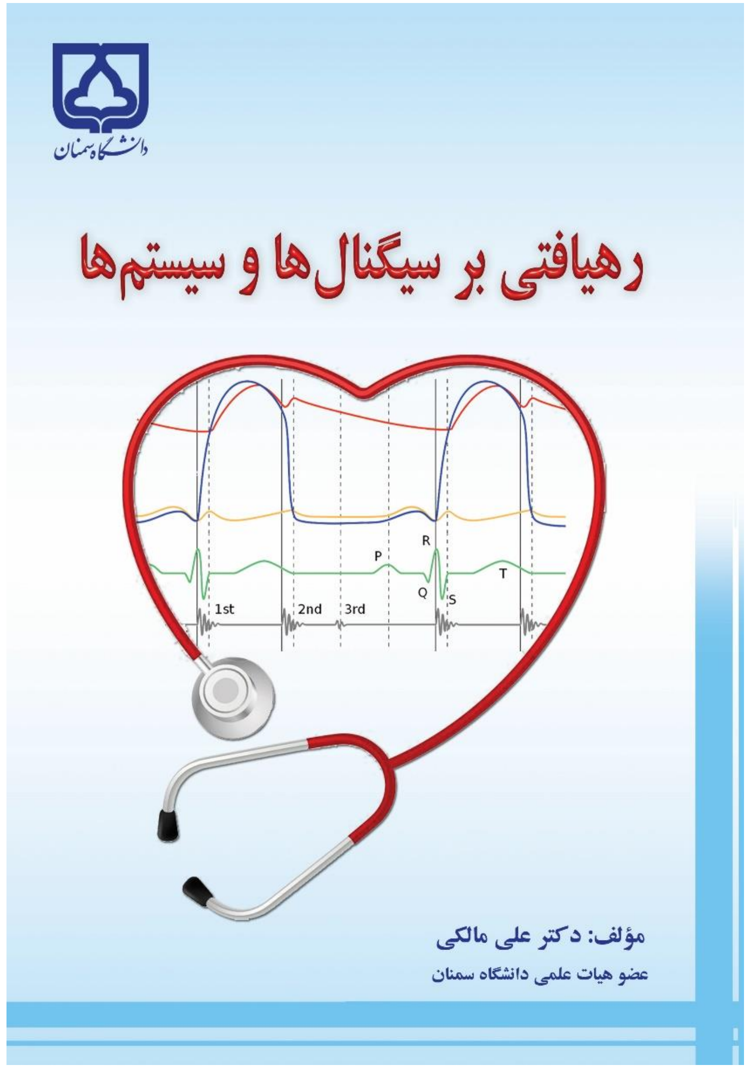
سیگنال‌ها و سیستم‌ها

مبحث دوم

تجزیه و تحلیل سیستم‌های LTI در حوزه زمان

دکتر علی مالکی

http://maleki.semnan.ac.ir


دانشگاه سمنان
رهیافتی بر سیگنال‌ها و سیستم‌ها
P
R
T
Q
S
1st
2nd
3rd
مؤلف: دکتر علی مالکی
عضو هیات علمی دانشگاه سمنان

اهداف فصل

پس از مطالعه این فصل قادر خواهید بود:

مفهوم جمع کانولوشن و انتگرال کانولوشن را توصیف کنید؛

پاسخ سیستم LTI توصیف شده با پاسخ ضربه را به هر ورودی دلخواه محاسبه کنید؛

مفهوم ویژگی‌های کانولوشن در تجزیه و تحلیل سیستم‌ها را درک کنید؛

در مورد ویژگی‌های سیستم‌های LTI بر اساس پاسخ ضربه نظر دهید؛

به بررسی سیستم‌های LTI علی توصیف شده با معادله دیفرانسیل یا دیفرانسیل بپردازید.

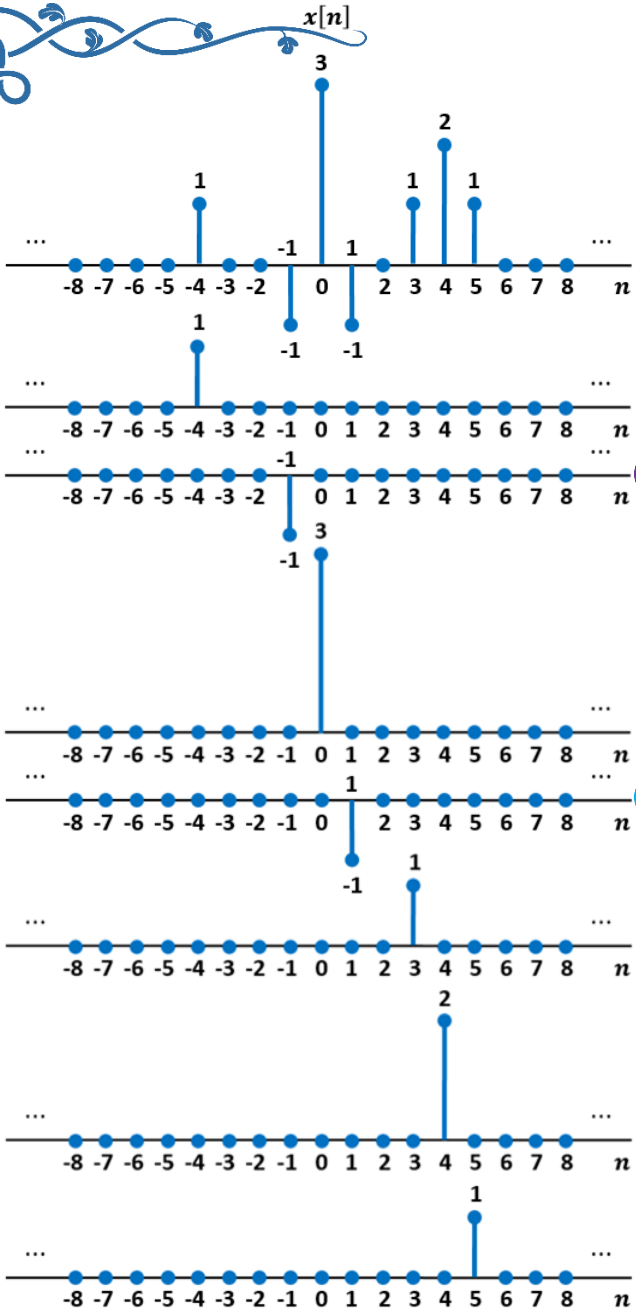
فهرست مطالب

جمع کانولوشن

هر سیگنال زمان- گسسته را می‌توان به صورت ترکیب خطی ضربه واحد و جابجا شده‌های آن بازنمایی نمود.

مثال ۱: بازنمایی سیگنال زمان– گسسته به صورت ترکیب خطی ضربه واحد

سیگنال زمان– گسسته‌ی زیر را به صورت ترکیب خطی ضربه واحد و جابجا شده‌های آن بازنمایی کنید.



