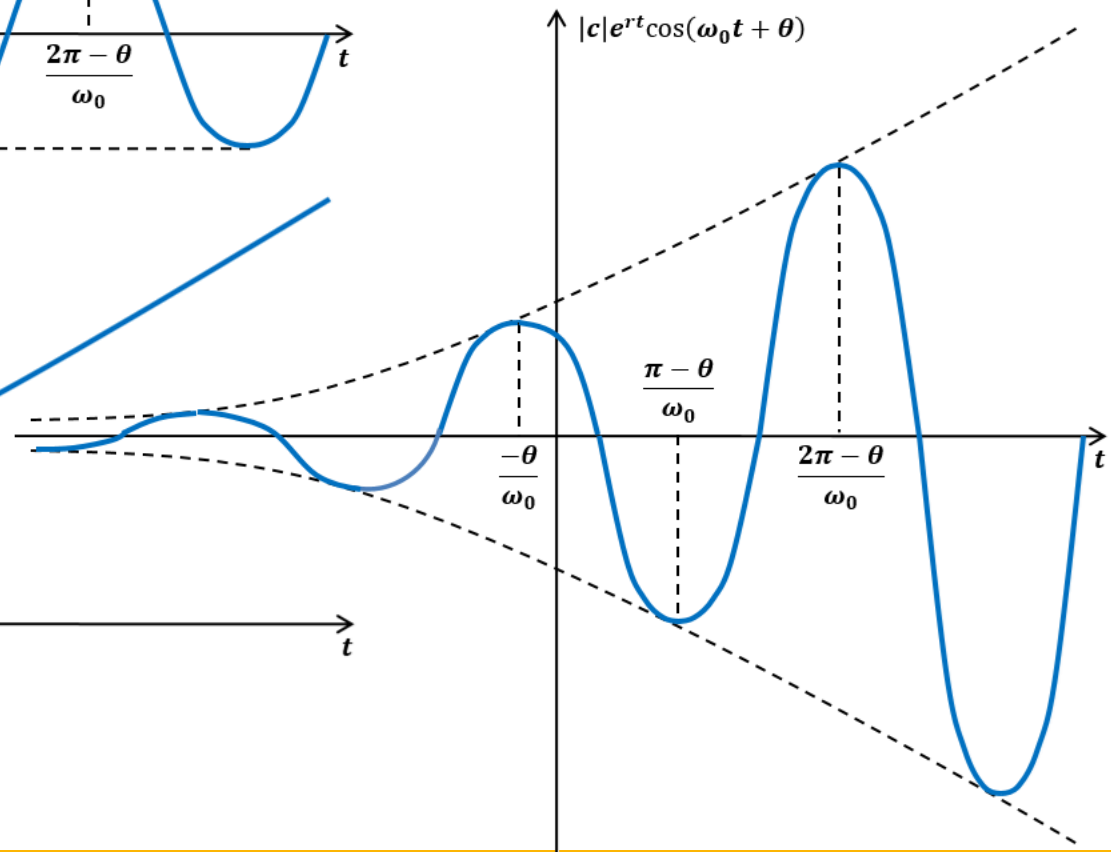
سیگنال $x(t) = |c|e^{rt}\cos(\omega_0 t + \theta)$ را یک بار با فرض $r > 0$ و بار دیگر با فرض $r < 0$ رسم کنید.

$$\cos(\omega_0 t + \theta)\Big|_{t=0} = \cos\theta \qquad \omega_0 t_1 + \theta = 0 \Rightarrow t_1 = -\frac{\theta}{\omega_0}$$

با فرض $r > 0$:





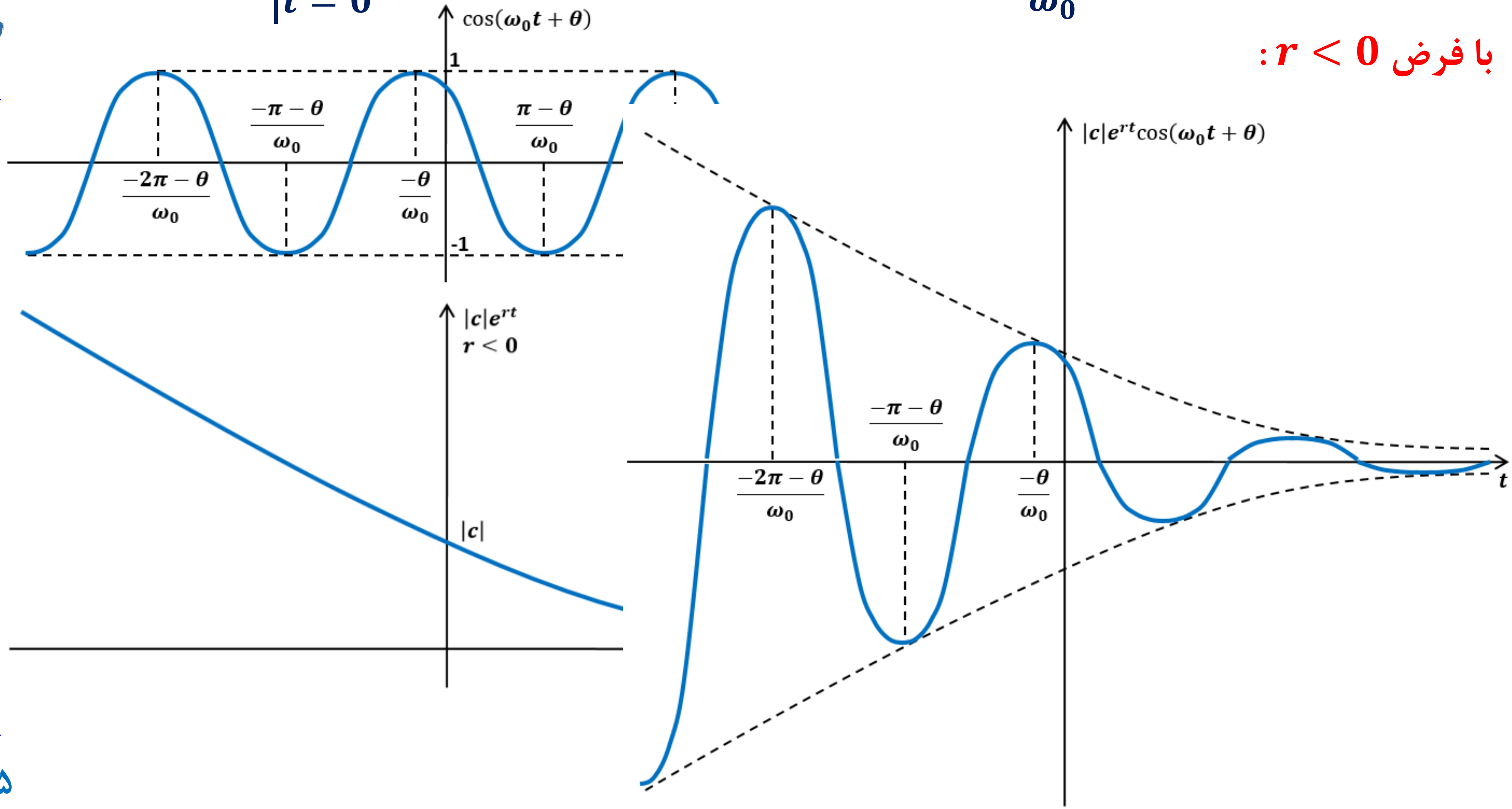


مثال ۲۸: ترسیم سیگنال نمایی

سیگنال $x(t) = |c|e^{rt}\cos(\omega_0 t + \theta)$ را یک بار با فرض $r > 0$ و بار دیگر با فرض $r < 0$ رسم کنید.

$$\cos(\omega_0 t + \theta)\Big|_{t=0} = \cos\theta \qquad \omega_0 t_1 + \theta = 0 \Rightarrow t_1 = -\frac{\theta}{\omega_0}$$

با فرض $r < 0$:



نمایی مختلط زمان– گسسته

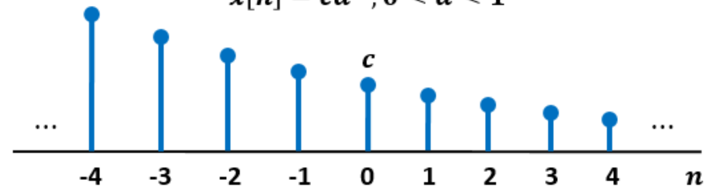
فرم عمومی سیگنال نمایی مختلط زمان– گسسته:

$$x[n] = ca^n \qquad c, a\text{: complex}$$

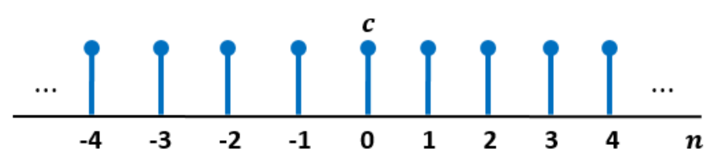
برای آشنایی با این سیگنال و درک شهودی آن، بهتر است ابتدا آن را به فرم ساده‌تر وارسی کنیم.

حالت اول: با فرض حقیقی بودن c و a .

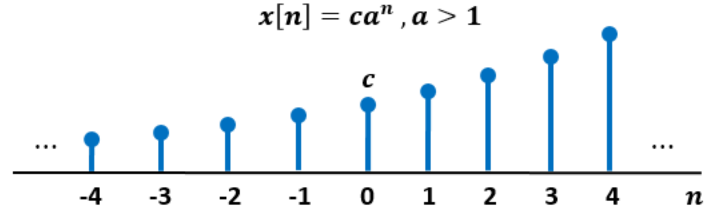
$x[n] = ca^n \,, 0 < a < 1$



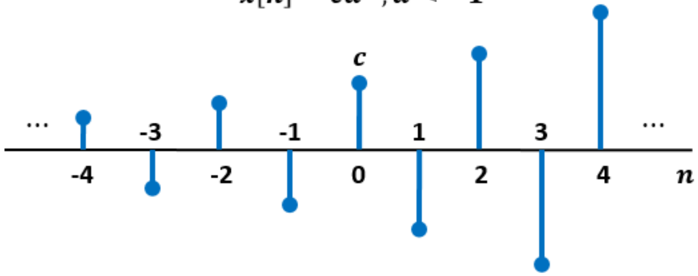
$x[n] = ca^n \,, a = 1$



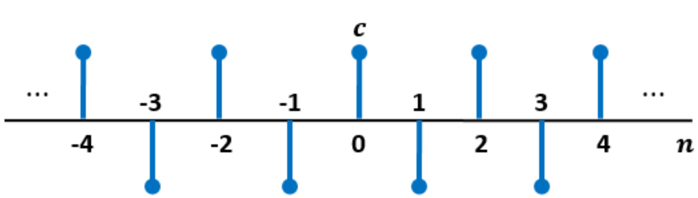
$x[n] = ca^n \,, a > 1$



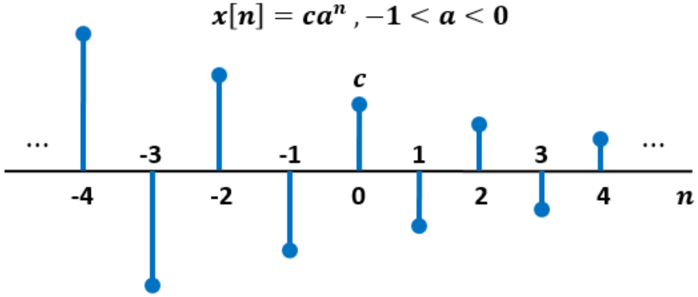
$x[n] = ca^n \,, a < -1$



$x[n] = ca^n \,, a = -1$



$x[n] = ca^n \,, -1 < a < 0$



حالت دوم: با فرض حقیقی بودن c و $a = e^{j\Omega_0}$.

$$x[n] = c\, e^{j\Omega_0 n} = c(\cos\Omega_0 n + j\sin\Omega_0 n)$$

سیگنال نمایی مختلط در این حالت می‌تواند **متناوب یا نامتناوب** باشد.

برای بررسی متناوب بودن، $\frac{2\pi}{\Omega_0}$ را تشکیل می‌دهیم. در صورتی که $\frac{2\pi}{\Omega_0}$ مقداری **گویا** (*rational*) باشد سیگنال متناوب است.

برای تعیین دوره‌ی تناوب لازم است اعداد صورت و مخرج را ساده کنیم تا **نسبت به هم اول باشند**. **عدد صورت**، دوره‌ی تناوب را نشان می‌دهد.

حالت سوم: با فرض مختلط بودن c و a (حالت عمومی).

$$x[n] = ca^n, \qquad c, a: complex$$

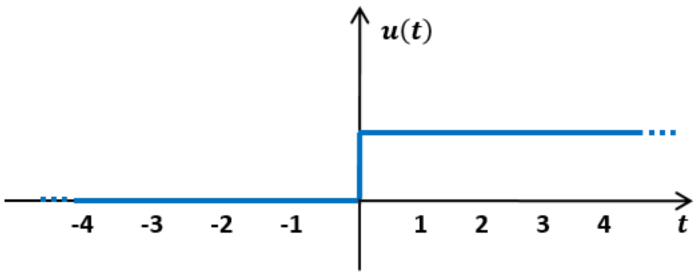
$$c = |c|e^{j\varphi}, \qquad a = |a|e^{j\Omega_0}$$

$$\Rightarrow x[n] = |c|\, e^{j\varphi} . \left(|a|e^{j\Omega_0}\right)^n = |c||a|^n\, e^{j(\Omega_0 n + \varphi)}$$

پله واحد

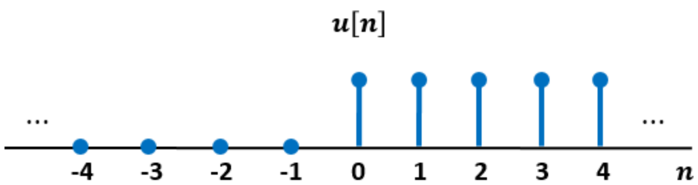
سیگنال پله واحد زمان- پیوسته :

$$u(t)=\begin{cases}1 & t\geq 0\\ 0 & t<0\end{cases}$$



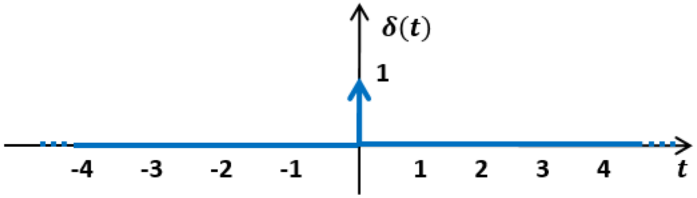
سیگنال پله واحد زمان- گسسته :

$$u[n]=\begin{cases}1 & n\geq 0\\ 0 & n<0\end{cases}$$



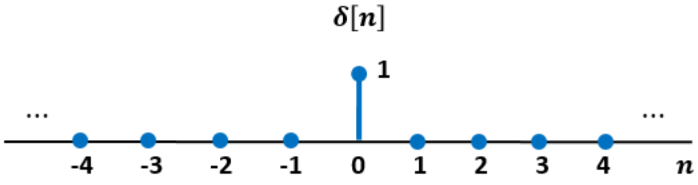
ضربه واحد زمان- پیوسته یا دلتای دیراک:

$$\delta(t) \triangleq \begin{cases} \infty & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases}$$



سیگنال ضربه واحد زمان- گسسته یا دلتای کرونکر:

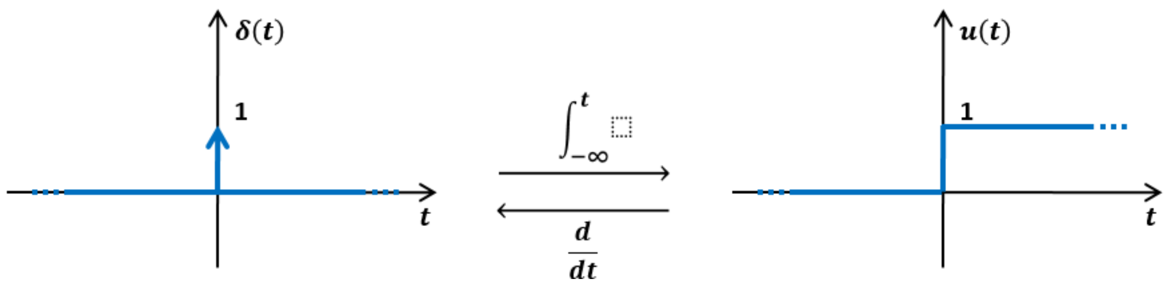
$$\delta[n] \triangleq \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$



دلتای دیراک و پله واحد زمان- پیوسته دارای رابطه‌ی مشتقی/ انتگرالی هستند:

$$\delta(t) = \frac{d}{dt}u(t)$$

$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)d\tau$$



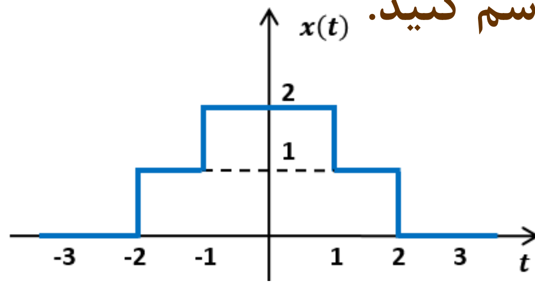
دقت کنید!

مشتق سیگنال زمان- پیوسته در نقاط پرش برابر ضربه‌ای با سطح زیر منحنی برابر با مقدار پرش است. پرش به سمت بالا، متناظر با ضربه‌ای مثبت و پرش به سمت پایین نشانگر ضربه‌ای منفی است.