$(1)\delta[n+4]$

$(-1)\delta[n+1]$

$(3)\delta[n]$

$(-1)\delta[n-1]$

$(1)\delta[n-3]$

$(2)\delta[n-4]$

$(1)\delta[n-5].$

حل:

$$x[n] = (1)\delta[n+4] + (-1)\delta[n+1] + (3)\delta[n] + (-1)\delta[n-1] + (1)\delta[n-3] + (2)\delta[n-4] + (1)\delta[n-5].$$

$$x[n] = x[-4]\delta[n+4] + x[-1]\delta[n+1] + x[0]\delta[n] + x[1]\delta[n-1] + x[3]\delta[n-3] + x[4]\delta[n-4] + x[5]\delta[n-5].$$

$$x[n] = \cdots + x[-5]\delta[n+5] + x[-4]\delta[n+4] + x[-3]\delta[n+3] + x[-2]\delta[n+2] + x[-1]\delta[n+1] + x[0]\delta[n] + x[1]\delta[n-1] + x[2]\delta[n-2] + x[3]\delta[n-3] + x[4]\delta[n-4] + x[5]\delta[n-5] + x[6]\delta[n-6] + \cdots$$

$$\Rightarrow x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta[n-k]$$

دقت کنید:

هر سیگنال زمان- گسسته‌ی $x[n]$ را می‌توان به صورت ترکیب خطی ضربه واحد و جابجا شده‌های آن بازنمایی کرد:

$$\Rightarrow \boldsymbol{x[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta[n-k]}$$

مثال ۲: بازنمایی سیگنال‌های زمان– گسسته به صورت ترکیب خطی ضربه‌ها

سیگنال‌های پله واحد و شیب واحد را به صورت ترکیب خطی سیگنال ضربه واحد و جابجا شده‌های آن بازنمایی کنید.

حل:

$$u[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}u[k]\delta[n-k]=\sum_{k=-\infty}^{-1}u[k]\delta[n-k]+\sum_{k=0}^{+\infty}u[k]\delta[n-k]=\sum_{k=0}^{\infty}\delta[n-k]$$

$$\Rightarrow u[n]=\sum_{k=0}^{\infty}\delta[n-k]$$

$$r[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}r[k]\delta[n-k]=\sum_{k=-\infty}^{0}r[k]\delta[n-k]+\sum_{k=1}^{+\infty}r[k]\delta[n-k]=\sum_{k=1}^{\infty}k\delta[n-k]$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}k\delta[n-k]$$

$$\Rightarrow r[n]=\sum_{k=0}^{\infty}k\delta[n-k]$$

برای یک سیستم خطی

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta[n-k]$$

$\vdots$	$\vdots$
$h_{-2}[n]$	پاسخ سیستم به $\delta[n+2]$
$h_{-1}[n]$	پاسخ سیستم به $\delta[n+1]$
$h_{0}[n]$	پاسخ سیستم به $\delta[n]$
$h_{1}[n]$	پاسخ سیستم به $\delta[n-1]$
$h_{2}[n]$	پاسخ سیستم به $\delta[n-2]$
$\vdots$	$\vdots$
$h_{k}[n]$	پاسخ سیستم به $\delta[n-k]$
$\vdots$	$\vdots$

for Linear Systems: $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h_k[n]$

دقت کنید:

برای سیستم‌های خطی، با داشتن پاسخ سیستم به ضربه واحد و جابجا شده‌های آن می‌توان پاسخ سیستم به هر ورودی دلخواه را تعیین نمود.

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h_k[n]$$

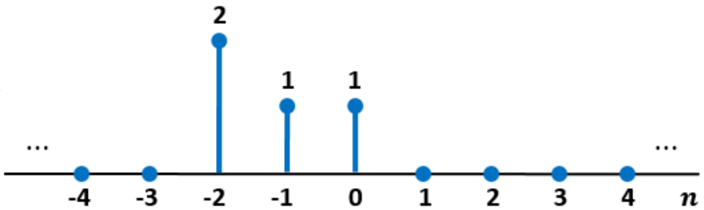
مثال ۳: محاسبه پاسخ سیستم خطی

فرض کنید $h_{-1}[n]$، $h_0[n]$ و $h_1[n]$ به ترتیب پاسخ‌های سیستمی خطی به ورودی‌های $\delta[n+1]$، $\delta[n]$ و $\delta[n-1]$ باشند.

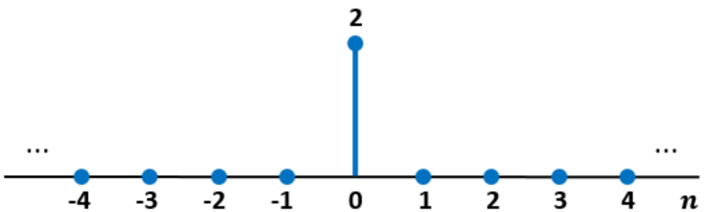
الف: پاسخ این سیستم را به ورودی $x[n]$ داده شده بیابید.

ب: آیا این سیستم مستقل از زمان است؟

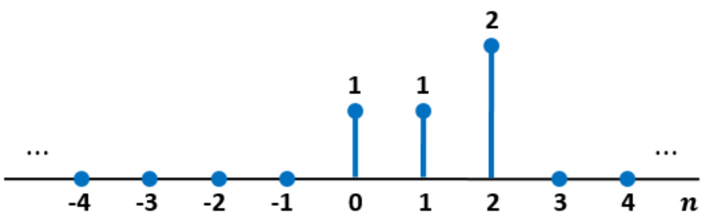
$h_{-1}[n]$



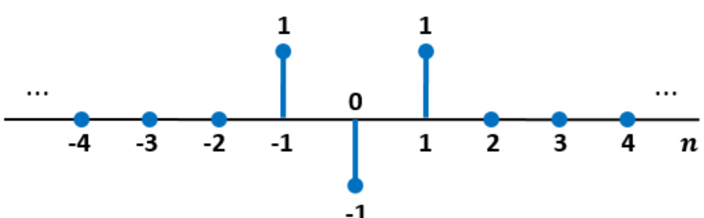
$h_0[n]$



$h_1[n]$



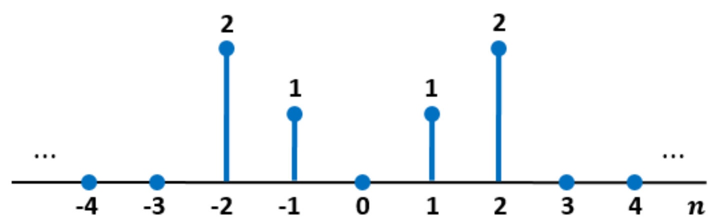
$x[n]$



$$x[n] = \delta[n+1] - \delta[n] + \delta[n-1]$$

$$\Rightarrow y[n] = h_{-1}[n] - h_0[n] + h_1[n]$$

$y[n]$



یعنی اگر سیستم مستقل از زمان (TI) باشد با داشتن صِرفِ پاسخ سیستم به ضربه واحد ($h[n]$) می‌توان پاسخ سیستم به تمام جابجا شده‌های ضربه واحد را به دست آورد.

$\vdots$ $\vdots$

$h[n+2]$ پاسخ سیستم به $\delta[n+2]$

$h[n+1]$ پاسخ سیستم به $\delta[n+1]$

$h[n]$ پاسخ سیستم به $\delta[n]$

$h[n-1]$ پاسخ سیستم به $\delta[n-1]$

$h[n-2]$ پاسخ سیستم به $\delta[n-2]$

$\vdots$ $\vdots$

$h[n-k]$ پاسخ سیستم به $\delta[n-k]$

$\vdots$ $\vdots$

پاسخ سیستم LTI به ورودی $x[n]$:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k]$$

$$y[n] = x[n] * h[n]$$

پاسخ سیستم LTI به ورودی $x[n]$:

$$y[n] = x[n] * h[n]$$

$$x[n] \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow y[n] = x[n] * h[n]$$

مثال ۴: جمع کانولوشن (به روش تحلیلی)

سیستمی LTI با پاسخ ضربه $h[n]$ توصیف شده است. پاسخ این سیستم را به ورودی $x[n]$ داده شده به دست آورید.

$$h[n] = u[n] \qquad x[n] = \alpha^n u[n] \qquad 0 < \alpha < 1$$

حل:

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha^k u[k]u[n-k]$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k u[-k+n] = \begin{cases} 0 & n < 0 \\ \sum_{k=0}^{n} \alpha^k & n \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & n < 0 \\ \dfrac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha} & n \geq 0 \end{cases}$$

$$= \frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha} u[n]$$

محاسبه‌ی کانولوشن را به می‌توان به شیوه‌های تحلیلی یا ترسیمی انجام داد.

در روش تحلیلی، با توجه به ویژگی جابجایی کانولوشن، از یکی از توصیف‌های زیر استفاده می‌کنیم.

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[n-k]h[k]$$

❖ به منظور دستیابی به سادگی محاسباتی، اگر عبارت $h[n]$ ساده‌تر باشد از زیگمای نخست و اگر عبارت $x[n]$ ساده‌تر باشد از زیگمای دوم استفاده می‌کنیم.

در شیوه‌ی ترسیمی، چنانچه بخواهیم کانولوشن را مطابق رابطه‌ی زیر محاسبه نماییم . . .

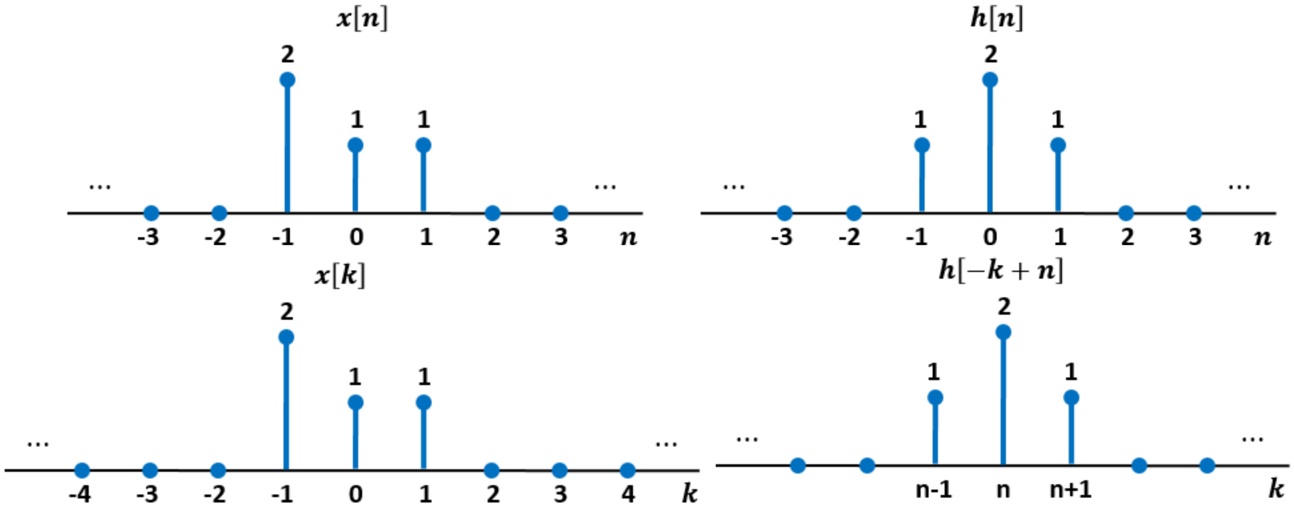
$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k]$$

دقت کنید:

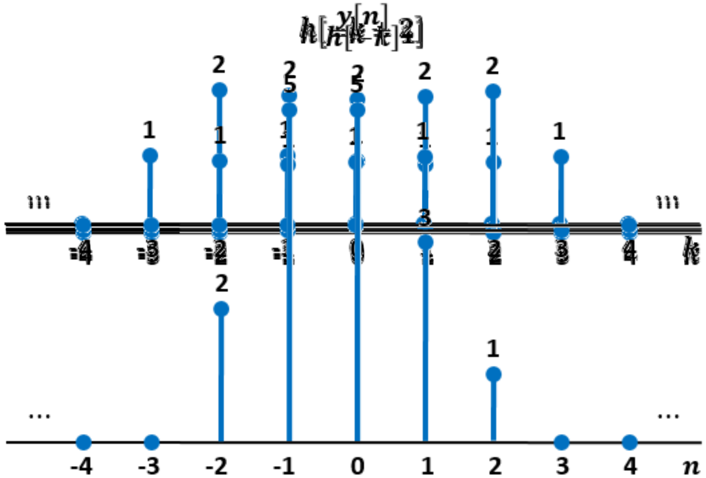
برای محاسبه‌ی کانولوشن دو سیگنال به شیوه‌ی ترسیمی، یکی از سیگنال‌ها را نگه می‌داریم و سیگنال دیگر را قرینه کرده و به اندازه‌ی n جابجا می‌کنیم. نمونه‌های دو سیگنال حاصل را نظیر به نظیر در هم ضرب کرده و مجموع مقادیر حاصل ضرب را به دست می‌آوریم تا حاصل کانولوشن در آن n خاص به دست آید. روند را برای nهای دیگر (از $-\infty$ تا $+\infty$) تکرار می‌کنیم تا کل سیگنال حاصل کانولوشن به دست آید.

مثال ۵: جمع کانولوشن (به روش ترسیمی)

سیستمی LTI با پاسخ ضربه $h[n]$ توصیف شده است. پاسخ این سیستم را به ورودی $x[n]$ داده شده به دست آورید.



حل:



برای $n=-2$: $y[-2]=2\times 1=2$

برای $n=-1$: $y[-1]=2\times 2+1\times 1=5$

برای $n=0$: $y[0]=2\times 1+1\times 2+1\times 1=5$

برای $n=1$: $y[1]=1\times 1+1\times 2=3$

برای $n=2$: $y[2]=1\times 1=1$

توجه: سیگنال‌های $x[n]$ و $h[n]$ تعداد محدودی نمونه غیرصفر دارند. اگر چه نمونه‌های غیرصفر سیگنال‌های $x[n]$ و $h[n]$ از ۱- تا ۱ بود ولی نمونه‌های غیرصفر $y[n]$ از ۲- تا ۲ حاصل شد.

بیشتر بدانیم: سیگنال *FIR*

اگر پاسخ ضربه‌ی سیستمی زمان- گسسته دارای تعداد محدودی نمونه غیرصفر باشد در اصطلاح آن را سیستم با پاسخ ضربه محدود[1] (*FIR*) گویند. در مقابل، اگر پاسخ ضربه سیستمی زمان- گسسته دارای بی‌نهایت نمونه غیرصفر باشد در اصطلاح سیستم با پاسخ ضربه نامحدود[2] (*IIR*) نامیده می‌شود. اشتباه مصطلحی نیز برای سیگنال‌ها وجود دارد که سیگنال‌های زمان- گسسته با تعداد محدودی نمونه‌ی غیرصفر را *FIR* و سیگنال‌های زمان- گسسته با بی‌نهایت نمونه‌ی غیرصفر را *IIR* می‌نامند. این اصطلاحات از آن جهت اشتباه است که پاسخ ضربه برای سیگنال بی‌معنی است.