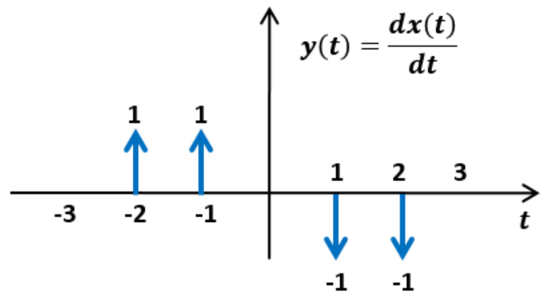
مثال ۲۹: مشتق سیگنال زمان– پیوسته در نقاط پرش

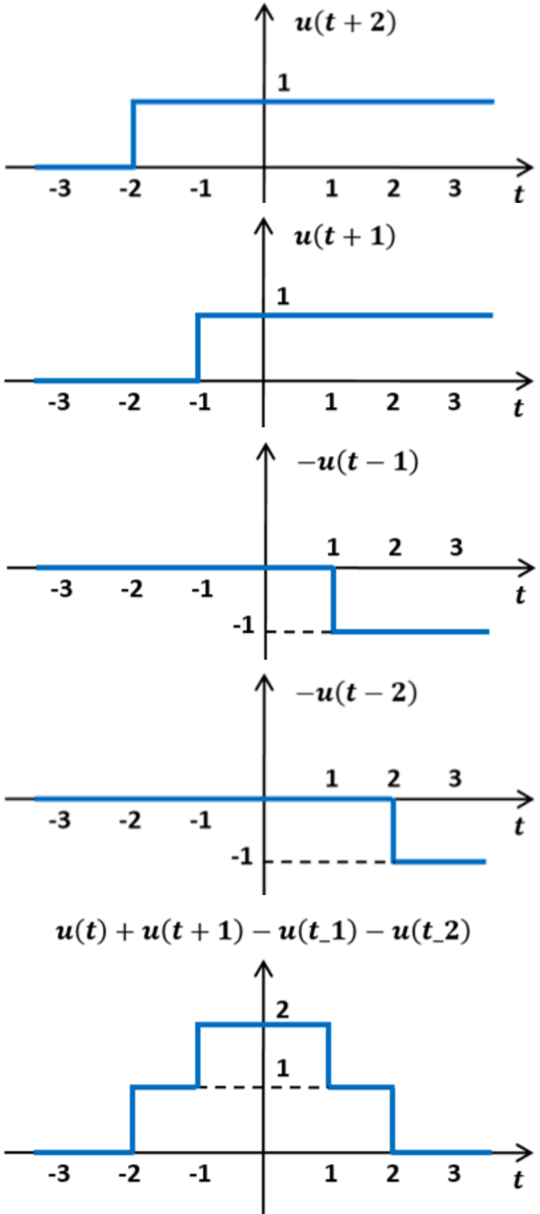
سیگنال زمان- پیوسته‌ی $x(t)$ مطابق شکل زیر داده شده است.

سیگنال $y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$ را تعیین و رسم کنید.



حل: شیوه‌ی ترسیمی:





شیوه‌ی تحلیلی:

$$x(t) = u(t+2) + u(t+1) - u(t-1) - u(t-2)$$

$$\Rightarrow \quad x(t) = \delta(t+2) + \delta(t+1) - \delta(t-1) - \delta(t-2)$$

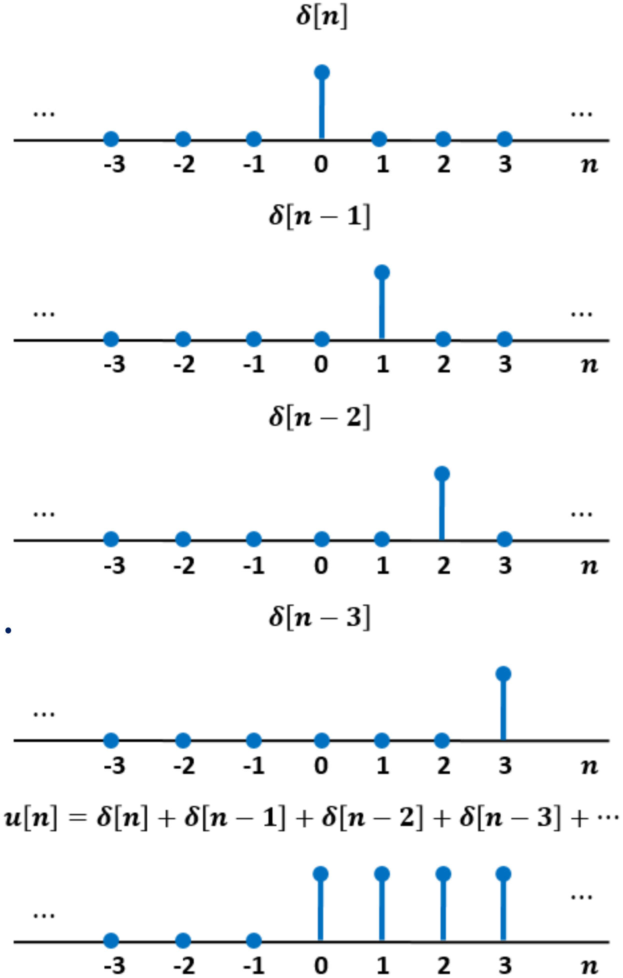
ضربه واحد زمان- گسسته و پله واحد زمان- گسسته دارای رابطه‌ی تفاضلی/ انباره‌ای می‌باشند

$$\delta[n] = u[n] - u[n-1]$$

$$u[n] = \sum_{m=-\infty}^{n} \delta[m]$$

$$u[n] = \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n-k]$$

$$u[n] = \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n-k] = \delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2] + \cdots$$



ویژگی‌های سیگنال ضربه واحد زمان– پیوسته

ویژگی ۱: سطح زیر منحنی ضربه واحد

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1 \qquad \int_{0^-}^{0^+} \delta(t)dt = 1 \qquad \int_{t_0^-}^{t_0^+} \delta(t-t_0)dt = 1$$

ویژگی ۲: «ویژگی غربال کردن ضربه» یا «ویژگی نمونه‌برداری ضربه»

$$x(t)\delta(t-t_0) = x(t_0)\delta(t-t_0)$$

ویژگی ۳: کانولوشن یک سیگنال و ضربه واحد

$$x(t) * \delta(t-t_0) = x(t-t_0)$$

ویژگی ۴: تقارن زوج ضربه واحد

$$\delta(t) = \delta(-t)$$

ویژگی ۵: تقارن فرد مشتق ضربه واحد ($\delta'(t)$)

$$\delta'(t) = -\delta'(-t)$$

ویژگی ۶: مقیاس زمانی ضربه واحد

$$\delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t) \qquad \delta(at+b) = \frac{1}{|a|}\delta\left(t+\frac{b}{a}\right)$$

ویژگی ۷: عبارت ضرب یک سیگنال و مشتق ضربه

$$x(t)\delta'(t) = x(0)\delta'(t) - x'(0)\delta(t)$$

مثال ۳۰: اثبات ویژگی ۷ ضربه واحد زمان– پیوسته

نشان دهید تساوی $x(t)\delta'(t) = x(0)\delta'(t) - x'(0)\delta(t)$ برقرار است.

$$x(t)\delta(t) = x(0)\delta(t)$$

$$x'(t)\delta(t) + x(t)\delta'(t) = x(0)\delta'(t)$$

$$x'(0)\delta(t) + x(t)\delta'(t) = x(0)\delta'(t)$$

$$x(t)\delta'(t) = x(0)\delta'(t) - x'(0)\delta(t)$$

مثال ۳۱:

حاصل انتگرال‌های زیر را محاسبه نمایید.

الف : $\int_0^{10} e^{-t^2}\delta(t-6)dt$

حل الف:

$$\int_0^{10} e^{-t^2}\delta(t-6)dt = \int_0^{10} e^{-36}\delta(t-6)dt = e^{-36}\int_0^{10} \delta(t-6)dt = e^{-36}$$

ب : $\int_0^{10} e^{-t^3}\cos\omega t\,\delta(t+6)dt$

حل ب: حاصل انتگرال صفر می‌شود.

ج : $\int_0^{10} e^{-t}x(t)\delta(t-1)dt$

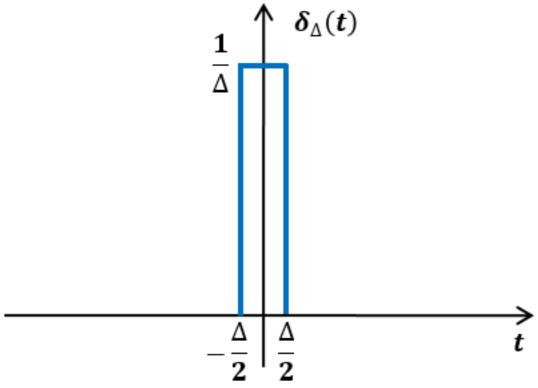
حل ج:

$$\int_0^{10} e^{-t}x(t)\delta(t-1)dt = \int_0^{10} e^{-1}x(1)\delta(t-1)dt = e^{-1}x(1)\int_0^{10} \delta(t-1)dt$$

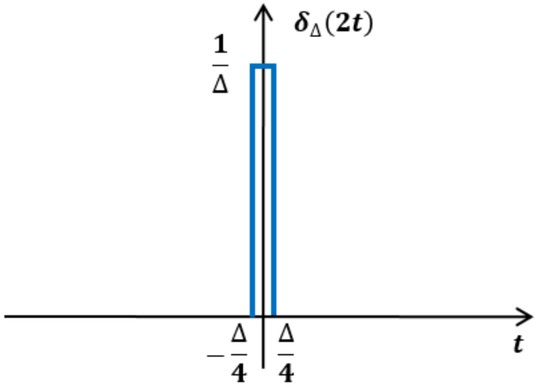
$$= e^{-1}x(1)$$

مفهوم دلتای دیراک برای سیستم‌های فیزیکی:

«پالسی که پهنای آن برای سیستم مورد نظر به اندازه‌ی کافی کوتاه باشد»



$$\delta_\Delta(2t) \cong \frac{1}{2}\delta_\Delta(t)$$



ویژگی‌های سیگنال ضربه واحد زمان– گسسته

ویژگی ۱: «ویژگی غربال‌کردن ضربه»

$$x[n]\delta[n-n_0]=x[n_0]\delta[n-n_0]$$

ویژگی ۲: کانولوشن یک سیگنال و ضربه واحد

$$x[n]*\delta[n-n_0]=x[n-n_0]$$

ویژگی ۳: تقارن زوج ضربه واحد زمان- گسسته

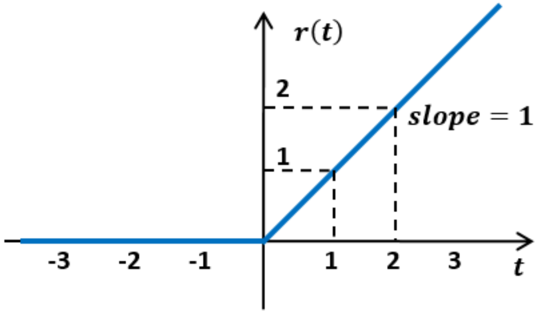
$$\delta[n]=\delta[-n]$$

ویژگی ۴: مقیاس زمانی سیگنال ضربه واحد

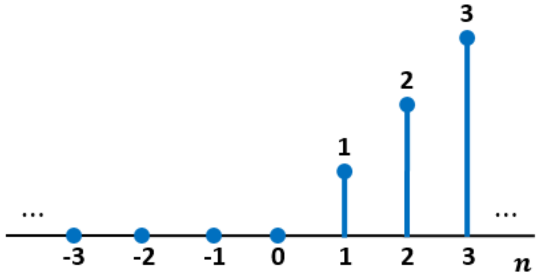
$$\delta[mn]=\delta[n]$$

سیگنال شیب

$$r(t) \triangleq \begin{cases} t & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$



$$r[n] \triangleq \begin{cases} n & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

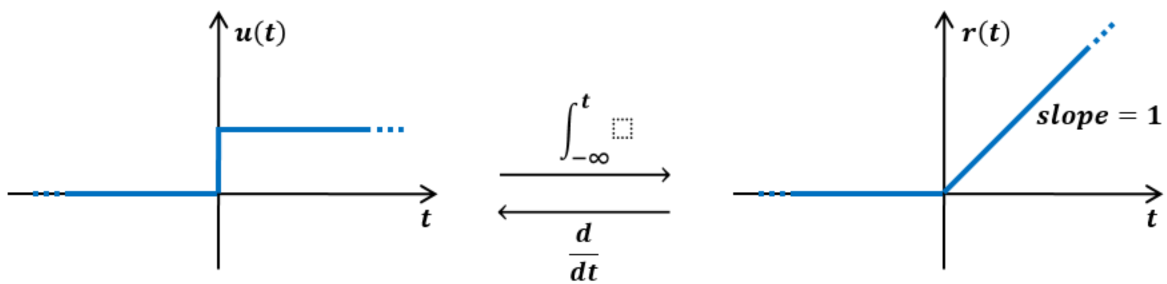


سیگنال شیب زمان- پیوسته و سیگنال پله واحد دارای رابطه‌ی مشتقی/ انتگرالی هستند:

$$r(t) = tu(t)$$

$$r(t) = \int_{-\infty}^{t} u(\tau)d\tau$$

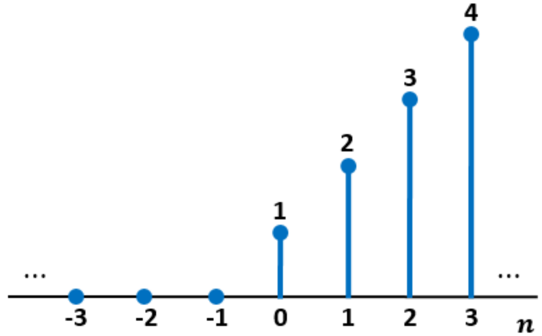
$$u(t) = \frac{d}{dt}r(t)$$



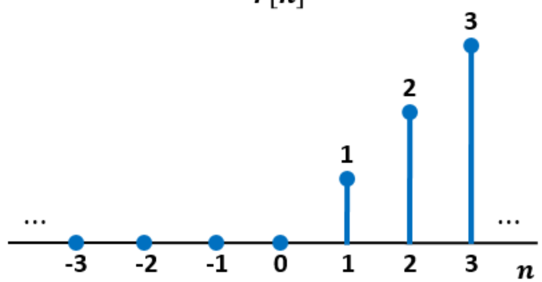
سیگنال شیب زمان- گسسته و پله واحد زمان- گسسته دارای رابطه‌ی تفاضلی/ انباره‌ای می‌باشند

$$u[n] = r[n+1] - r[n]$$

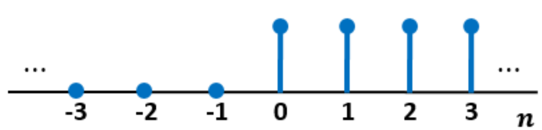
$r[n+1]$



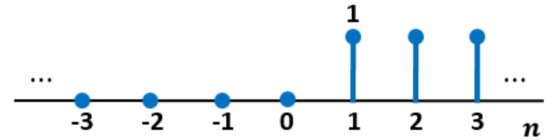
$r[n]$



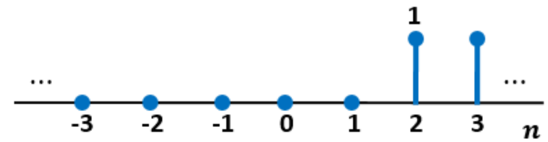
$r[n+1] - r[n] = u[n]$



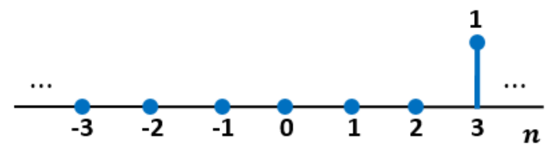
$r[n-1]$



$r[n-2]$

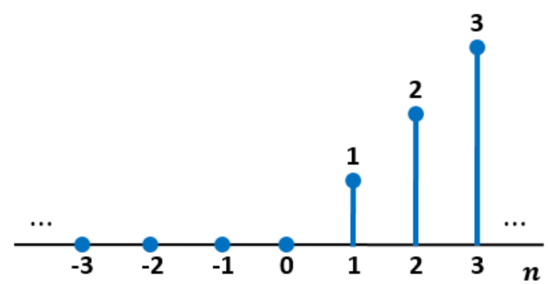


$r[n-3]$



$\vdots$

$r[n] = u[n-1] + u[n-2] + u[n-3] + \cdots$



$$r[n] = \sum_{m=-\infty}^{n-1} u[m]$$

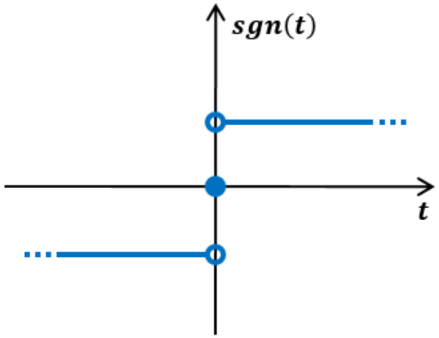
$$r[n] = \sum_{k=1}^{\infty} u[n-k]$$

$$= u[n-1] + u[n-2] + u[n-3] + \cdots$$

سیگنال علامت

$$sgn(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t = 0 \\ -1 & t < 0 \end{cases}$$