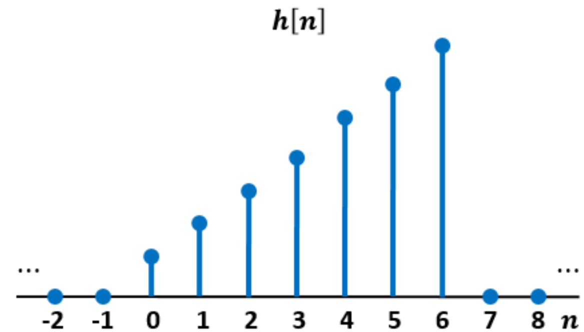
مثال ۶: جمع کانولوشن

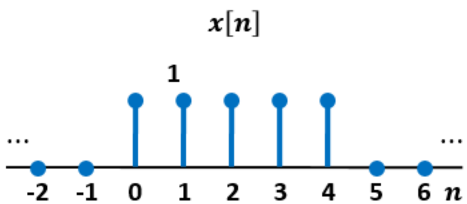
سیستمی LTI با پاسخ ضربه‌ی $h[n]$ توصیف شده است. پاسخ این سیستم را به ورودی $x[n]$ داده شده به دست آورید.

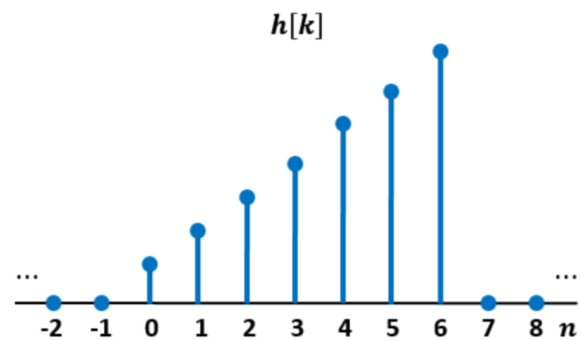
$$x[n]=\begin{cases}1 & 0\le n\le 4\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

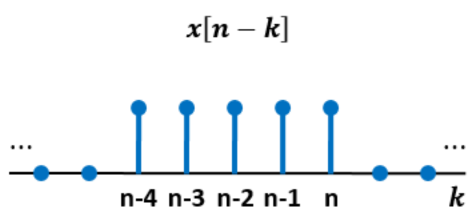
$$h[n]=\begin{cases}\alpha^n & 0\le n\le 6\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

حل:

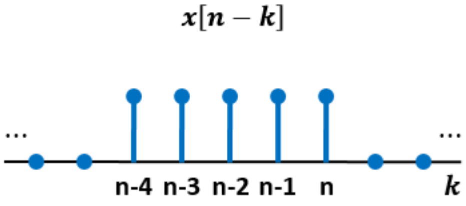


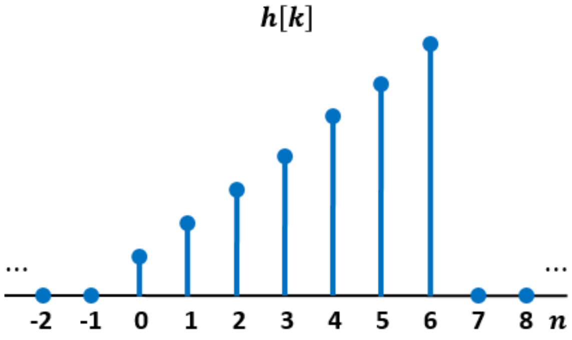






$x[n]$ و $h[n]$ سیگنال‌های FIR هستند بنابراین $y[n]=x[n]*h[n]$ نیز سیگنالی FIR خواهد بود که تنها در محدوده‌ی صفر تا ۱۰ می‌تواند مقدار غیرصفر داشته باشد.





$for \qquad n < 0, \qquad y[n] = 0$

$$for \qquad 0 \le n \le 3, \qquad y[n] = \sum_{k=0}^{n} \alpha^k = \frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}$$

$$for \qquad 4 \le n \le 6, \qquad y[n] = \sum_{k=n-4}^{n} \alpha^k = \frac{\alpha^{n-4}-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}$$

$$for \qquad 7 \le n \le 10, \qquad y[n] = \sum_{k=n-4}^{6} \alpha^k = \frac{\alpha^{n-4}-\alpha^{7}}{1-\alpha}$$

$for \qquad n > 10, \qquad y[n] = 0$

مثال ۷: جمع کانولوشن پله واحد و پله واحد

نشان دهید $u[n] * u[n] = (n+1)u[n] = r[n+1]$.

حل:

$$u[n] * u[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u[k]u[n-k] = \sum_{k=0}^{\infty} u[n-k] = \begin{cases} 0 & n < 0 \\ n+1 & n > 0 \end{cases}$$

$$= (n+1)u[n] = r[n+1]$$

فهرست مطالب

انتگرال کانولوشن

یادآوری جمع کانولوشن:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta[n-k]$$

پاسخ سیستمی خطی به ورودی $x(t)$:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h_k[n]$$

پاسخ سیستمی LTI به ورودی $x(t)$:

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k]$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$

پاسخ سیستمی خطی به ورودی $x(t)$:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h_\tau(t)d\tau$$

پاسخ سیستمی LTI به ورودی $x(t)$:

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

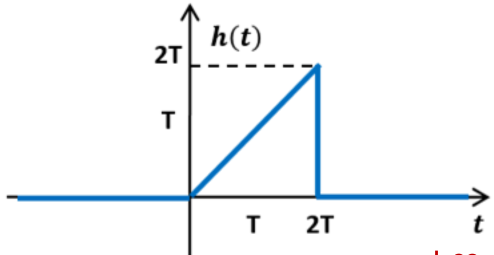
مثال ۸: انتگرال کانولوشن

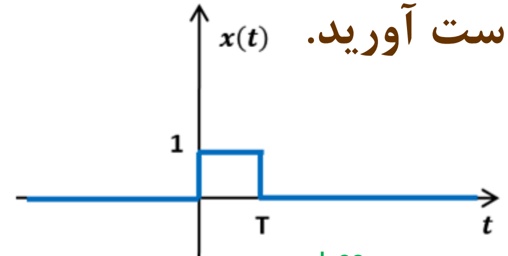
سیستمی LTI با پاسخ ضربه‌ی $h(t)$ توصیف شده است. پاسخ این سیستم را به ورودی $x(t)$ داده شده به دست آورید.