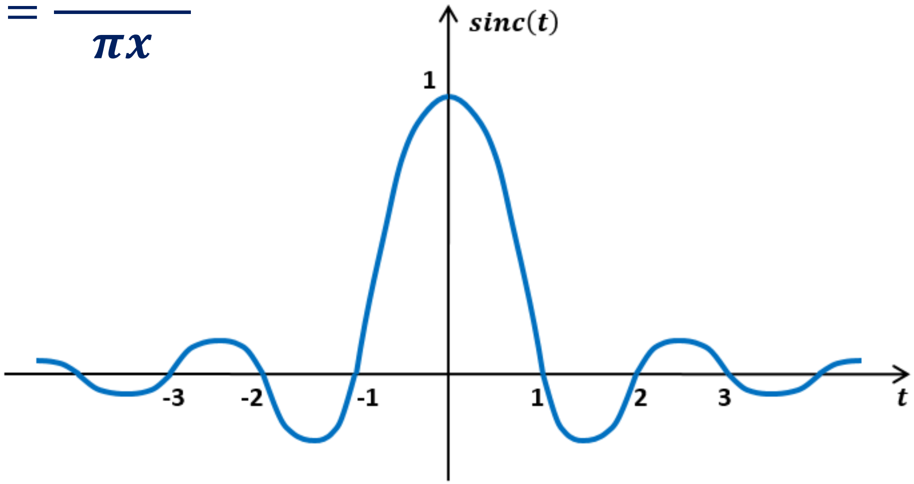
$$sgn(t) = u(t) - u(-t)$$



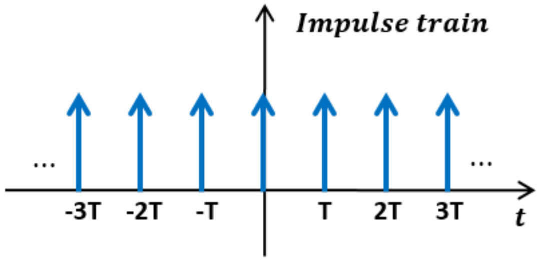
سیگنال نمونه‌برداری و سیگنال sinc

$$sa(x) = \frac{\sin x}{x}$$

$$sinc(x) = sa(\pi x) = \frac{\sin \pi x}{\pi x}$$



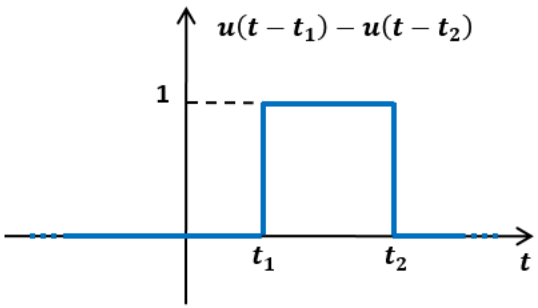
$$\boldsymbol{Impulse\ train}: \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t-kT)$$



سیگنال پالس مستطیلی

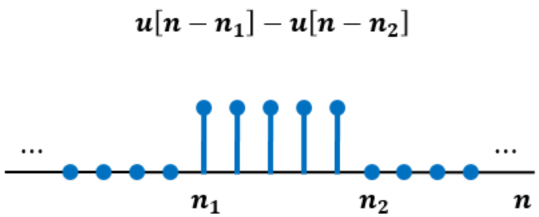
continuous − time rectangular pulse:

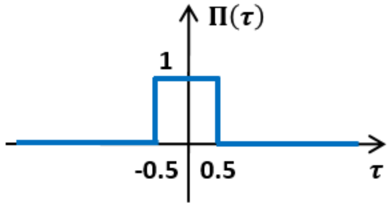
$$u(t-t_1)-u(t-t_2)$$



discrete − time rectangular pulse:

$$u[n-n_1]-u[n-n_2]$$



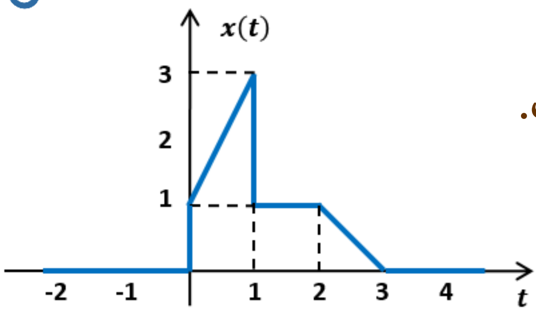


سیگنال پنجره که با نماد $\Pi(t)$ توصیف می‌شود نوع خاصی از پالس مستطیلی است که در محدوده‌ی (۰/۵ ۰/۵−) مقدار یک دارد و خارج این محدوده صفر است.

مثال ۳۲: سیستم مشتق‌گیر

سیستمی را در نظر بگیرید که با رابطه‌ی $y(t)=\frac{dx(t)}{dt}$ توصیف شده است.

پاسخ این سیستم را به ورودی $x(t)$ داده شده تعیین و ترسیم نمایید.



حل: شیوه‌ی تحلیلی:

$$x(t)=(2t+1)\{u(t)-u(t-1)\}+\{u(t-1)-u(t-2)\}$$

$$+(-t+3)\{u(t-2)-u(t-3)\}$$

$$\Rightarrow y(t)=\frac{dx(t)}{dt}$$

$$\Rightarrow y(t)=2\{u(t)-u(t-1)\}+(2t+1)\{\delta(t)-\delta(t-1)\}$$

$$+\{\delta(t-1)-\delta(t-2)\}$$

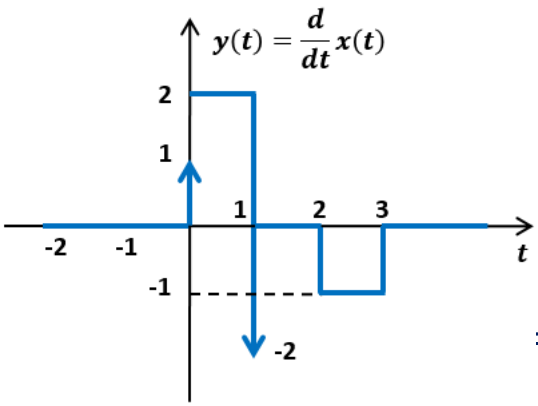
$$+(-1)\{u(t-2)-u(t-3)\}+(-t+3)\{\delta(t-2)-\delta(t-3)\}$$

$$\Rightarrow y(t)=2\{u(t)-u(t-1)\}+\delta(t)-3\delta(t-1)$$

$$+\{\delta(t-1)-\delta(t-2)\}\ +(-1)\{u(t-2)-u(t-3)\}+\delta(t-2)$$

$$\Rightarrow y(t)=2\{u(t)-u(t-1)\}-\{u(t-2)-u(t-3)\}+\delta(t)-2\delta(t-1)$$

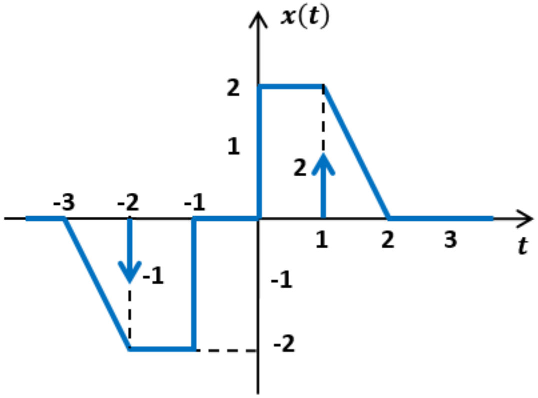
حل: شیوه‌ی ترسیمی:



تست۲: کنکور کارشناسی ارشد ۱۳۸۷، سوال ۲۹

اگر $x_o(t)$ بیانگر قسمت فرد سیگنال $x(t)$ که در زیر نمایش داده شده است باشد، در این صورت، مقدار $\int_0^\infty x_o(t)dt$ برابر است با

الف: ۴/۵ ب: ۳/۵ ج: ۳ د: ۴



$$x_o(t) = 0.5\big(x(t) - x(-t)\big)$$

$$\int_0^\infty x_o(t)dt = 0.5\int_0^\infty x(t)dt - 0.5\int_0^\infty x(-t)dt$$

$$= 0.5\int_0^\infty x(t)dt - 0.5\int_0^{-\infty} x(\tau)(-d\tau)$$

$$= 0.5\int_0^\infty x(t)dt - 0.5\int_{-\infty}^{0} x(\tau)d\tau$$

$$= 0.5(5) - 0.5(-4) = 4.5$$

بنابراین گزینه الف صحیح است.

تست ۳: کنکور کارشناسی ارشد ۱۳۹۰، سوال ۳۰

حاصل انتگرال زیر که در آن $\delta(t)$ تابع ضربه واحد و $\delta'(t)$ مشتق آن می‌باشد چقدر است؟

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left[(t+2)\delta'(t+1)+\left(e^{-|t|}+t^2+2\right)\delta\left(e^{-|t|}+t^2+1\right)\right]dt$$

الف: ۲ ب: ۱ ج: ۱− د: صفر

پاسخ:

$$x(t)\delta'(t-t_0)=x(t_0)\delta'(t-t_0)-x'(t_0)\delta(t-t_0)$$

$$\Rightarrow\ (t+2)\delta'(t+1)=\delta'(t+1)-\delta(t+1)$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta'(t+1)dt-\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t+1)dt+\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\left(e^{-|t|}+t^2+2\right)\delta\left(e^{-|t|}+t^2+1\right)\right]dt$$

δ' تابعی فرد است بنابراین انتگرال اول برابر صفر خواهد بود.

در انتگرال دوم، ضربه در $t=-1$ واقع شده است بنابراین حاصل این انتگرال منهای یک است.

در انتگرال سوم، آرگومان δ همواره مثبت است از این‌رو مقدار آن همواره صفر می‌باشد.

بنابراین، حاصل انتگرال خواسته شده، ۱− خواهد بود و گزینه‌ی ج صحیح است.

تست ۴: کنکور کارشناسی ارشد ۱۳۸۷، سوال ۳۰

رابطه‌ی بین ورودی $x(t)$ و خروجی $y(t)$ یک سیستم به صورت $y(t)=\int_{t-5}^{\infty}x(2-\tau)d\tau$ می‌باشد.

پاسخ سیستم به تابع پله واحد چیست؟

الف) $(t-7)u(t-7)$

ب) $(7-t)u(7-t)$

ج) $(3-t)u(3-t)$

د) $(t-3)u(t-3)$

حل: تعیین پاسخ سیستم به ورودی پله واحد

$$s(t)=\int_{t-5}^{\infty}u(2-\tau)d\tau$$

$$=\int_{t-5}^{\infty}u(-(\tau-2))d\tau=\int_{t-7}^{\infty}u(-\lambda)d\lambda=\int_{-t+7}^{-\infty}u(\gamma)(-d\gamma)=\int_{-\infty}^{-t+7}u(\gamma)(d\gamma)$$

$$=r(-t+7)=(-t+7)u(-t+7)$$

بنابراین گزینه ب صحیح است.

فهرست مطالب

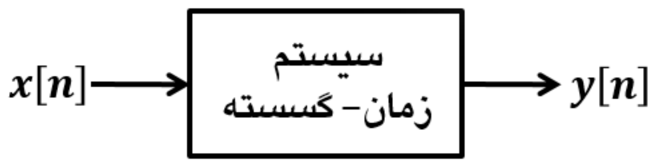
- مفاهیم سیگنال و سیستم
- ویژگی‌های سیگنال
- معرفی سیگنال‌های پایه
- انواع سیستم
- اتصال سیستم‌ها
- ویژگی‌های سیستم‌ها
- مثال‌های مروری
- مثال‌های نرم‌افزاری
- تمرین‌های تئوری
- تمرین‌های نرم‌افزاری

انواع سیستم‌ها

❖ **سیستم زمان- پیوسته:** سیستمی که سیگنال‌های ورودی و خروجی آن زمان- پیوسته باشند.

❖ **سیستم زمان- گسسته:** سیستمی که سیگنال‌های ورودی و خروجی آن زمان- گسسته باشند.

(الف)



(ب)

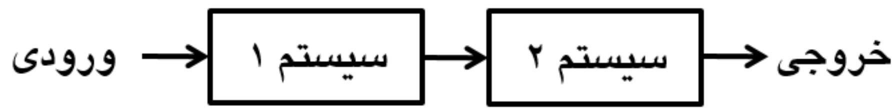
فهرست مطالب

- مفاهیم سیگنال و سیستم
- ویژگی‌های سیگنال
- معرفی سیگنال‌های پایه
- انواع سیستم
- اتصال سیستم‌ها
  - اتصال سری
  - اتصال موازی
  - اتصال فیدبک
  - اتصال هیبرید
- ویژگی‌های سیستم‌ها
- مثال‌های مروری
- مثال‌های نرم‌افزاری
- تمرین‌های تئوری
- تمرین‌های نرم‌افزاری

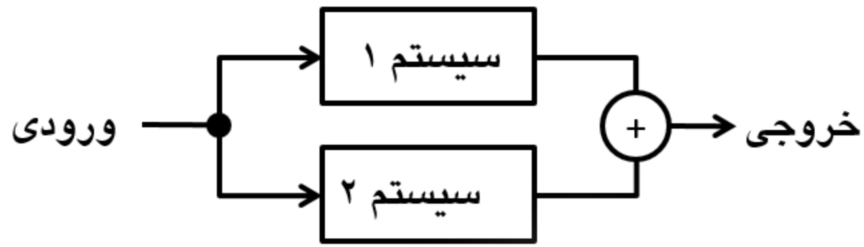
اتصال سیستم‌ها

اتصال سیستم‌ها می‌تواند به صورت سری، موازی، فیدبک و هیبرید انجام گردد.

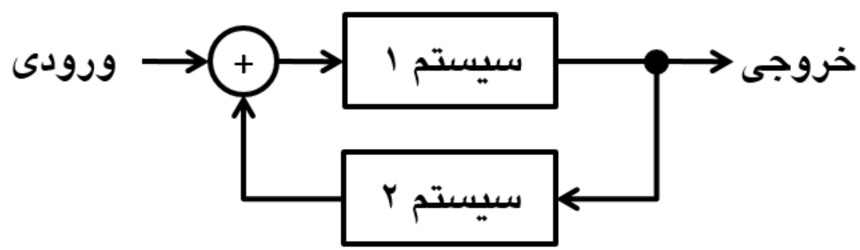
❖ اتصال سری:



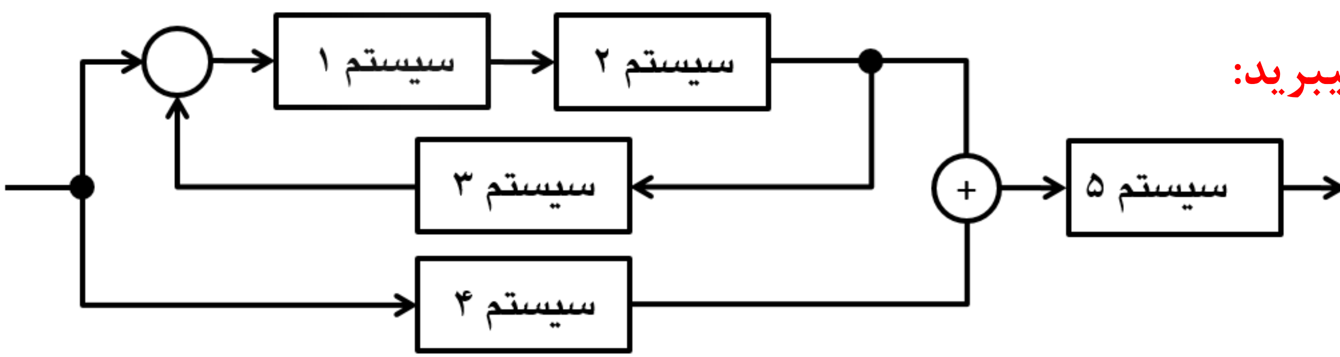
❖ اتصال موازی:



❖ اتصال فیدبک:



❖ اتصال هیبرید:



فهرست مطالب

- مفاهیم سیگنال و سیستم
- ویژگی‌های سیگنال
- معرفی سیگنال‌های پایه
- انواع سیستم
- اتصال سیستم‌ها
- ویژگی‌های سیستم‌ها
  - ❖ حافظه‌دار بودن،
  - ❖ معکوس‌پذیری،
  - ❖ علی بودن،
  - ❖ پایداری،
  - ❖ استقلال از زمان،
  - ❖ خطی بودن.
- مثال‌های مروری
- مثال‌های نرم‌افزاری
- تمرین‌های تئوری
- تمرین‌های نرم‌افزاری

ویژگی حافظه‌دار / بدون حافظه بودن

اگر خروجی سیستم در هر زمان دلخواه، تنها به ورودی در همان زمان وابسته باشد سیستم را بدون حافظه گوییم. در غیر این‌صورت، سیستم حافظه‌دار است.

مثال ۳۳: ویژگی حافظه‌دار / بدون حافظه بودن

حافظه‌دار یا بدون حافظه بودن هر یک از سیستم‌های زیر را تعیین کنید.

الف : $y(t) = 4x(t) + x^2(t) + u(t+1) + \delta(t-2)$

ب : $y(t) = x(t) - x(t-1)$

ج : $y(t) = \frac{d}{dt}x(t)$

د : $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$

حل الف: سیستم بدون حافظه است.

حل ب: سیستم حافظه‌دار است.

$$\frac{dx(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t) - x(t-\Delta t)}{\Delta t}$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x\left(t+\frac{\Delta t}{2}\right) - x\left(t-\frac{\Delta t}{2}\right)}{\Delta t}$$

حل ج: سیستم حافظه‌دار است.

حل د: سیستم حافظه‌دار است.

تست ۵: کنکور کارشناسی ارشد ۱۳۸۶، سوال ۲۴

پاسخ یک سیستم زمان- گسسته خطی بدون حافظه به ورودی $x_1[n] = \delta[n] - 2\delta[n-1]$ برابر است با $y_1[n] = 2\delta[n-1]$. پاسخ این سیستم به ورودی $x_2[n] = \delta[n-1] - 2\delta[n-2]$ کدام یک از جواب‌های زیر می‌تواند باشد؟

۱) $y_2[n] = -\delta[n-1]$

۲) $y_2[n] = \delta[n-1]$

۳) $y_2[n] = 2\delta[n-2]$

۴) $y_2[n] = -2\delta[n-2]$

حل: سیستم بدون حافظه است بنابراین پاسخ در هر لحظه تنها به ورودی در همان لحظه وابسته است.

ورودی $x_1[n]$ تنها دو نمونه‌ی غیرصفر دارد بنابراین می‌توان نتیجه‌گیری نمود پاسخ سیستم به ورودی $\delta[n]$ برابر صفر و پاسخ آن به ورودی $-2\delta[n-1]$ برابر $2\delta[n-1]$ است.

با توجه به خطی بودن سیستم، پاسخ سیستم به ورودی $\delta[n-1]$ برابر $-\delta[n-1]$ خواهد بود.

از سوی دیگر، ورودی $x_2[n]$ از دو بخش $\delta[n-1]$ و $-2\delta[n-2]$ تشکیل شده است که پاسخ سیستم به بخش اول را می‌دانیم ($-\delta[n-1]$) ولی از پاسخ آن به بخش دوم اطلاعی نداریم. بنابراین پاسخ باید به فرم $-\delta[n-1] + k\delta[n-2]$ باشد.

در نتیجه گزینه‌ی ۱ صحیح است.

ویژگی معکوس‌پذیری

سیستم را معکوس‌پذیر گوییم اگر همواره به ورودی‌های متفاوت، خروجی‌های متفاوت بدهد.

شرط معکوس‌پذیری: $\forall \;\; y_1(t) = y_2(t) \;\Rightarrow x_1(t) = x_2(t)$

شرط معکوس‌پذیری: $\forall \;\; x_1(t) \neq x_2(t) \;\Rightarrow y_1(t) \neq y_2(t)$

به عبارت دیگر، سیستم را معکوس‌پذیر گوییم اگر هیچ دو ورودی متفاوتی نتوان یافت که پاسخ سیستم به آنها یکسان باشد.

اگر دو ورودی مختلف بتوان یافت که خروجی یکسانی تولید نمایند سیستم معکوس‌ناپذیر است.

شرط معکوس‌ناپذیری: $\exists \;\; x_1(t) \neq x_2(t) \;\; \& \;\; y_1(t) = y_2(t)$

مثال ۳۴: ویژگی معکوس‌پذیری سیستم‌های زمان– پیوسته

معکوس‌پذیری سیستم‌های زمان- پیوسته‌ی زیر را بررسی نمایید. در صورت معکوس‌پذیری، سیستم معکوس را تعیین کنید.

الف : $y(t) = 5x(t)$

ب : $y(t) = x(5t)$

ج : $y(t) = x^2(t)$

د : $y(t) = a\cos\big(x(t)\big)$

ه : $y(t) = \dfrac{dx(t)}{dt}$

و : $y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \;\; . \;\; y(-\infty) = 0$

حل الف: سیستم معکوس‌پذیر است و معکوس آن $y(t) = \frac{1}{5}x(t)$ می‌باشد.

حل ب: سیستم معکوس‌پذیر است و معکوس آن $y(t) = x\left(\frac{t}{5}\right)$ است.

حل ج: سیستم معکوس‌ناپذیر است. مثال نقض:

$$x_1(t) = u(t) \;\Rightarrow y_1(t) = u(t)$$
$$x_2(t) = -u(t) \;\Rightarrow y_2(t) = u(t)$$

حل د: سیستم معکوس‌ناپذیر است. مثال نقض:

$$x_1(t) = 2\pi \;\Rightarrow y_1(t) = a$$
$$x_2(t) = 4\pi \;\Rightarrow y_2(t) = a$$

حل ه : سیستم معکوس‌ناپذیر می‌باشد. مثال نقض:

$$x_1(t) = 2t + 1 \;\Rightarrow y_1(t) = 2$$
$$x_2(t) = 2t + 2 \;\Rightarrow y_2(t) = 2$$

حل و: سیستم معکوس‌پذیر است و معکوس آن $y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$ می‌باشد.

مثال ۳۵: ویژگی معکوس‌پذیری سیستم‌های زمان- گسسته

معکوس‌پذیری سیستم‌های زمان- گسسته‌ی زیر را بررسی نمایید. در صورت معکوس‌پذیری، سیستم معکوس را تعیین کنید.

الف: $y[n] = x[5n]$

ب: $y[n] = \begin{cases} x\left[\frac{n}{2}\right] & n: even \\ 0 & n: odd \end{cases}$

ج: $y[n] = x[-n]$

د: $y[n] = nx[n]$

ه: $y[n] = x[n]x[n-1]$

و: $y[n] = x[n] - x[n-1]$

حل الف: سیستم معکوس‌ناپذیر است.

حل ب: سیستم معکوس‌پذیر است.

سیستم معکوس: $y[n] = x[2n]$

حل ج: سیستم معکوس‌پذیر است. سیستم معکوس: $y[n] = x[-n]$

حل د: سیستم معکوس‌ناپذیر است. مثال نقض:

$$x_1[n] = \delta[n] \Rightarrow y_1[n] = 0$$
$$x_2[n] = 10\delta[n] \Rightarrow y_2[n] = 0$$

حل ه: سیستم معکوس‌ناپذیر است. مثال نقض:

$$x_1[n] = \delta[n] \Rightarrow y_1[n] = 0$$
$$x_2[n] = \delta[n-1] \Rightarrow y_2[n] = 0$$

حل و: سیستم معکوس‌ناپذیر است. مثال نقض:

$$x_1[n] = 1 \Rightarrow y_1[n] = 0$$
$$x_2[n] = 2 \Rightarrow y_2[n] = 0$$

مثال ۳۶: ویژگی معکوس‌پذیری

معکوس‌پذیری سیستم‌های زیر را بررسی کنید. در صورت معکوس‌پذیری، معکوس سیستم را تعیین کنید.

الف: سیستم ۱:
$$y[n] = (n+2)x[n]$$

ب: سیستم ۲:
$$y[n] = (n+2)x[n] + 2x[n]\delta[n+2]$$

حل:

سیستم الف معکوس‌ناپذیر است.

سیستم ب معکوس‌پذیر است. رابطه سیستم معکوس به صورت زیر است.

$$y[n] = \begin{cases} \dfrac{1}{n+2}x[n] & n \neq -2 \\ \dfrac{1}{2}x[n] & n = -2 \end{cases}$$

دکتر علی مالکی

تست ۶: کنکور کارشناسی ارشد ۱۳۸۶، سوال ۲۳

ضابطه‌ی بین ورودی $x[n]$ و خروجی $y[n]$ در دو سیستم زمان- گسسته به صورت زیر است:

سیستم ۱: $y[n]=\sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$

سیستم ۲: $y[n]=\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)x[n]$

کدام یک از این دو سیستم وارون‌پذیر هستند؟

۱) فقط سیستم۱ ۲) فقط سیستم۲ ۳) هر دو سیستم ۴) هیچ یک از دو سیستم

ویژگی علی بودن

اگر خروجی سیستمی در هر زمان، فقط به ورودی در همان زمان و زمان‌های قبل وابسته باشد سیستم را علی گوییم. در غیر اینصورت، سیستم غیرعلی است.

در مقابل، اگر خروجی سیستمی در هر زمان، فقط به ورودی در همان زمان و زمان‌های بعد وابسته باشد سیستم را ضدعلی گوییم.

مثال ۳۷: ویژگی علی بودن

علی / غیرعلی بودن سیستم‌های زیر را بررسی کنید.

الف : $y(t) = 10x(t+3)$

ب : $y[n] = 10x[n-3] + 5x[n-10] - x[n-50]$

ج : $y(t) = x(\sin t)$

د : $y(t) = \sin t \cdot x(t)$

ه : $y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$

حل الف: سیستم غیرعلی است.

حل ب: سیستم علی است.

حل ج: سیستم غیرعلی است.

$$for\ \ t = -2\pi \quad \Rightarrow \quad y(-2\pi) = x(\sin(-2\pi)) = x(0)$$

$$for\ \ t = 0 \quad \Rightarrow \quad y(0) = x(\sin(0)) = x(0)$$

$$for\ \ t = 2\pi \quad \Rightarrow \quad y(2\pi) = x(\sin(2\pi)) = x(0)$$

حل د: سیستم علی است.

حل ه: سیستم علی است.

مثال ۳۸: ویژگی ضدعلی بودن

کدام یک از سیستم‌های مثال قبل ضدعلی می‌باشند؟

الف : $y(t) = 10x(t+3)$

ب : $y[n] = 10x[n-3] + 5x[n-10] - x[n-50]$

ج : $y(t) = x(\sin t)$

د : $y(t) = \sin t \cdot x(t)$

ه : $y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$

حل: از آنجا که برای ضدعلی بودن لازم است پاسخ سیستم در هر زمان صرفا به ورودی‌های حال و آینده وابسته باشد فقط سیستم‌های بند الف و بند د این شرایط را دارند.

ویژگی پایداری

سیستم **پایدار** سیستمی است که پاسخ آن به هر ورودی کران‌دار، همواره کران‌دار باشد. به این نوع پایداری، در اصطلاح، **پایداری BIBO** گویند. به بیان دیگر،

$$\forall \ \boldsymbol{x(t)}\,, \qquad |\boldsymbol{x(t)}| < \boldsymbol{M} < \infty \Rightarrow |\boldsymbol{y(t)}| < \infty$$

$$\forall \ \boldsymbol{x[n]}\,, \qquad |\boldsymbol{x[n]}| < \boldsymbol{M} < \infty \Rightarrow |\boldsymbol{y[n]}| < \infty$$

مثال ۳۹: ویژگی پایداری سیستم‌های زمان– پیوسته

پایداری سیستم‌های زمان– پیوسته‌ی زیر را بررسی کنید.

الف : $y(t) = x(t)u(t+5)$

ب : $y(t) = e^{x(t)}$

ج : $y(t) = e^{t}x(t)$

د : $y(t) = \int_{0}^{t} x(\tau)d\tau$

ه : $y(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-|\tau|}x(\tau)d\tau$

و : $y(t) = \int_{-\infty}^{t} \tau e^{-|\tau|}x(\tau)d\tau$

حل الف: سیستم پایدار است.

حل ب: سیستم پایدار است.

حل ج: سیستم ناپایدار است.

حل د: سیستم ناپایدار است.

حل ه:

$$|y(t)| = \left|\int_{-\infty}^{t} e^{-|\tau|}x(\tau)d\tau\right| < \left|\int_{-\infty}^{t} e^{-|\tau|}Md\tau\right|$$

$$= \int_{-\infty}^{t} e^{-|\tau|}Md\tau < \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|\tau|}Md\tau = 2\int_{0}^{\infty} Me^{-\tau}d\tau$$

$$= -2Me^{-\tau}\Big|_{0}^{\infty} = 2M \quad \Rightarrow |y(t)| < 2M < \infty$$

سیستم پایدار است.

حل و:

$$|y(t)| = \left|\int_{-\infty}^{t} \tau e^{-|\tau|}x(\tau)d\tau\right| < \left|\int_{-\infty}^{+\infty} \tau e^{-|\tau|}sgn(\tau)Md\tau\right| = M\int_{-\infty}^{+\infty} |\tau|e^{-|\tau|}d\tau$$

$$= 2M\int_{0}^{\infty} \tau e^{-\tau}d\tau = 2M(-\tau e^{-\tau} - e^{-\tau})\Big|_{0}^{\infty} = 2M\left(-\lim_{\tau\to\infty} \tau e^{-\tau} + 1\right) = 2M$$

طبق قاعده هوپیتال، $\lim_{\tau\to\infty} \frac{\tau}{e^{\tau}} = \lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{e^{\tau}} \to 0$ بنابراین سیستم پایدار است.

مثال ۴۰: ویژگی پایداری سیستم‌های زمان- گسسته

پایداری هر یک از سیستم‌های زمان- گسسته‌ی زیر را بررسی کنید.

الف : $y[n] = nx[n]$

ب : $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$

ج : $y[n] = \sum_{k=m}^{n} x[k]$

د : $y[n] = \sum_{k=n-m}^{n+m} x[k]$

حل الف: سیستم ناپایدار است.

حل ب: سیستم ناپایدار است.

حل ج: سیستم ناپایدار است.

حل د:

$$\forall \; x[n], |x[n]| < M < \infty$$

$$|y[n]| = \left| \sum_{k=n-m}^{n+m} x[k] \right| < \left| \sum_{k=n-m}^{n+m} M \right| = (2m+1)M < \infty$$

بنابراین سیستم پایدار است.

ویژگی استقلال از زمان

اگر پاسخ سیستم به زمان اعمال ورودی وابسته نباشد سیستم **مستقل از زمان** است. در غیر این صورت، سیستم **وابسته به زمان** می‌باشد.

برای **ارزیابی ویژگی استقلال از زمان**، می‌توانیم به روش سه مرحله‌ای زیر عمل کنیم:

الف: با فرض اینکه $y(t)$ پاسخ سیستم به ورودی $x(t)$ باشد $y(t-t_0)$ را محاسبه می‌کنیم.

برای این منظور می‌توانیم در رابطه‌ی ورودی- خروجی توصیف کننده‌ی سیستم، t را با $(t-t_0)$ جایگزین کنیم.

ب: پاسخ سیستم به ورودی $x(t-t_0)$ را محاسبه می‌کنیم و آن را $y'(t-t_0)$ می‌نامیم.

ج: اگر $y(t-t_0)$ و $y'(t-t_0)$ با هم برابر باشند سیستم مستقل از زمان است و در غیر این صورت، سیستم وابسته به زمان می‌باشد.

مثال ۴۱: ویژگی استقلال از زمان سیستم‌های زمان– پیوسته

استقلال از زمان/ وابستگی به زمان هر یک از سیستم‌های زمان- پیوسته‌ی زیر را بررسی کنید.

الف : $y(t) = \cos\big(x(t)\big)$

ب : $y(t) = t\,x(t)$

ج : $y(t) = \cos(t)\;x(t)$

د : $y(t) = \int_{-\infty}^{2t} x(\tau)d\tau$

حل الف:

$$y(t-t_0) = \cos\big(x(t-t_0)\big)$$

$$y'(t-t_0) = \cos\big(x(t-t_0)\big)$$

$$\Rightarrow y(t-t_0) = y'(t-t_0)$$

سیستم مستقل از زمان است.

حل ب:

$$y(t-t_0) = (t-t_0)x(t-t_0)$$

$$y'(t-t_0) = t\,x(t-t_0)$$

$$\Rightarrow y(t-t_0) \neq y'(t-t_0)$$

سیستم وابسته به زمان است.

حل ج:

$$y(t-t_0) = \cos(t-t_0)\cdot x(t-t_0)$$

$$y'(t-t_0) = \cos(t)\cdot x(t-t_0)$$

$$y(t-t_0) \neq y'(t-t_0)$$

سیستم وابسته به زمان است.

حل د:

$$y(t-t_0) = \int_{-\infty}^{2(t-t_0)} x(\tau)d\tau$$

$$y'(t-t_0) = \int_{-\infty}^{2t} x(\tau-t_0)d\tau = \int_{-\infty}^{2t-t_0} x(\lambda)d\lambda$$

$$\Rightarrow y(t-t_0) \neq y'(t-t_0)$$

سیستم وابسته به زمان است.

مثال ۴۲: ویژگی استقلال از زمان سیستم‌های زمان- گسسته

استقلال از زمان/ وابستگی به زمان هر یک از سیستم‌های زمان- گسسته‌ی زیر را بررسی کنید.

الف : $y[n] = x[n-2] - x[n]$

ب : $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$

ج : $y[n] = \sum_{k=m}^{n} x[k]$

د : $y[n] = \sum_{k=n-m}^{n+m} x[k]$

ه : $y[n] = x[n] + u[n]$

و : $y[n] = x[-2n]$

ز : $y[n] = odd\{x[n]\}$

حل الف:

$$y[n-n_0] = x[n-n_0-2] - x[n-n_0]$$

$$y'[n-n_0] = x[n-2-n_0] - x[n-n_0]$$

$$\Rightarrow y[n-n_0] = y'[n-n_0]$$ سیستم مستقل از زمان است.

حل ب:

$$y[n-n_0] = \sum_{k=-\infty}^{n-n_0} x[k]$$

$$y'[n-n_0] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k-n_0] = \sum_{m=-\infty}^{n-n_0} x[m]$$

$$y[n-n_0] = y'[n-n_0]$$ سیستم مستقل از زمان است.

حل ج:

$$y[n-n_0] = \sum_{k=m}^{n-n_0} x[k]$$

$$y'[n-n_0] = \sum_{k=m}^{n} x[k-n_0] = \sum_{l=m-n_0}^{n-n_0} x[l]$$

$$y[n-n_0] \neq y'[n-n_0]$$ سیستم وابسته به زمان است.

مثال ۴۲: ویژگی استقلال از زمان سیستم‌های زمان- گسسته

استقلال از زمان/ وابستگی به زمان هر یک از سیستم‌های زمان- گسسته‌ی زیر را بررسی کنید.

الف : $y[n] = x[n+2] - x[n]$

ب : $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$

ج : $y[n] = \sum_{k=m}^{n} x[k]$

د : $y[n] = \sum_{k=n-m}^{n+m} x[k]$

ه : $y[n] = x[n] + u[n]$

و : $y[n] = x[-2n]$

ز : $y[n] = odd\{x[n]\}$

حل د:

$$y[n-n_0] = \sum_{k=n-n_0-m}^{n-n_0+m} x[k]$$

$$y'[n-n_0] = \sum_{k=n-m}^{n+m} x[k-n_0] = \sum_{l=n-m-n_0}^{n+m-n_0} x[l]$$

سیستم مستقل از زمان است. $\Rightarrow y[n-n_0] = y'[n-n_0]$

حل ه:

$$y[n-n_0] = x[n-n_0] + u[n-n_0]$$

$$y'[n-n_0] = x[n-n_0] + u[n]$$

سیستم وابسته به زمان است. $\Rightarrow y[n-n_0] \neq y'[n-n_0]$

حل و:

$$y[n-n_0] = x[-2(n-n_0)] = x[-2n+2n_0]$$

$$y'[n-n_0] = x[-2n-n_0]$$

سیستم وابسته به زمان است. $\Rightarrow y[n-n_0] \neq y'[n-n_0]$

حل ز:

$$Odd\{x[n]\} = 0.5(x[n] - x[-n])$$

$$y[n-n_0] = 0.5(x[n-n_0] - x[-n+n_0])$$

$$y'[n-n_0] = 0.5(x[n-n_0] - x[-n-n_0])$$

$\Rightarrow y[n-n_0] \neq y'[n-n_0]$

سیستم وابسته به زمان است.