حل:

$$h(t)=\begin{cases} t & 0\le t\le 2T \\ 0 & otherwise\end{cases}$$

$$x(t)=\begin{cases} 1 & 0\le t\le T \\ 0 & otherwise\end{cases}$$





$$y(t)=x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t-\tau)h(\tau)d\tau$$

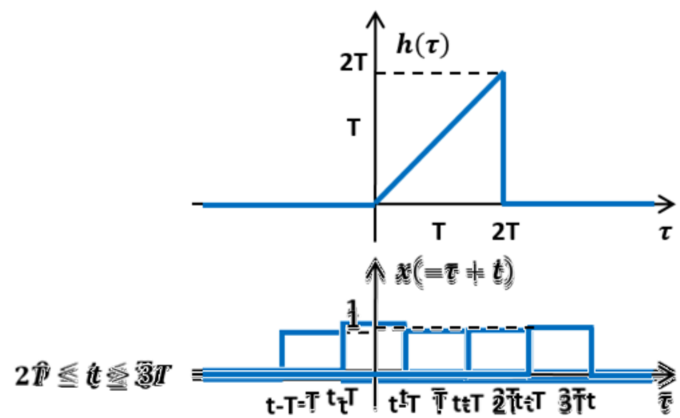
$$for\quad t\le 0,\quad y(t)=0$$

$$for\quad 0<t\le T,\quad y(t)=\int_0^t \tau d\tau=\frac{1}{2}\tau^2\Big|_0^t=\frac{1}{2}t^2$$

$$for\quad T<t\le 2T,\quad y(t)=\int_{t-T}^t \tau d\tau=\frac{1}{2}\tau^2\Big|_{t-T}^{t}$$

$$=\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{2}(t-T)^2=\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{2}T^2+Tt$$

$$=Tt-\frac{1}{2}T^2$$



$$for\quad 2T<t\le 3T,\quad y(t)=\int_{t-T}^{2T}\tau d\tau=\frac{1}{2}\tau^2\Big|_{t-T}^{2T}=2T^2-\frac{1}{2}(t-T)^2$$

$$=2T^2-\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{2}T^2+Tt=-\frac{1}{2}t^2+Tt+\frac{3}{2}T^2$$

$$for\quad t>3T,\quad y(t)=0$$

http://maleki.semnan.ac.ir

دکتر علی مالکی

$$\Rightarrow y(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{1}{2}t^2 & 0 < t \leq T \\ Tt - \frac{1}{2}t^2 & \mathrm{T} < t \leq 2T \\ -\frac{1}{2}t^2 + Tt + \frac{3}{2}T^2 & 2\mathrm{T} < t \leq 3T \\ 0 & t > 3T \end{cases}$$

مثال ۹: کانولوشن پله واحد و پله واحد

نشان دهید $u(t) * u(t) = tu(t) = r(t)$.

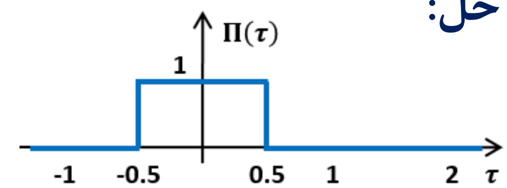
حل:

$$u(t) * u(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau)u(t-\tau)d\tau = \int_{0}^{\infty} u(t-\tau)d\tau = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t & t \geq 0 \end{cases} = t\,u(t) = r(t)$$

مثال ۱۰: کانولوشن سیگنال پنجره و سیگنال پنجره

نشان دهید $\Pi(t) * \Pi(t) = \Lambda(t)$ که در آن $\Pi(t)$ نشانگر سیگنال پنجره و $\Lambda(t)$ نشانگر سیگنال مثلث است.

حل:

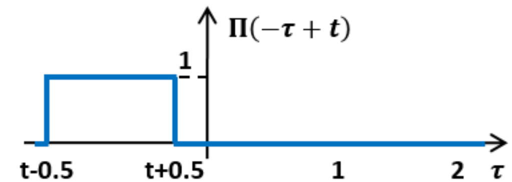


$$\Pi(t) * \Pi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \Pi(\tau)\, \Pi(t-\tau)\, d\tau$$

$$for \quad t \le -1, \qquad y(t) = 0$$

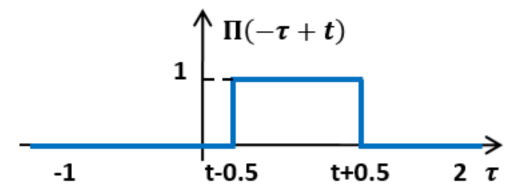
$$for \quad -1 < t \le 0, \quad y(t) = \int_{-\frac{1}{2}}^{t+\frac{1}{2}} d\tau \; = t + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \; = t+1$$

$-1 \le t \le 0$



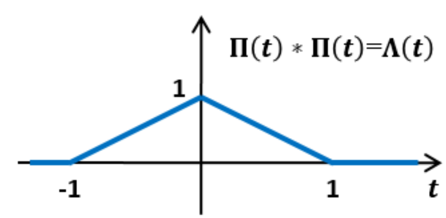
$$for \quad 0 < t \le 1, \quad y(t) = \int_{t-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} d\tau \; = \frac{1}{2} - t + \frac{1}{2} \; = -t+1$$

$0 \le t \le 1$



$$for \quad t > 1, \qquad y(t) = 0$$

$$\Rightarrow \Pi(t) * \Pi(t) = \begin{cases} 0 & t \le -1 \\ t+1 & -1 < t \le 0 \\ -t+1 & 0 < t \le 1 \\ 0 & t > 1 \end{cases}$$



$$\Rightarrow \Pi(t) * \Pi(t) = \Lambda(t)$$

مثال ۱۱: انتگرال کانولوشن

سیستمی LTI با پاسخ ضربه‌ی $h(t)$ توصیف شده است. پاسخ سیستم را به ورودی $x(t)$ داده شده به دست آورید.

$$h(t) = 2u(t+1) - 4u(t-1) + 2u(t-3)$$

$$x(t) = u(t-1) - u(t-3)$$

حل: روش تحلیلی

$$y(t) = x(t) * h(t) = \{u(t-1) - u(t-3)\} * \{2u(t+1) - 4u(t-1) + 2u(t-3)\}$$

$$= 2u(t-1) * u(t+1) - 4u(t-1) * u(t-1) + 2u(t-1) * u(t-3)$$
$$-2u(t-3) * u(t+1) + 4u(t-3) * u(t-1) - 2u(t-3) * u(t-3)$$

$$= 2r(t) - 4r(t-2) + 2r(t-4) - 2r(t-2) + 4r(t-4) - 2r(t-6)$$

$$= 2r(t) - 6r(t-2) + 6r(t-4) - 2r(t-6)$$

مثال ۱۲: انتگرال کانولوشن

سیستمی LTI با پاسخ ضربه $h(t)=u(t)$ توصیف شده است. پاسخ این سیستم را به سیگنال ورودی $x(t)=e^{-\alpha t}u(t)$ به دست آورید.

حل:

$$y(t)=x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\alpha\tau}u(\tau)u(t-\tau)d\tau$$

$$\Rightarrow y(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ \int_0^t e^{-\alpha\tau}d\tau & t\geq 0\end{cases}$$

$$\int_0^t e^{-\alpha\tau}d\tau=\frac{-1}{\alpha}e^{-\alpha\tau}\Big|_0^t=\frac{1}{\alpha}(1-e^{-\alpha t})$$

$$\Rightarrow y(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ \frac{1}{\alpha}(1-e^{-\alpha t}) & t\geq 0\end{cases}$$

$$\Rightarrow y(t)=\frac{1}{\alpha}(1-e^{-\alpha t})u(t)$$

مثال ۱۳: انتگرال کانولوشن

سیستمی LTI با پاسخ ضربه‌ی $h(t) = u(t-3)$ توصیف شده است. پاسخ این سیستم را به سیگنال ورودی $x(t) = e^{2t}u(-t)$ به دست آورید.

حل:

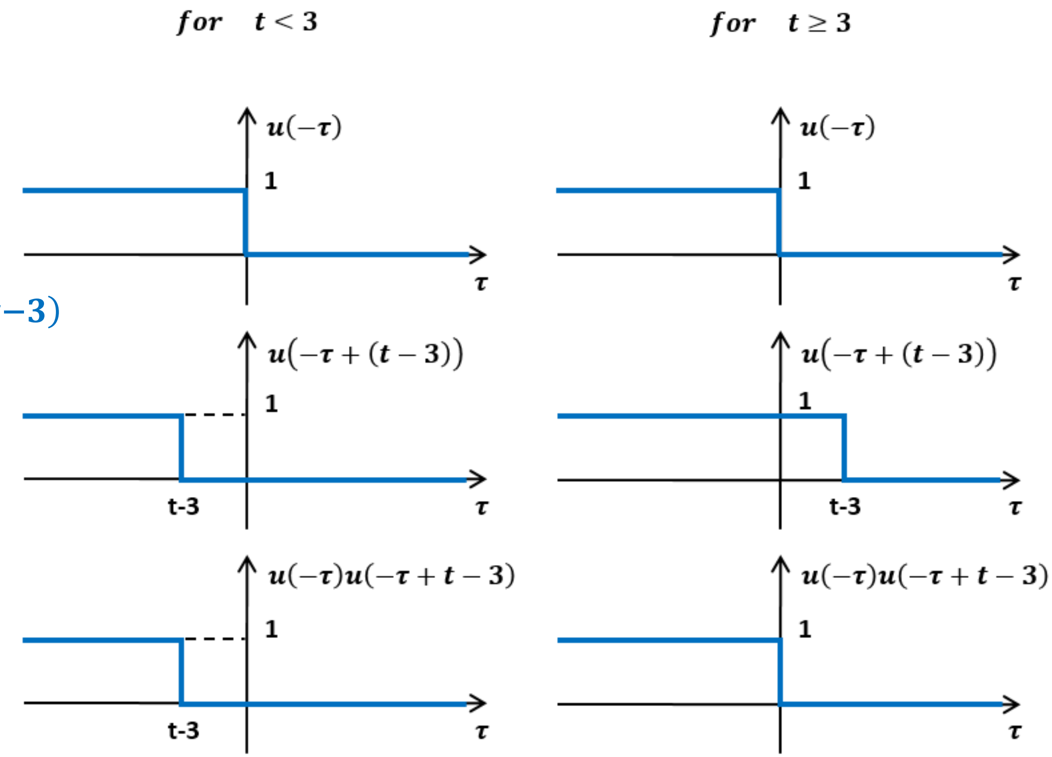
$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\tau}u(-\tau)u(t-\tau-3)d\tau$$

$$\Rightarrow y(t) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{t-3} e^{2\tau}d\tau & t<3 \\ \int_{-\infty}^{0} e^{2\tau}d\tau & t \geq 3 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{t-3} e^{2\tau}d\tau = \frac{1}{2}e^{2\tau}\Big|_{-\infty}^{t-3} = \frac{1}{2}e^{2(t-3)}$$

$$\int_{-\infty}^{0} e^{2\tau}d\tau = \frac{1}{2}e^{2\tau}\Big|_{-\infty}^{0} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow y(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{2(t-3)} & t<3 \\ \frac{1}{2} & t \geq 3 \end{cases}$$



نکته: انتگرال کانولوشن با یک سیگنال متناوب

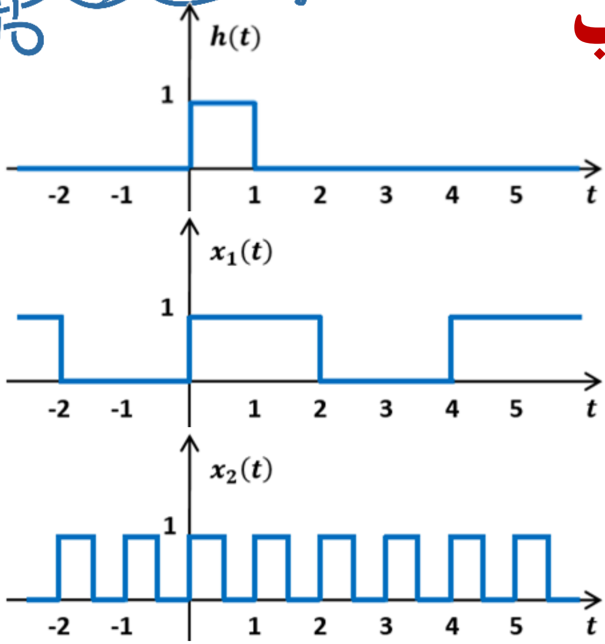
اگر سیگنالی با یک سیگنال متناوب کانوالو گردد، حاصل کانولوشن در صورت کران‌دار بودن، سیگنالی متناوب با همان دوره‌ی تناوب خواهد بود. از این‌رو، می‌توانیم انتگرال کانولوشن را تنها برای یک دوره‌ی تناوب محاسبه نموده و الگوی حاصل را با همان دوره تناوب تکرار کنیم.

مثال ۱۴: انتگرال کانولوشن با یک سیگنال متناوب

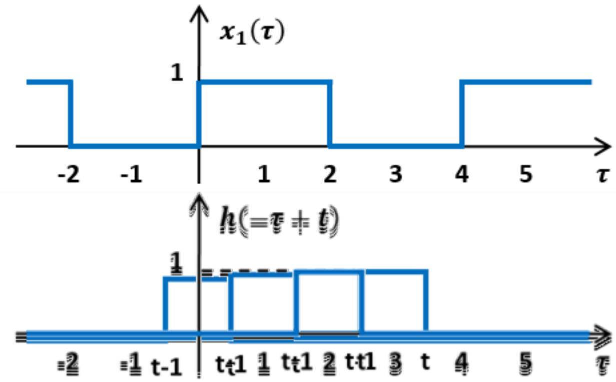
سیستمی LTI با پاسخ ضربه‌ی $h(t)$ توصیف شده است.

الف: پاسخ این سیستم را به ورودی $x_1(t)$ به دست آورید.

ب: پاسخ این سیستم را به ورودی $x_2(t)$ به دست آورید.



حل الف: از آنجا که $x_1(t)$ با دوره‌ی تناوب ۴ متناوب است $x_1(t) * h(t)$ نیز با دوره‌ی تناوب ۴ متناوب خواهد بود.



$$y_1(t) = x_1(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\tau) h(t-\tau) d\tau$$

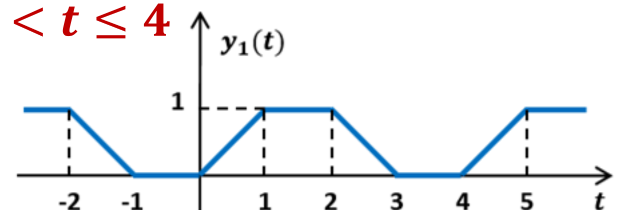
$$0 < t \le 1, \quad y_1(t) = \int_0^t d\tau = t$$

$$1 < t \le 2, \quad y_1(t) = \int_{t-1}^t d\tau = 1$$

$$2 < t \le 3, \quad y_1(t) = \int_{t-1}^2 d\tau = 3 - t$$

$$3 < t \le 4, \quad y_1(t) = 0$$

$$\Rightarrow y_1(t) = \begin{cases} t & 0 < t \le 1 \\ 1 & 1 < t \le 2 \\ -t+3 & 2 < t \le 3 \\ 0 & 3 < t \le 4 \end{cases} \quad ; \; y_1(t) = y_1(t+4)$$