ویژگی خطی بودن

شرط خطی بودن سیستم آن است که سیستم **جمع‌پذیر** و **همگن** باشد.

تعریف جمع‌پذیری:

فرض کنید پاسخ سیستم به ورودی $x_1(t)$ برابر $y_1(t)$ و پاسخ آن به ورودی $x_2(t)$ برابر $y_2(t)$ باشد؛ سیستم را جمع‌پذیر گوییم اگر پاسخ آن به ورودی $x_1(t) + x_2(t)$ برابر $y_1(t) + y_2(t)$ باشد.

تعریف همگنی:

فرض کنید پاسخ سیستم به ورودی $x(t)$ برابر $y(t)$ باشد؛ سیستم را همگن گوییم اگر به ازای هر αی دلخواه، پاسخ آن به ورودی $\alpha x(t)$ برابر $\alpha y(t)$ باشد.

مثال ۴۳: ویژگی خطی بودن سیستم‌های زمان– پیوسته

خطی بودن سیستم‌های زمان– پیوسته‌ی زیر را بررسی کنید.

الف : $y(t) = x^2(t)$

ب : $y(t) = x(t) \cdot u(t+1)$

ج : $y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$

د : $y(t) = \sin\big(x(t)\big)$

حل الف: این سیستم نه همگن است و نه جمع‌پذیر. پس غیرخطی است.

حل ب:

$$y_1(t) = x_1(t)u(t+1)$$

$$y_2(t) = x_2(t)u(t+1)$$

بنابراین سیستم همگن است.

$$\Rightarrow y(t) = \big(ax_1(t)\big)u(t+1) = a\big(x_1(t)u(t+1)\big) = ay_1(t)$$

$$\Rightarrow y(t) = \big(x_1(t) + x_2(t)\big)u(t+1) = x_1(t)u(t+1) + x_2(t)u(t+1) = y_1(t) + y_2(t)$$

بنابراین سیستم جمع‌پذیر است. درنتیجه، سیستم خطی است.

حل ج:

$$y_1(t) = \frac{d}{dt}x_1(t) \qquad \Rightarrow y(t) = \frac{d}{dt}\big(ax_1(t)\big) = a\left(\frac{d}{dt}x_1(t)\right) = ay_1(t)$$

سیستم همگن است.

$$y_2(t) = \frac{d}{dt}x_2(t) \qquad \Rightarrow y(t) = \frac{d}{dt}\big(x_1(t) + x_2(t)\big) = \frac{d}{dt}x_1(t) + \frac{d}{dt}x_2(t) = y_1(t) + y_2(t)$$

جمع‌پذیر است. بنابراین سیستم خطی است.

حل د: این سیستم نه جمع‌پذیر است و نه همگن است پس غیرخطی است.

$$y_1(t) = \sin\big(x_1(t)\big) \qquad \Rightarrow y(t) = \sin\big(ax_1(t)\big) \neq a\sin\big(x_1(t)\big)$$

مثال ۴۴: ویژگی خطی بودن سیستم‌های زمان– گسسته

خطی بودن سیستم‌های زمان- گسسته‌ی زیر را بررسی کنید.

الف : $y[n] = 10x[n]$

ب : $y[n] = e^{x[n]}$

ج : $y[n] = 5x[n] + 3$

حل الف: سیستم همگن و جمع‌پذیر است؛ در نتیجه خطی است.

حل ب:

$$y_1[n] = e^{x_1[n]}$$

همگن نیست.

$$\Rightarrow y[n] = e^{(ax_1[n])} = e^{ax_1[n]} = \left(e^{x_1[n]}\right)^a = (y_1[n])^a \neq ay_1[n]$$

در نتیجه سیستم غیرخطی است.

حل ج:

$$y_1[n] = 5x_1[n] + 3$$

همگن نیست.

$$\Rightarrow y[n] = 5(ax_1[n]) + 3 = a(5x_1[n]) + 3 \neq ay_1[n]$$

در نتیجه سیستم غیرخطی است.

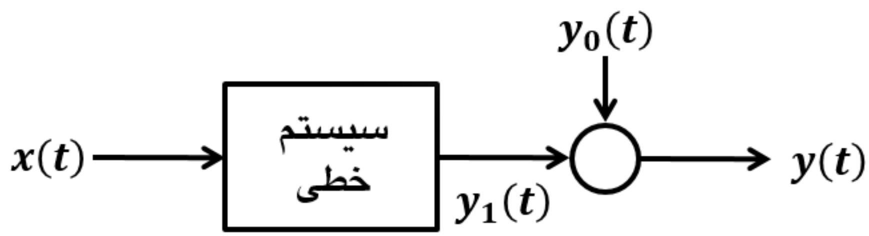
نکته: پاسخ ورودی صفر سیستم‌های خطی

برای همگن بودن لازم است پاسخ سیستم به ورودی $x(t) = 0$ یا $x[n] = 0$ که در اصطلاح «پاسخ ورودی صفر» نامیده می‌شود برابر صفر باشد. بدیهی است اگر پاسخ ورودی صفر سیستم برابر صفر نباشد با a برابر شدن ورودی (که باز هم برابر صفر است)، خروجی a برابر نخواهد شد یعنی سیستم همگن نخواهد بود. بنابراین، پاسخ ورودی صفر سیستم‌های خطی برابر صفر است. بر همین اساس، سیستم خطی افزایشی معرفی می‌گردد.

سیستم خطی افزایشی

سیستم خطی افزایشی سیستمی است که اگر پاسخ ورودی صفر از رابطه‌ی ورودی- خروجی سیستم کسر گردد سیستمی خطی حاصل گردد.

پاسخ ورودی صفر



روش بررسی خطی افزایشی بودن یک سیستم غیرخطی:

الف: تعیین پاسخ ورودی صفر سیستم یعنی $y_0(t)$ از رابطه‌ی ورودی-خروجی با صفر قرار دادن $x(t)$.

ب: تعیین $y_1(t)$ با کسر پاسخ ورودی صفر از رابطه‌ی خروجی یعنی $y_1(t) = y(t) - y_0(t)$.

ج: ارزیابی خطی بودن $y_1(t)$.

اگر $y_1(t)$ خطی باشد سیستم مورد بررسی، خطی افزایشی خواهد بود.

مثال ۴۵: ویژگی خطی افزایشی بودن

برای هر کدام از سیستم‌های زیر بررسی کنید که آیا سیستم خطی است یا غیرخطی. در صورتی که سیستم غیرخطی است بررسی کنید که آیا خطی افزایشی می‌باشد؟

الف : $y(t)=\cos\big(x(t)\big)$

ب : $y[n]=5x[n]+3$

ج : $y[n]=\begin{cases}\dfrac{n}{2} & n: even\\[2mm] \dfrac{n-1}{2}+\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\frac{n-1}{2}}x[k] & n: odd\end{cases}$

د : $y[n]=\begin{cases}x[n]+3 & x[n]\geq 0\\ x[n]-3 & x[n]<0\end{cases}$

حل الف:

$$y_0(t)=y(t)\Big|_{x(t)=0}=\cos(0)=1$$

$$y_1(t)=y(t)-y_0(t)=\cos\big(x(t)\big)-1$$

$y_1(t)$ غیرخطی است بنابراین سیستم خطی افزایشی نیست.

حل ب:

$$y_0[n]=y[n]\Big|_{x[n]=0}=3$$

$$y_1[n]=y[n]-y_0[n]=5x[n]$$

$y_1[n]$ خطی است بنابراین سیستم خطی افزایشی است.

حل ج:

$$y_0[n]=y[n]\Big|_{x[n]=0}=\begin{cases}\dfrac{n}{2} & n: even\\[2mm] \dfrac{n-1}{2} & n: odd\end{cases}$$

$$y_1[n]=y[n]-y_0[n]=\begin{cases}0 & n: even\\ \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\frac{n-1}{2}}x[k] & n: odd\end{cases}$$

$y_1[n]$ خطی است بنابراین سیستم خطی افزایشی است.

مثال ۴۵: ویژگی خطی افزایشی بودن

برای هر کدام از سیستم‌های زیر بررسی کنید که آیا سیستم خطی است یا غیرخطی. در صورتی که سیستم غیرخطی است بررسی کنید که آیا خطی افزایشی می‌باشد؟

الف : $y(t) = \cos\big(x(t)\big)$

ب : $y[n] = 5x[n] + 3$

ج : $$y[n] = \begin{cases} \frac{n}{2} & n : even \\ \frac{n-1}{2} + \sum_{k=-\infty}^{\frac{n-1}{2}} x[k] & n : odd \end{cases}$$

د : $$y[n] = \begin{cases} x[n] + 3 & x[n] \geq 0 \\ x[n] - 3 & x[n] < 0 \end{cases}$$

حل د:

$$y_0[n] = y[n]\Big|_{x[n]=0} = 3$$

$$y_1[n] = y[n] - y_0[n] = \begin{cases} x[n] & x[n] \geq 0 \\ x[n] - 6 & x[n] < 0 \end{cases}$$

$y_1[n]$ غیرخطی است بنابراین سیستم خطی افزایشی نیست.

فهرست مطالب

مثال ۴۶: ویژگی متناوب بودن سیگنال

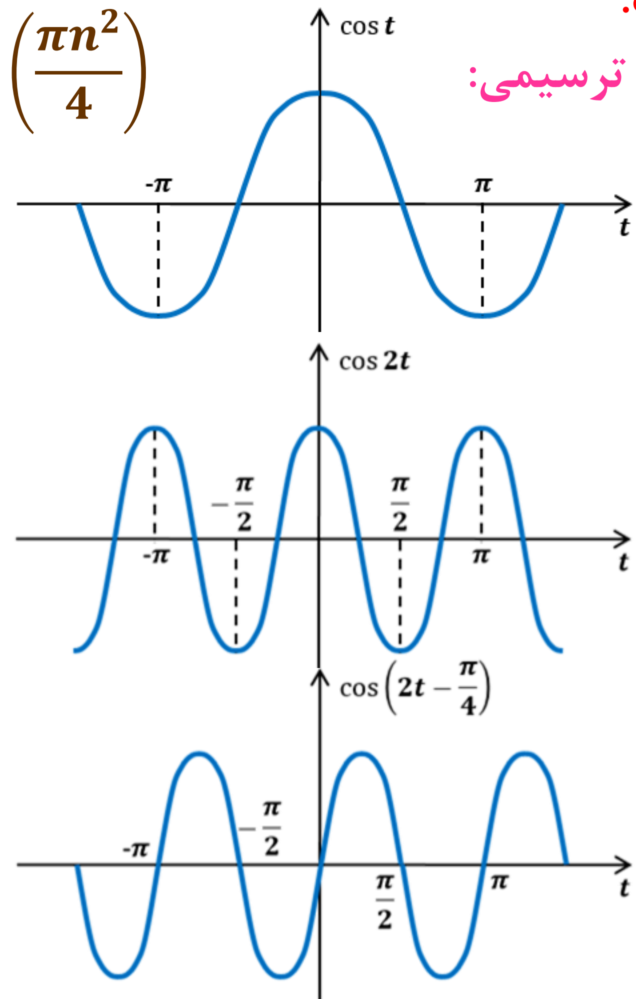
متناوب بودن سیگنال‌های زیر را بررسی نموده و در صورت متناوب بودن، دوره‌ی تناوب اساسی را تعیین نمایید.

الف : $x(t) = \cos^2\left(2t - \frac{\pi}{4}\right)$

ب : $x[n] = 16\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right) + \sum_{m=-\infty}^{+\infty}\delta[n-5m] + \cos\left(\frac{\pi n^2}{4}\right)$

حل الف:

شیوه‌ی ترسیمی:



بنابراین سیگنال $x(t)$ با دوره‌ی تناوب $\pi/2$ متناوب است.

شیوه‌ی تحلیلی:

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\alpha$$

$$x(t) = \cos^2\left(2t - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\left(2\left(2t - \frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\left(4t - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sin 4t$$

این سیگنال با دوره‌ی تناوب $\frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ متناوب است.

مثال ۴۶: ویژگی متناوب بودن سیگنال

متناوب بودن سیگنال‌های زیر را بررسی نموده و در صورت متناوب بودن، دوره‌ی تناوب اساسی را تعیین نمایید.

الف : $x(t) = \cos^2\left(2t - \dfrac{\pi}{4}\right)$

ب : $x[n] = 16\cos\left(\dfrac{\pi}{2}n\right) + \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta[n-5m] + \cos\left(\dfrac{\pi n^2}{4}\right)$

حل ب:

$$x_1[n] = 16\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right) \qquad \frac{2\pi}{\Omega_0} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4 \quad \Rightarrow N_1 = 4$$

$$x_2[n] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta[n-5m]$$

$$\Rightarrow N_2 = 5$$

$$x_3[n] = \cos\left(\frac{\pi n^2}{4}\right)$$

شرط متناوب بودن: $\cos\left(\dfrac{\pi(n+N_3)^2}{4}\right) = \cos\left(\dfrac{\pi n^2}{4} + 2\pi m\right)$

آرگومان عبارت سمت چپ : $\dfrac{\pi(n+N_3)^2}{4} = \dfrac{\pi}{4}\left(n^2 + N_3^2 + 2nN_3\right) = \dfrac{\pi n^2}{4} + \dfrac{\pi}{4}\left(N_3^2 + 2nN_3\right)$

$$\frac{\pi n^2}{4} + \frac{\pi}{4}\left(N_3^2 + 2nN_3\right)\Big|_{N_3=4} = \frac{\pi n^2}{4} + \frac{\pi}{4}(16 + 8n) = \frac{\pi n^2}{4} + 2\pi(2+n) \quad \Rightarrow N_3 = 4$$

دوره‌ی تناوب: «کوچکترین مضرب مشترک N_1، N_2 و N_3»: $\Rightarrow N = 20$

http://maleki.semnan.ac.ir

دکتر علی مالکی

مثال ۴۷: ترسیم سیگنال‌های توصیف شده با ضربه، پله و شیب

هر یک از سیگنال‌های زیر را رسم کنید.

الف : $\delta(t^3 - t^2 - 2t)$

ب : $u\left(t^2 - \frac{1}{4}\right)$

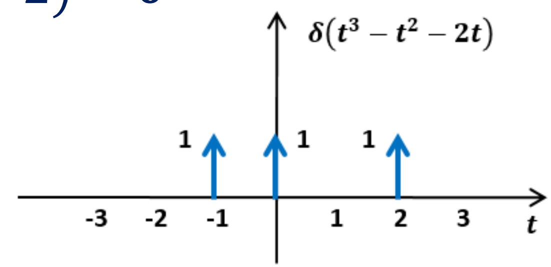
ج : $r(4 - t^2)$

حل الف:

$$t^3 - t^2 - 2t = 0 \quad \Rightarrow t(t^2 - t - 2) = 0$$

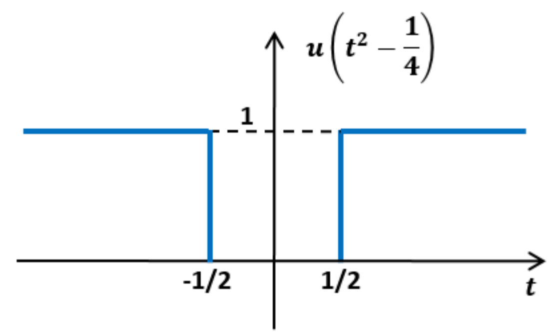
$$\Rightarrow t(t-2)(t+1) = 0$$

$$\Rightarrow roots: \quad t = 0, 2, -1$$

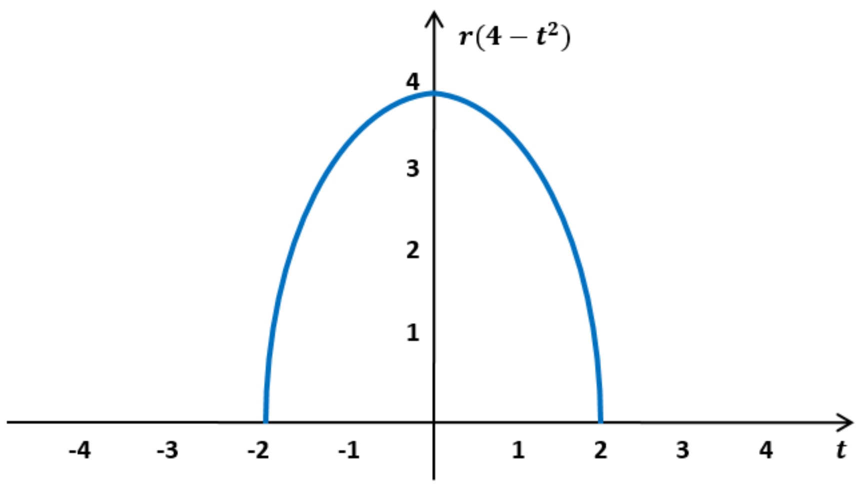


حل ب:

$t^2 - \frac{1}{4}$ در محدوده‌ی $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ منفی است.



حل ج: عبارت $4 - t^2$ در محدوده‌ی ۲- تا ۲ مقدار بزرگتر از صفر دارد. پس سیگنال در این محدوده مقدار غیرصفر $4 - t^2$ دارد.



مثال ۴۸: بررسی ویژگی‌های سیستم

سیستم زمان-گسسته‌ی توصیف شده با رابطه‌ی ورودی-خروجی زیر را در نظر بگیرید. ویژگی‌های

الف: حافظه‌دار بودن،   ب: علی بودن،   ج: استقلال از زمان،   د: خطی بودن و   ه : معکوس‌پذیری

را برای این سیستم بررسی کنید.

$$y[n] = \begin{cases} (n+1)x[n] & x[n+1] \geq 0 \\ x[n] & x[n+1] < 0 \end{cases}$$

حل الف: سیستم حافظه‌دار است.

حل ب: سیستم غیرعلی است.

حل ج: سیستم وابسته به زمان است.

حل د: سیستم همگن نیست و در نتیجه غیرخطی است.

$$x_1[n] = u[n] \qquad \Rightarrow y_1[n] = (n+1)u[n] = r[n+1]$$

$$x_2[n] = -u[n] \qquad \Rightarrow y_2[n] = -u[n] \neq -r[n+1]$$

حل ه : سیستم معکوس‌ناپذیر است.

$$\begin{array}{l} x_1[n] = \delta[n+1] \\ x_2[n] = 2\delta[n+1] \end{array} \Rightarrow y_1[n] = y_2[n] = 0$$

مثال ۴۹: ویژگی معکوس‌پذیری سیستم

سیستمی با رابطه‌ی ورودی- خروجی زیر توصیف شده است. معکوس‌پذیری این سیستم را بررسی نموده و در صورت معکوس‌پذیری، سیستم معکوس آن را تعیین کنید.

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}x[k]$$

حل:

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}x[k]=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-n}x[n]+\sum_{k=-\infty}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}x[k]$$

$$=x[n]+\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}\sum_{k=-\infty}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}x[k]=x[n]+\frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{(n-1)-k}x[k]$$

$$=x[n]+\frac{1}{2}y[n-1]\quad\Rightarrow x[n]=y[n]-\frac{1}{2}y[n-1]$$

یعنی سیستم معکوس‌پذیر است. رابطه‌ی سیستم معکوس به صورت زیر است.

$$y[n]=x[n]-\frac{1}{2}x[n-1]$$

مثال ۵۰: شرط معکوس‌پذیری سیستم‌های خطی

با استفاده از تعریف معکوس‌پذیری نشان دهید «در سیستم‌های خطی، شرط کافی برای معکوس‌پذیری آن است که خروجی صرفا به ازای ورودی صفر برابر صفر باشد».

یادآوری شرط معکوس‌پذیری:

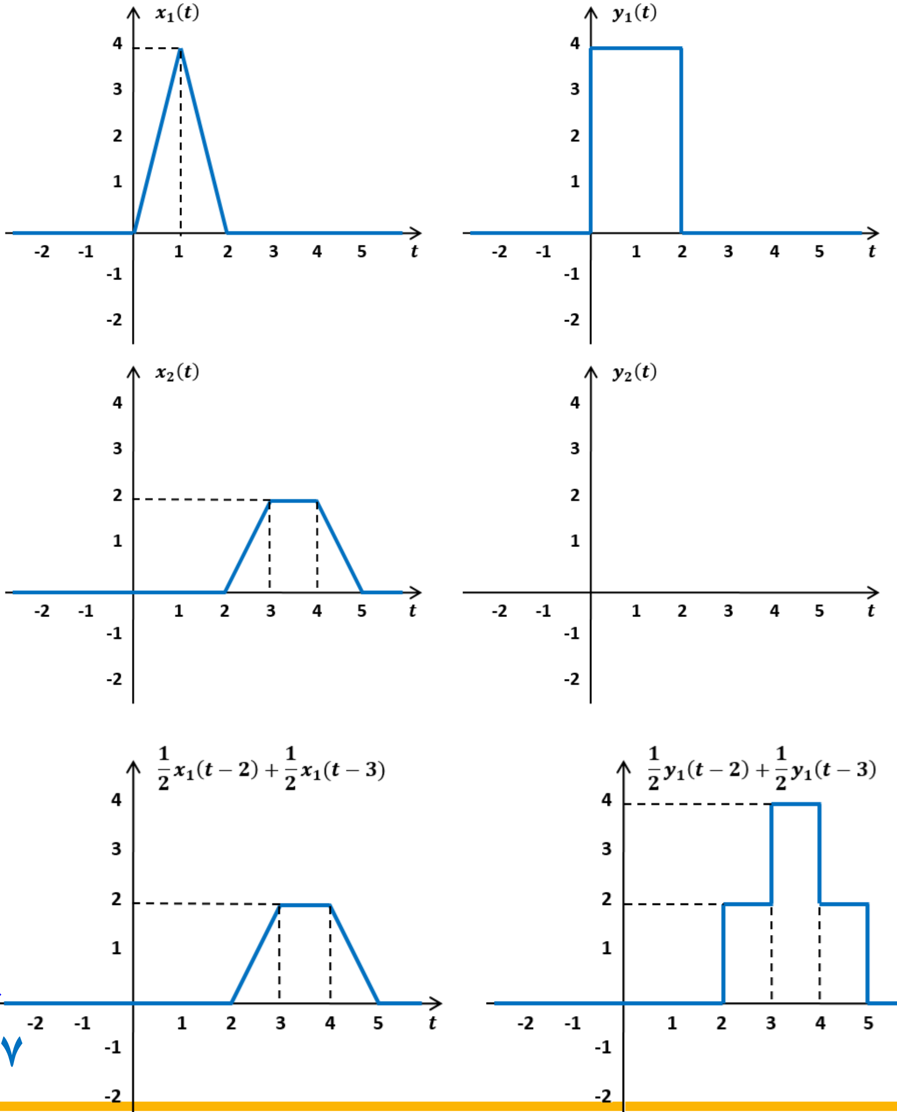
$$\forall \;\; y_1(t) = y_2(t) \Longrightarrow x_1(t) = x_2(t)$$

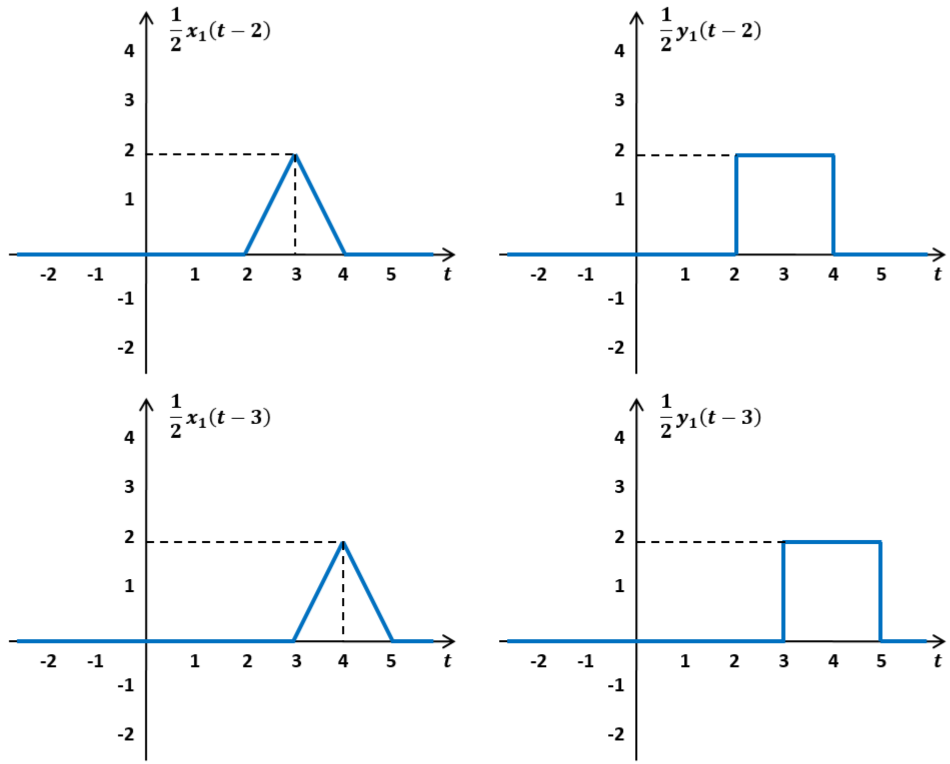
مثال ۵۱: تعیین پاسخ یک سیستم LTI به یک ورودی جدید

پاسخ یک سیستم LTI به ورودی $x_1(t)$ برابر $y_1(t)$ است. پاسخ این سیستم به ورودی $x_2(t)$ را به دست آورید.

$$x_2(t) = \frac{1}{2}x_1(t-2) + \frac{1}{2}x_1(t-3)$$

$$\Rightarrow y_2(t) = \frac{1}{2}y_1(t-2) + \frac{1}{2}y_1(t-3)$$





تست ۷: کنکور کارشناسی ارشد ۱۳۸۷، سوال ۲۸

سیستم با ضابطه‌ی $y(t)=\int_{-\infty}^{-t} x(-\lambda)d\lambda$ که در آن $x(t)$ و $y(t)$ به ترتیب مشخص‌کننده‌ی ورودی و خروجی آن می‌باشد را در نظر بگیرید. این سیستم:

۱) علی و تغییر ناپذیر با زمان است.

۲) علی و تغییر پذیر با زمان است.

۳) غیرعلی و تغییر ناپذیر با زمان است.

۴) غیرعلی و تغییر پذیر با زمان است

$$y(t)=\int_{-\infty}^{-t} x(-\lambda)d\lambda$$

تغییر متغیر $\gamma=-\lambda$

$d\gamma=-d\lambda$ ،

$$=\int_{+\infty}^{t} x(\gamma)(-d\gamma)=\int_{t}^{+\infty} x(\gamma)d\gamma \Rightarrow y(t)=\int_{t}^{+\infty} x(\gamma)d\gamma$$

بررسی علی بودن: سیستم غیرعلی است.

بررسی تغییر ناپذیری با زمان: سیستم مستقل از زمان است.

$$y(t-t_0)=\int_{t-t_0}^{+\infty} x(\gamma)d\gamma$$

$$y'(t-t_0)=\int_{t}^{+\infty} x(\gamma-t_0)d\gamma=\int_{t-t_0}^{+\infty} x(\gamma)d\gamma$$

$$\Rightarrow y(t-t_0)=y'(t-t_0)$$

تست ۸: کنکور کارشناسی ارشد ۱۳۸۶، سوال ۲۷

سیستم‌های زیر را در نظر بگیرید ($x[n]$ و $y[n]$ به ترتیب مشخص‌کننده‌ی ورودی و خروجی سیستم می‌باشند).

$$\text{سیستم یک}: \quad y[n] = \begin{cases} x\left[\frac{n}{2}\right] & n : even \\ 0 & n : odd \end{cases}$$

$$\text{سیستم دو}: \quad y[n] = \sum_{k=n}^{n+6} x[k]$$

در این صورت،

۱) سیستم یک عکس ناپذیر و سیستم دو تغییر پذیر با زمان است.

۲) سیستم یک عکس ناپذیر و سیستم دو تغییر ناپذیر با زمان است.

۳) سیستم یک عکس پذیر و سیستم دو تغییر پذیر با زمان است.

۴) سیستم یک عکس پذیر و سیستم دو تغییر ناپذیر با زمان است.

بررسی معکوس‌پذیری سیستم یک: معکوس‌پذیر است.

بررسی تغییر ناپذیری با زمان سیستم دو: تغییر ناپذیر با زمان است.

$$y[n-n_0] = \sum_{k=n-n_0}^{n-n_0+6} x[k]$$

$$y[n] = \sum_{k=n}^{n+6} x[k-n_0] = \sum_{k=n-n_0}^{n-n_0+6} x[k]$$

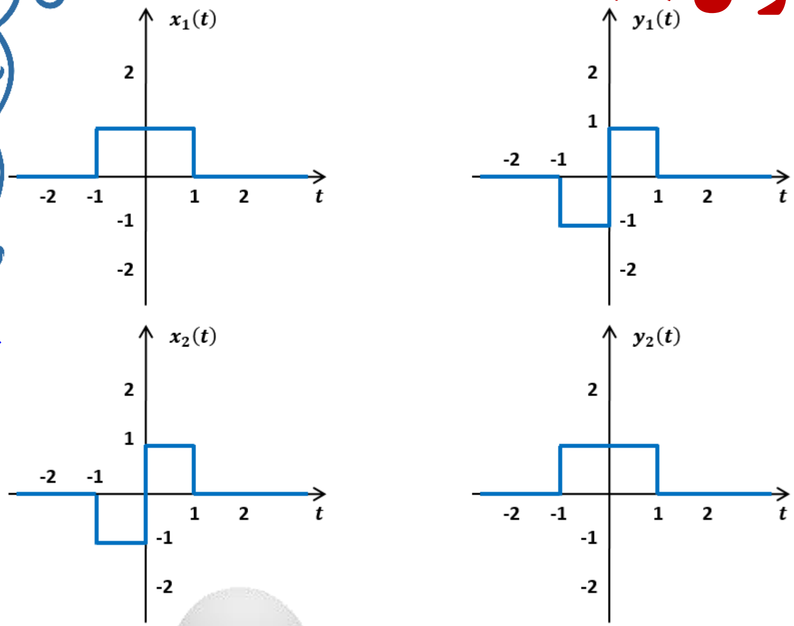
تست ۹: کنکور کارشناسی ارشد ۱۳۸۸، سوال ۲۹

یک سیستم خطی در نظر بگیرید. پاسخ این سیستم به دو ورودی $x_1(t)$ و $x_2(t)$ به صورت $y_1(t)$ و $y_2(t)$ مطابق شکل روبرو مفروض است. با توجه به این اطلاعات، کدام یک از دو عبارت زیر لزوما صحیح است؟

الف) این سیستم با حافظه است.

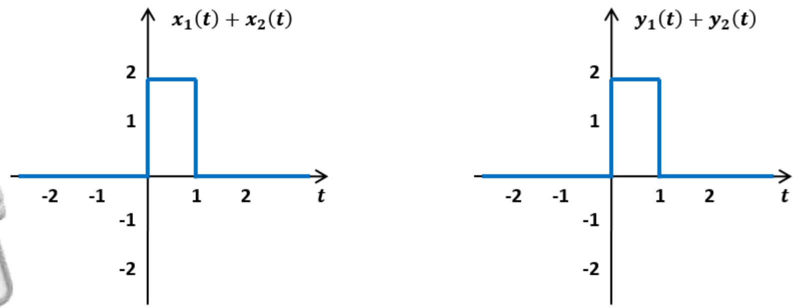
ب) این سیستم تغییر پذیر با زمان است.

۱) فقط ب ۲) فقط الف ۳) الف و ب ۴) هیچکدام



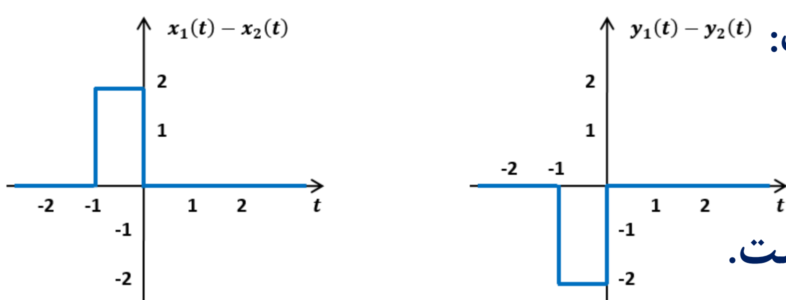
بررسی حافظه‌دار بودن:

سیستم حافظه‌دار است.



بررسی تغییر پذیری با زمان:

از آنجا که سیستم خطی است:



سیستم تغییر پذیر با زمان است.

تست ۱۰: کنکور کارشناسی ارشد ۱۳۸۸، سوال ۳۰

در یک سیستم زمان- گسسته، رابطه بین سیگنال ورودی $x[n]$ و سیگنال خروجی $y[n]$ به صورت $y[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k]\delta[n-2k]$ است. این سیستم .... است.

۱) تغییر ناپذیر با زمان و معکوس‌پذیر

۲) تغییر پذیر با زمان و معکوس‌ناپذیر

۳) تغییر پذیر با زمان و معکوس‌پذیر

۴) تغییر ناپذیر با زمان و معکوس‌ناپذیر

سیستم معکوس‌پذیر و تغییر پذیر با زمان می‌باشد.

تست ۱۱: کنکور کارشناسی ارشد ۱۳۸۹، سوال ۲۰

در مورد سیستمی که رابطه‌ی ورودی- خروجی آن به صورت زیر می‌باشد، کدام گزینه نادرست است.

$$y(t) = \begin{cases} 0 & x(t) < 0 \\ x(t) + x(t-2) & x(t) \geq 0 \end{cases}$$

۱) این سیستم علی و پایدار است.

۲) این سیستم غیرخطی و TI است.

۳) این سیستم TI و معکوس‌ناپذیر می‌باشد.

۴) این سیستم معکوس‌پذیر و حافظه‌دار می‌باشد.

بررسی علی بودن: سیستم علی است.

بررسی پایدار بودن: سیستم پایدار است.

بررسی خطی بودن: همگن نیست و بنابراین غیرخطی است.

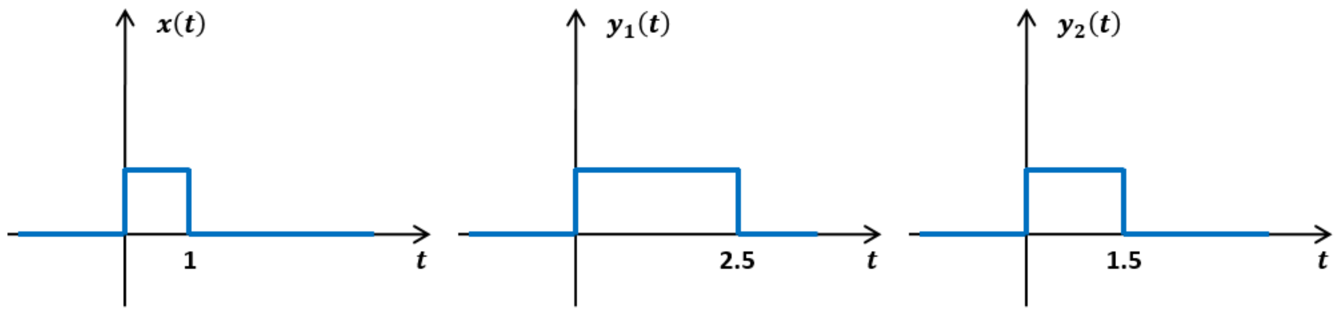
بررسی استقلال از زمان: سیستم مستقل از زمان (TI) است.