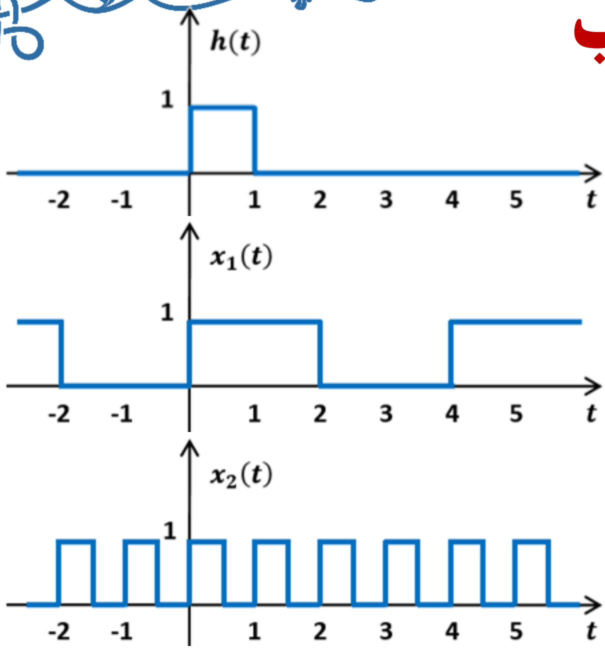


مثال ۱۴: انتگرال کانولوشن با یک سیگنال متناوب

سیستمی LTI با پاسخ ضربه‌ی $h(t)$ توصیف شده است.

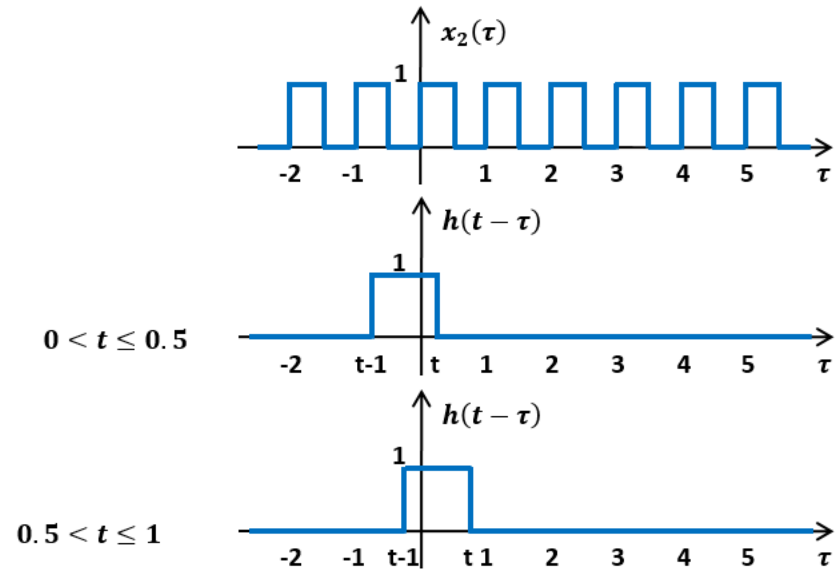
الف: پاسخ این سیستم را به ورودی $x_1(t)$ به دست آورید.

ب: پاسخ این سیستم را به ورودی $x_2(t)$به دست آورید.



حل ب: از آنجا که $x_2(t)$ با دوره‌ی تناوب ۱ متناوب است

$x_2(t) * h(t)$ نیز با دوره‌ی تناوب ۱ متناوب خواهد بود.



$$y_2(t) = x_2(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_2(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

$$0 < t \leq 0.5\,, \quad y_2(t) = \int_{t-1}^{-0.5} d\tau + \int_{0}^{t} d\tau$$

$$= -0.5 - t + 1 + t = 0.5$$

$$0.5 < t \leq 1\,, \quad y_2(t) = \int_{0}^{0.5} d\tau = 0.5$$

$$\Rightarrow y_2(t) = 0.5$$

فهرست مطالب

ویژگی‌های کانولوشن

«ویژگی جابجایی کانولوشن»:

$$x(t) * h(t) = h(t) * x(t)$$

$$x[n] * h[n] = h[n] * x[n]$$

«ویژگی شرکت‌پذیری کانولوشن»:

$$\left(x(t) * h_1(t)\right) * h_2(t) = x(t) * \left(h_1(t) * h_2(t)\right)$$

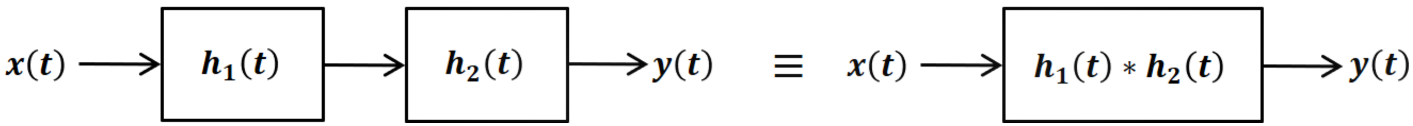
$$(x[n] * h_1[n]) * h_2[n] = x[n] * (h_1[n] * h_2[n])$$

«ویژگی پخشی کانولوشن»:

$$x(t) * \left(h_1(t) + h_2(t)\right) = x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t)$$

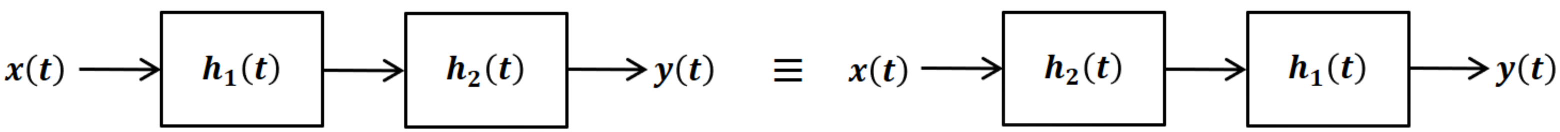
$$x[n] * (h_1[n] + h_2[n]) = x[n] * h_1[n] + x[n] * h_2[n]$$

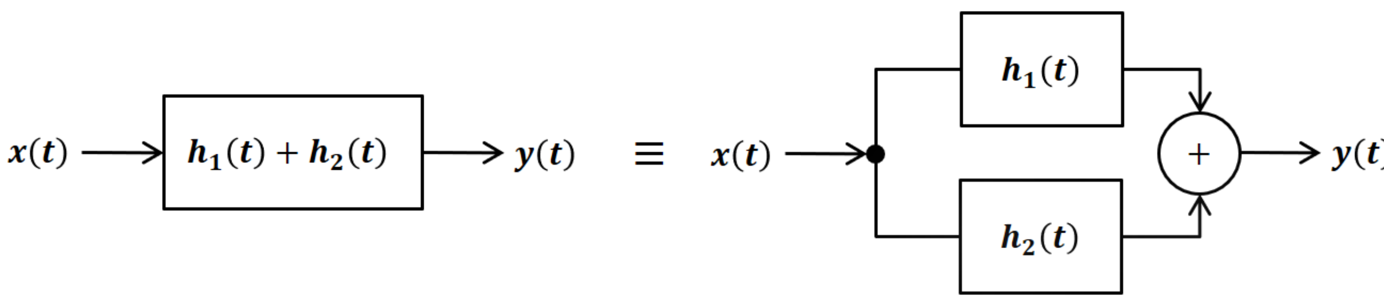
نکات کاربردی حاصل از ویژگی‌های کانولوشن



$$
\begin{aligned}
\big(x(t) * h_1(t)\big) * h_2(t) &= x(t) * \big(h_1(t) * h_2(t)\big) \\
&= x(t) * \big(h_2(t) * h_1(t)\big) \\
&= \big(x(t) * h_2(t)\big) * h_1(t)
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow \big(x(t) * h_1(t)\big) * h_2(t) = \big(x(t) * h_2(t)\big) * h_1(t)
$$





http://maleki.semnan.ac.ir

دکتر علی مالکی

نکته: دستکاری‌های سیستم‌های LTI سری و موازی

سیستم‌های LTI سری را می‌توان جابجا نمود.