بررسی معکوس‌پذیری: سیستم معکوس‌ناپذیر است.

بررسی حافظه‌دار بودن: سیستم حافظه‌دار است.

تست ۱۲: کنکور کارشناسی ارشد ۱۳۸۹، سوال ۲۱

در شکل زیر، ورودی $x(t)$ و پاسخ دو سیستم به این ورودی نشان داده شده است. کدام یک از این دو سیستم می‌تواند یک سیستم LTI باشد؟



۱) فقط سیستم ۱ ۲) فقط سیستم ۲ ۳) هر دو ۴) هیچ‌کدام

تست ۱۳: آزمون کارشناسی ارشد ۱۳۸۰، سوال ۲

با تعاریف $a[n] \triangleq x[n] * \delta[2n]$ و $b(t) \triangleq x(t) * \delta(2t)$ ، کدام گزینه صحیح است؟

۱) $a[n] = x[2n]$ و $b(t) = x(2t)$

۲) $a[n] = x[n]$ و $b(t) = \frac{1}{2}x(t)$

۳) $a[n] = x[n]$ و $b(t) = x(2t)$

۴) $a[n] = \frac{1}{2}x[2n]$ و $b(t) = \frac{1}{2}x(2t)$

حل: طبق ویژگی‌های ضربه واحد:

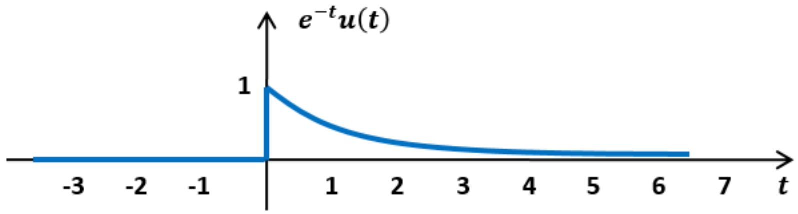
$$\delta[mn] = \delta[n]$$

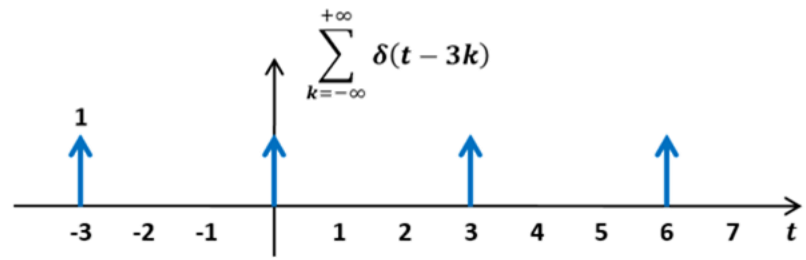
$$\delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t)$$

تست ۱۴: آزمون کارشناسی ارشد ۱۳۸۰، سوال ۱۳

مقدار $y(t)$ به ازای $t = 1$ در رابطه‌ی $y(t) = [e^{-t}u(t)] * \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t-3k)$ تقریبا چقدر است؟

۱) $\frac{1}{e}$ ۲) $-\frac{1}{e}$ ۳) $\frac{2}{e}$ ۳) $-\frac{2}{e}$





$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-(t-3k)}u(t-3k)$$

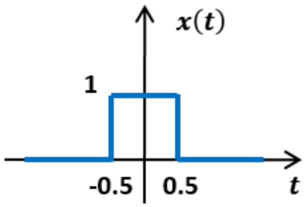
$$y(1) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-(1-3k)}u(1-3k) = \sum_{k=-\infty}^{0} e^{-(1-3k)}$$

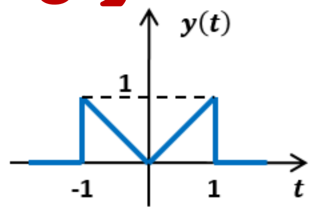
$$= \sum_{k=-\infty}^{0} e^{-1}e^{3k} = \frac{1}{e}\sum_{l=0}^{\infty}\left(e^{-3}\right)^{l} = \frac{1}{e}\,\frac{1}{1-e^{-3}}$$

ضریب $1/\left(1-e^{-3}\right)$ از بین گزینه‌های داده شده

یعنی ۱، ۱− ، ۲ و ۲− به یک نزدیک‌تر است.

تست ۱۵: آزمون کارشناسی ارشد ۱۳۸۸، سوال ۲۰

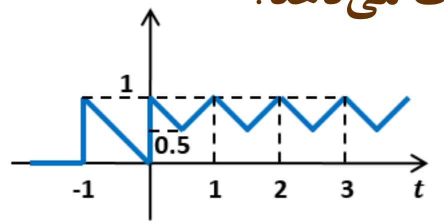




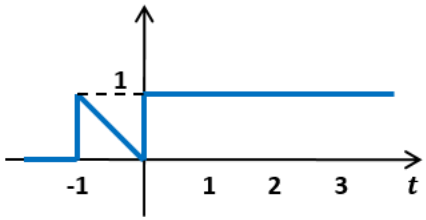
$y(t)$ پاسخ یک سیستم LTI به ورودی $x(t)$ است (به شکل توجه کنید).

کدام گزینه پاسخ پله‌ی این سیستم را به دست می‌دهد؟

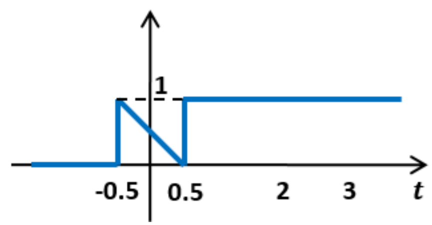
۱)



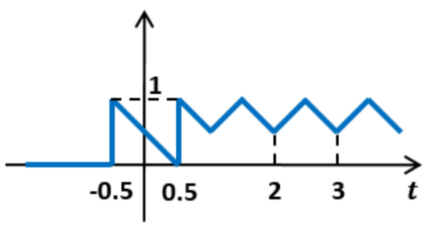
۲)



۳)



۴)



$$u(t) = x(t-0.5) + x(t-1.5) + x(t-2.5) + \cdots$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} x(t-0.5-k)$$

$$\Rightarrow s(t) = \sum_{k=0}^{\infty} y(t-0.5-k)$$

فهرست مطالب

- مفاهیم سیگنال و سیستم
- ویژگی‌های سیگنال
- معرفی سیگنال‌های پایه
- انواع سیستم
- اتصال سیستم‌ها
- ویژگی‌های سیستم‌ها
- مثال‌های مروری
- مثال‌های نرم‌افزاری
- تمرین‌های تئوری
- تمرین‌های نرم‌افزاری

مثال ۵۲: ایجاد تابعی برای تولید سیگنال‌های پرکاربرد

می‌خواهیم توابعی برای ایجاد سیگنال‌های پرکاربرد پله واحد و شیب واحد بنویسیم تا به کمک آنها بتوان هر سیگنال توصیف شده بر اساس آنها را ایجاد نمود.

الف: تابعی به نام **ustep** بنویسید که بردار گستره‌ی زمانی و محل پله را بگیرد و دامنه‌ی سیگنال را برای آن بردار زمانی برگرداند. خوب است کد به نحوی نوشته شود که اگر ورودی دوم یعنی محل پله داده نشد بر اساس محل پیش‌فرض (صفر) سیگنال را ایجاد کند.

ب: تابعی به نام **uramp** بنویسید که بردار گستره‌ی زمانی و محل شیب را بگیرد و دامنه‌ی سیگنال را برای آن بردار زمانی برگرداند.

ج: با استفاده از توابع **ustep** و **uramp**، سیگنال زیر را در گستره‌ی [۶ ۶-] ایجاد و رسم کنید.

$$y(t) = 3r(t+3) - 6r(t+1) + 3r(t) - u(t-1) - u(t-2) - u(t-3)$$

د: با استفاده از توابع **ustep** و **uramp**، سیگنال زیر را در گستره‌ی [۱۰ ۱۰-] ایجاد و رسم کنید.

$$y[n] = u[n+7] + r[n+4] - 2r[n+1] + r[n-4] + u[n-7]$$

الف: تابعی به نام **ustep** بنویسید که بردار گستره‌ی زمانی و محل پله را بگیرد و دامنه‌ی سیگنال را برای آن بردار زمانی برگرداند. خوب است کد به نحوی نوشته شود که اگر ورودی دوم یعنی محل پله داده نشد بر اساس محل پیش‌فرض (صفر) سیگنال را ایجاد کند.

حل الف:

```
function y = ustep(t,sp)
% USTEP is a custom function to generate unit step signal
% t: time support
% sp: step position (negative: advance, positive: delay)

if nargin ==1,
    sp = 0;
end
y = zeros(size(t));
y(find(t>=sp)) = 1;
```

ب: تابعی به نام **uramp** بنویسید که بردار گسترهی زمانی و محل شیب را بگیرد و دامنهی سیگنال را برای آن بردار زمانی برگرداند.

حل ب:

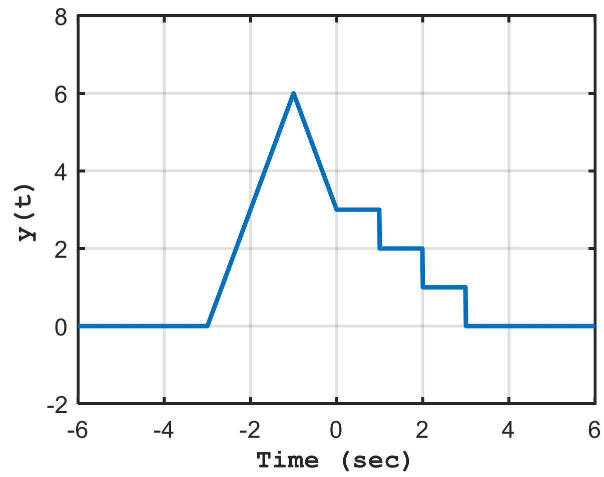
```
function y = uramp(t,rp)
% URAMP is a custom function to generate unit ramp signal
% t: time support
% sp: ramp position (negative: advance, positive: delay)

if nargin == 1,
    rp = 0;
end
y = zeros(size(t));
index = find(t>rp);
y(index) = t(index)-rp;
```

ج: با استفاده از توابع ustep و uramp ، سیگنال زیر را در گستره‌ی [۶ ۶-] ایجاد و رسم کنید.

$$y(t) = 3r(t+3) - 6r(t+1) + 3r(t) - u(t-1) - u(t-2) - u(t-3)$$

حل ج:

```
clear all, close all, clc,
t = -6:0.01:6;
y1 = 3 * uramp(t,-3);
y2 = -6 * uramp(t,-1);
y3 = 3 * uramp(t);
y4 = -1 * ustep(t,1);
y5 = -1 * ustep(t,2);
y6 = -1 * ustep(t,3);
y = y1 + y2 + y3 + y4 + y5 + y6;
plot(t,y), xlabel('Time (sec)'), ylabel('y(t)'), grid
```

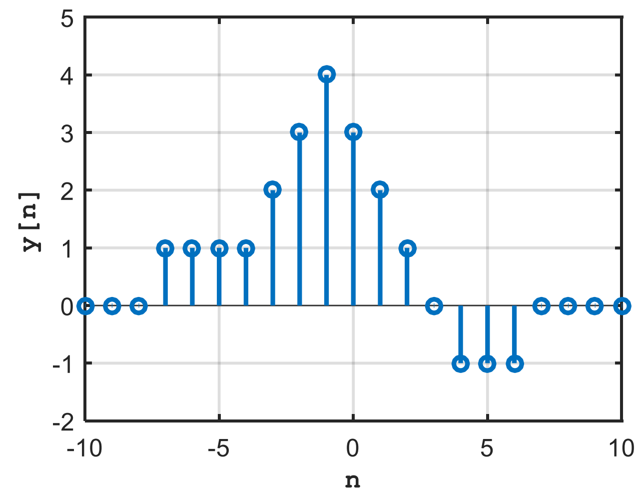


د: با استفاده از توابع **ustep** و **uramp** ، سیگنال زیر را در گستره‌ی [۱۰ ۱۰-] ایجاد و رسم کنید.

$$y[n] = u[n+7] + r[n+4] - 2r[n+1] + r[n-4] + u[n-7]$$

حل د:

```
clear all, close all, clc,
n = -10:10;
y1 = ustep(n,-7);
y2 = uramp(n,-4);
y3 = -2 * uramp(n,-1);
y4 = uramp(n,4);
y5 = ustep(n,7);
y = y1 + y2 + y3 + y4 + y5;
stem(n,y), xlabel('n'), ylabel('y[n]'), grid
```



مثال ۵۳: ایجاد تابعی برای تجزیه‌ی سیگنال به بخش‌های زوج و فرد

از آنجا که هر سیگنال دلخواهی را می‌توان به مولفه‌های زوج و فرد تجزیه کرد،

الف: تابعی به نام **symevenodd** بنویسید که یک سیگنال و بردار زمان متناظر را بگیرد و بخش‌های زوج و فرد آن را بازگرداند. فرض کنید که دوره‌ی زمانی سیگنال متقارن باشد.

ب: با استفاده از تابع **symevenodd** و سیگنال زیر برای دوره‌ی [۱۰ ۱۰-]، بخش‌های زوج و فرد سیگنال را تعیین و رسم کنید.

$$y[n] = r[n+6] - r[n+2] - 2u[n-1] - 2u[n-3]$$

ج: با تکمیل تابع بند الف، تابعی به نام **evenodd** بنویسید که یک سیگنال و بردار زمان متناظر را بگیرد و زمان و بخش‌های زوج و فرد آن را بازگرداند. در این شرایط دیگر فرض متقارن بودن دوره‌ی زمانی سیگنال را نداریم.

د: با استفاده از تابع **evenodd** و توصیف سیگنال زیر برای دوره‌ی [۱۰ ۰]، بخش‌های زوج و فرد سیگنال را تعیین و رسم کنید.

$$y(t) = u(t-1) + r(t-1) - r(t-3) - u(t-4) - u(t-5) - u(t-6)$$

الف: تابعی به نام symevenodd بنویسید که یک سیگنال و بردار زمان متناظر را بگیرد و بخش‌های زوج و فرد آن را بازگرداند. فرض کنید که دوره‌ی زمانی سیگنال متقارن باشد.

حل الف:

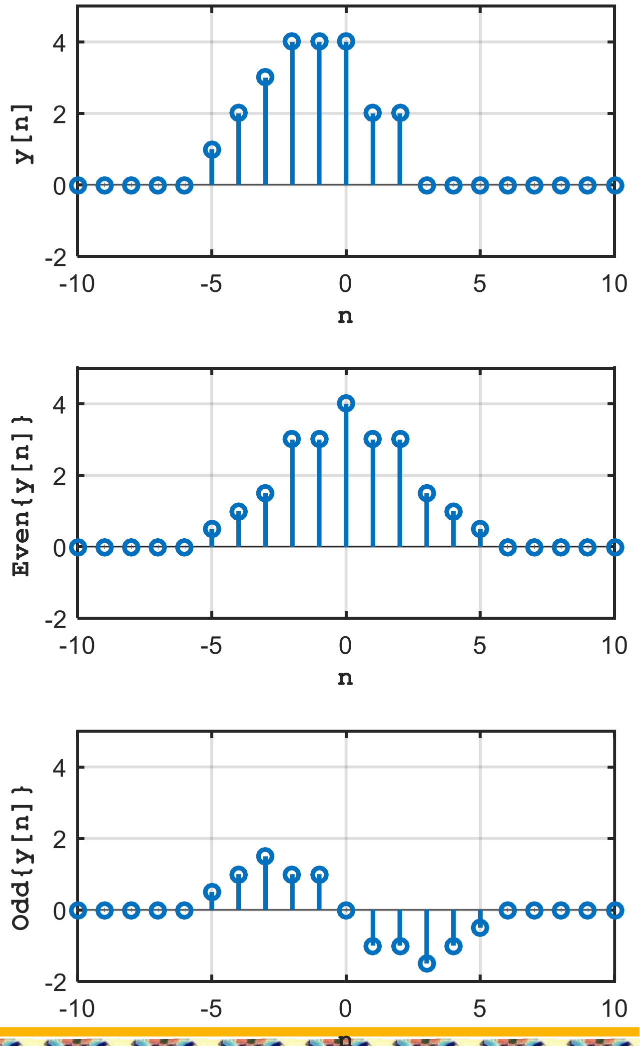
```
function [Ye Yo] = symevenodd(t,y)
% SymEvenOdd is a custom function to decompose a
%    symmetric-time signal into its even/odd parts.
% t: time support
% y: input signal
% [Ye Yo]: even and odd parts of the signal

yr = fliplr(y);
Ye = 0.5 * (y+yr);
Yo = 0.5 * (y-yr);
```

ب: با استفاده از تابع symevenodd و سیگنال زیر برای دوره‌ی [۱۰ ۱۰-]، بخش‌های زوج و فرد سیگنال را تعیین و رسم کنید.

$$y[n] = r[n+6] - r[n+2] - 2u[n-1] - 2u[n-3]$$

حل ب:

```
clear all, close all, clc,
n = -10:10;
y1 = uramp(n,-6);
y2 = - uramp(n,-2);
y3 = -2 * ustep(n,1);
y4 = -2 * ustep(n,3);
y = y1 + y2 + y3 + y4 ;
[ye yo] = symevenodd(n,y);
subplot(311),
stem(n,y), xlabel('n'), ylabel('y[n]'), grid
subplot(312),
stem(n,ye), xlabel('n'), ylabel('Even\{y[n]\}'), grid
subplot(313),
stem(n,yo), xlabel('n'), ylabel('Odd\{y[n]\}'), grid
```



ج: با تکمیل تابع بند الف، تابعی به نام **evenodd** بنویسید که یک سیگنال و بردار زمان متناظر را بگیرد و زمان و بخش‌های زوج و فرد آن را بازگرداند. در این شرایط دیگر فرض متقارن بودن دوره‌ی زمانی سیگنال را نداریم.

حل ج:

```
function [t Ye Yo] = evenodd(t,y)
% EVENODD is a custom function to decompose signal
%    into its even/odd parts.
% t: time support
% y: input signal
% [Ye Yo]: even and odd parts of the signal

tstep = t(2)-t(1);
if abs(t(1))<abs(t(end)),
    t1 = -t(end):tstep:t(1)-tstep,
    t = [t1,t],
    y = [zeros(1,length(t1)), y],
elseif abs(t(1))>abs(t(end)),
    t1 = t(end)+tstep:tstep:-t(1),
    t = [t,t1],
    y = [y zeros(1,length(t1))],
end
yr = fliplr(y);
Ye = 0.5 * (y+yr);
Yo = 0.5 * (y-yr);
```

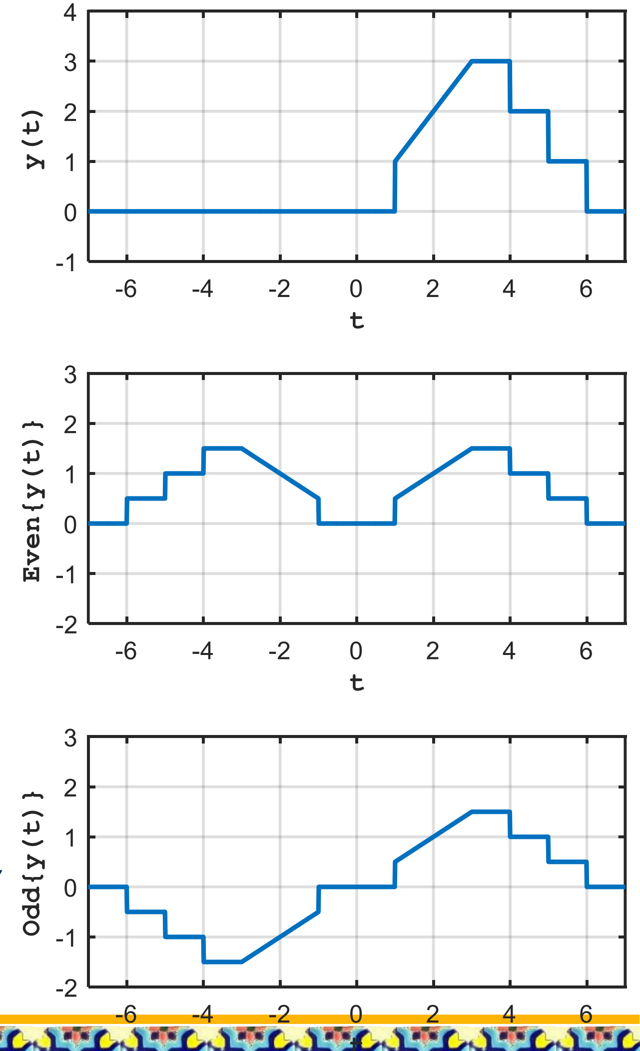

دکتر علی مالکی

د: با استفاده از تابع evenodd و توصیف سیگنال زیر برای دوره‌ی [۰ ۱۰]، بخش‌های زوج و فرد سیگنال را تعیین و رسم کنید.

$$y(t) = u(t-1) + r(t-1) - r(t-3) - u(t-4) - u(t-5) - u(t-6)$$

حل د:

```
clear all, close all, clc,
t = 0:0.01:7;
y1 = ustep(t,1);
y2 = uramp(t,1);
y3 = -uramp(t,3);
y4 = -ustep(t,4);
y5 = -ustep(t,5);
y6 = -ustep(t,6);
y = y1 + y2 + y3 + y4 +y5 + y6 ;
[t ye yo] = evenodd(t,y);
subplot(311),
plot(t,ye+yo), xlabel('t'), ylabel('y(t)'), grid,
subplot(312),
plot(t,ye), xlabel('t'), ylabel('Even\{y(t)\}'), grid,
subplot(313),
plot(t,yo), xlabel('t'), ylabel('Odd\{y(t)\}'), grid,
```

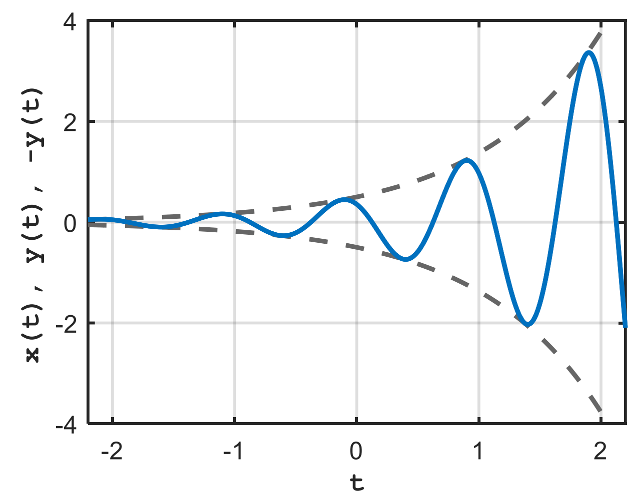


مثال ۵۴: رسم سیگنال به کمک جعبه ابزار نمادین

به کمک جعبه‌ابزار ریاضیات نمادین، سیگنال $x(t) = |c|\, e^{rt} \cos(\omega_0 t + \theta)$ را به همراه پوش آن یعنی $y(t) = \pm|c|\, e^{rt}$ به ازای پارامترهای $c = 0.5$ ، $r = 1.01$ ، $\omega_0 = 2\pi$ و $\theta = pi/4$ و در محدوده‌ی زمانی [۲/۲ ۲/۲-] رسم کنید.

حل:

```
clear all, close all, clc,
syms t x,
x = 0.5 * exp(1.01*t) * cos(2*pi*t + pi/4);
y = 0.5 * exp(1.01*t);
ezplot(x,[-2.2 2.2]), hold on
ezplot(y,[-2.2 2.2]), ezplot(-y,[-2.2 2.2])
xlabel('t'), ylabel('x(t), y(t), -y(t)'),
axis([-2.2 2.2 -4 4]), grid
```

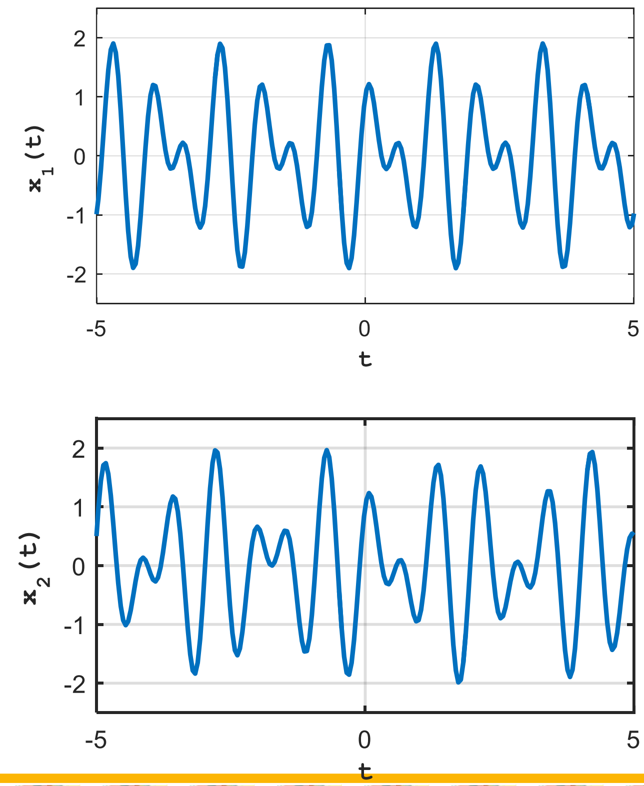


مثال ۵۵: بررسی متناوب بودن مجموع دو سیگنال متناوب

با استفاده از جعبه‌ابزار ریاضیات نمادین، سیگنال $x_1(t) = \cos(3\pi t) + \sin(2\pi t)$ و همچنین سیگنال $x_2(t) = \cos(9t) + \sin(2\pi t)$ را در محدوده‌ی [۵ ۵-] رسم نموده و متناوب بودن آنها را بررسی کنید.

حل:

```
clear all, close all, clc,
syms t x1 x2,
x1 = cos(3*pi*t) + sin(2*pi*t);
x2 = cos(9*t) + sin(2*pi*t);
subplot(211), ezplot(x1,[-10 10]),
xlabel('t'), ylabel('x_1(t)'), title(''),
axis([-5 5 -2.5 2.5]), grid,
subplot(212), ezplot(x2,[-10 10]),
xlabel('t'), ylabel('x_2(t)'), title(''),
axis([-5 5 -2.5 2.5]), grid,
```



مثال ۵۶: بررسی اثر نمونه‌برداری بر دوره‌ی تناوب

سیگنال زمان-پیوسته‌ی $x(t) = \cos\left(\frac{7\pi}{4}t\right)$ و سیگنال زمان-گسسته‌ی $x[n] = \cos\left(\frac{7\pi}{4}n\right)$ را در نظر بگیرید. قصد داریم یک سیگنال‌ها را ابتدا یک بار به طور مجزا یک بار بر روی هم در شکلی شامل سه بخش زیر هم رسم کنیم.

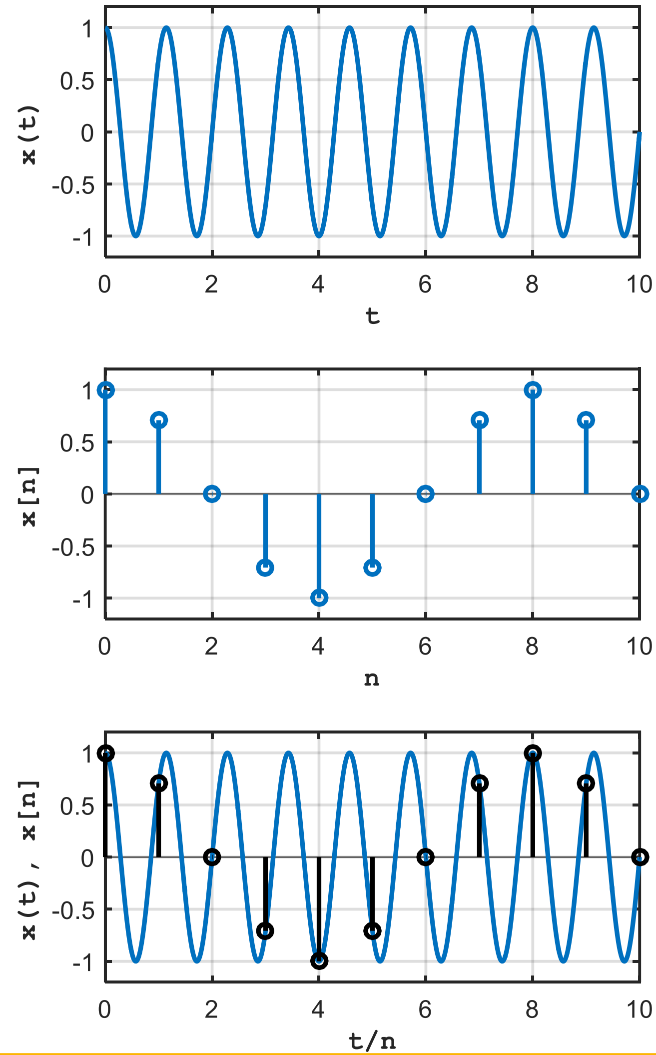
الف: در بخش بالایی شکل، سیگنال $x(t)$ را برای محدوده‌ی [۰ ۱۰] رسم نموده و دوره‌ی تناوب آن را تعیین کنید.

ب: در بخش میانی، سیگنال $x[n]$ را برای محدوده‌ی [۰ ۱۰] رسم نموده و دوره‌ی تناوب آن را تعیین کنید.

ج: در بخش پایینی نیز سیگنال‌های زمان-پیوسته و زمان-گسسته را بر روی هم رسم کنید. آیا می‌توان گفت سیگنال $x[n]$ نمونه‌برداری شده‌ی سیگنال $x(t)$ است؟ ارتباط دوره‌ی تناوب این دو سیگنال را چگونه توجیه می‌کنید؟ نکته‌ی این سوال به تفصیل در مثال ۳۳ فصل چهارم مورد بحث قرار گرفته است.

حل:

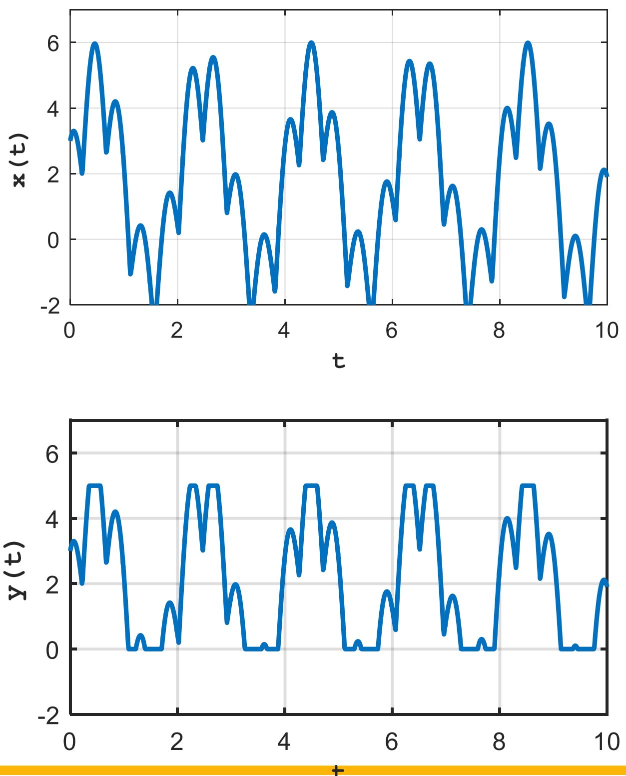
```
clear all, close all, clc,
t = 0:0.01:10;
n = 0:10;
xt = cos(7*pi/4*t);
xn = cos(7*pi/4*n);
subplot(311),
plot(t,xt), xlabel('t'), ylabel('x(t)'), grid,
subplot(312),
stem(n,xn), xlabel('n'), ylabel('x[n]'), grid,
subplot(313),
plot(t,xt), hold on, stem(n,xn,'k'),
xlabel('t/n'), ylabel('x(t), x[n]'), grid,
```



مثال ۵۷: شبیه‌سازی سیستم محدود کننده

محدودکننده به سیستمی غیرخطی اطلاق می‌گردد که دامنه‌ی سیگنال ورودی خود را در گستره‌ی مشخصی محدود می‌کند. بدیهی است مقادیر ورودی بیشتر از کران بالا به مقدار کران بالا محدود می‌شود و مقادیر کمتر از کران پایین با مقدار کران پایین جایگزین می‌شوند.

سیستم محدود کننده‌ای با کران بالای ۵ و کران پایین صفر در نظر بگیرید. برنامه‌ای برای شبیه‌سازی این محدود کننده بنویسید که برای سیگنال ورودی $x(t) = 3\sin(\pi t) + 3|\cos(7t)|$ ، سیگنال خروجی را محاسبه نموده و دو سیگنال را در کنار هم در یک شکل رسم کند. برای این منظور می‌توانید از تابع **find** استفاده نمایید.



حل:

```
clear all, close all, clc,
t = 0:0.01:10;
x = 3 * sin(pi*t) + 3 * abs(cos(7*t));
y = x; y(find(x>5))=5; y(find(x<0))=0;
subplot(211),
plot(t,x), xlabel('t'), ylabel('x(t)'),
axis([0 10 -2 7]), grid
subplot(212),
plot(t,y), xlabel('t'), ylabel('y(t)'),
axis([0 10 -2 7]), grid
```

فهرست مطالب

- مفاهیم سیگنال و سیستم
- ویژگی‌های سیگنال
- معرفی سیگنال‌های پایه
- انواع سیستم
- اتصال سیستم‌ها
- ویژگی‌های سیستم‌ها
- مثال‌های مروری
- مثال‌های نرم‌افزاری
- تمرین‌های تئوری
- تمرین‌های نرم‌افزاری

فهرست مطالب

- مفاهیم سیگنال و سیستم
- ویژگی‌های سیگنال
- معرفی سیگنال‌های پایه
- انواع سیستم
- اتصال سیستم‌ها
- ویژگی‌های سیستم‌ها
- مثال‌های مروری
- مثال‌های نرم‌افزاری
- تمرین‌های تئوری
- تمرین‌های نرم‌افزاری

فهرست مطالب

گفت ما را هفت وادی در ره است	چون گذشتی هفت وادی، درگه است
وانیامد در جهان زین راه کس	نیست از فرسنگ آن آگاه کس
چون نیامد باز کس زین راه دور	چون دهندت آگهی ای ناصبور؟
چون شدند آن جایگه گم سر به سر	کی خبر بازت دهد ای بی خبر؟
هست وادی طلب آغاز کار	وادی عشق است از آن پس، بی کنار
پس سیم وادی است آن معرفت	پس چهارم وادی استغنا صفت
هست پنجم وادی توحید پاک	پس ششم وادی حیرت صعبناک
هفتمین وادی فقر است و فنا	بعد از این روی روش نبود تو را
در کشش افتی روش گم گرددت	گر بود یک قطره قلزم گرددت

عطار نیشابوری