ترکیب سری دو سیستم LTI با پاسخ ضربه‌های $h_1(t)$ و $h_2(t)$ را می‌توان با سیستمی با پاسخ ضربه‌ی $h_1(t) * h_2(t)$ جایگزین کرد. برای بیش از دو سیستم نیز این قاعده قابل تعمیم است.

ترکیب موازی دو سیستم LTI با پاسخ ضربه‌های $h_1(t)$ و $h_2(t)$ را می‌توان با سیستمی با پاسخ ضربه‌ی $h_1(t) + h_2(t)$ جایگزین کرد. این قاعده برای سه یا بیشتر سیستم LTI موازی نیز قابل تعمیم است.

مثال ۱۵: جابجایی سیستم‌های LTI سری

اتصال سیستم‌های LTI شکل زیر را در نظر بگیرید. پاسخ سیستم به ورودی داده شده را به دست آورید.

$$h_1[n] = \cos n + \sin n$$

$$h_2[n] = \delta[n] - \frac{1}{2}\delta[n-1]$$

$$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

$$x[n] \longrightarrow \boxed{h_1[n]} \longrightarrow \boxed{h_2[n]} \longrightarrow y[n]$$

حل: می‌دانیم ترتیب سیستم‌های LTI سری را می‌توان جابجا نمود.

$$x[n] \longrightarrow \boxed{h_2[n]} \longrightarrow \boxed{h_1[n]} \longrightarrow y[n] \qquad \Rightarrow y[n] = (x[n] * h_2[n]) * h_1[n]$$

$$x[n] * h_2[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] * \left(\delta[n] - \frac{1}{2}\delta[n-1]\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[n-1]$$

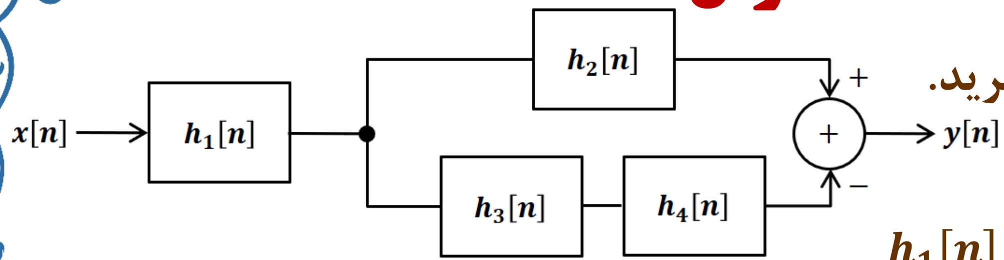
$$= \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n-1] = \left(\frac{1}{2}\right)^n (u[n] - u[n-1])$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^n \delta[n] = \delta[n]$$

$$\Rightarrow y[n] = (x[n] * h_2[n]) * h_1[n] = \delta[n] * (\cos n + \sin n) = \cos n + \sin n$$

تست ۱: آزمون کارشناسی ارشد ۱۳۸۰، سوال ۱۲

اتصال سیستم‌های LTI شکل زیر را در نظر بگیرید.



پاسخ ضربه $h[n]$ سیستم کل با این فرض که

$$h_1[n]=\frac{1}{2}\delta[n+1]+\frac{1}{4}\delta[n]+\frac{1}{2}\delta[n-1]$$

$$h_3[n]=h_2[n]=(n+1)u[n]$$

$$h_4[n]=\delta[n-2]$$

باشد کدام است؟

الف) $u[n]-\frac{1}{2}\delta[n]+\frac{1}{2}\delta[n-1]+u[n-2]$

ب) $\delta[n]-\frac{1}{2}u[n]+\delta[n-2]+\frac{5}{2}u[n-3]$

ج) $\frac{1}{2}\delta[n]+\frac{5}{4}\delta[n-1]+2\delta[n-2]+\frac{5}{2}u[n-3]$

د) $\frac{1}{2}\delta[n]+\frac{1}{2}u[n-1]-\frac{1}{2}u[n-2]+\frac{5}{2}u[n-3]$

حل:

$$h[n]=h_1[n]*(h_2[n]-h_3[n]*h_4[n])$$

$$h_3[n]*h_4[n]=\big((n+1)u[n]\big)*\delta[n-2]$$

$$=(n-1)u[n-2]$$

$$\Rightarrow h_2[n]-(h_3[n]*h_4[n])$$

$$=(n+1)u[n]-(n-1)u[n-2]$$

$$=(n+1)\delta[n]+(n+1)\delta[n-1]$$

$$+(n+1-n+1)u[n-2]$$

$$=\delta[n]+2\delta[n-1]+2u[n-2]$$

$$=\delta[n]+2u[n-1]$$

$$h_1[n]*\big(h_2[n]-(h_3[n]*h_4[n])\big)=\left(\frac{1}{2}\delta[n+1]+\frac{1}{4}\delta[n]+\frac{1}{2}\delta[n-1]\right)*(\delta[n]+2u[n-1])$$

$$=\frac{1}{2}\delta[n+1]+\frac{1}{4}\delta[n]+\frac{1}{2}\delta[n-1]+u[n]+\frac{1}{2}u[n-1]+u[n-2]$$

$$=\frac{1}{2}\delta[n+1]+\frac{5}{4}\delta[n]+2\delta[n-1]+\frac{5}{2}u[n-2]$$

پاسخ به دست آمده شبیه گزینه ج است.

فهرست مطالب

- جمع کانولوشن
- انتگرال کانولوشن
- ویژگی‌های کانولوشن
- نکات کانولوشن
- ارزیابی ویژگی‌های سیستم‌های LTI توصیف شده با پاسخ ضربه
- پاسخ پله‌ی سیستم‌های LTI
- سیستم‌های توصیف شده با معادله دیفرانسیل / دیفرنس
- نمایش نمودار بلوکی
- مثال‌های مروری
- مثال‌های نرم‌افزاری
- تمرین‌های تئوری
- تمرین‌های نرم‌افزاری

نکات کانولوشن

۱- جابجایی زمانی:

$$y(t) = x(t) * h(t) \quad \Rightarrow \; y(t-t_0) = x(t-t_0) * h(t) = x(t) * h(t-t_0)$$

۲- مقیاس زمانی:

$$y(t) = x(t) * h(t) \quad \Rightarrow y(at) = |a| x(at) * h(at)$$

۳- مشتق‌گیری:

$$y(t) = x(t) * h(t) \quad \Rightarrow y'(t) = x'(t) * h(t) = x(t) * h'(t)$$

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t) \quad \Longrightarrow \quad x'(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y'(t)$$

۴- سطح زیر منحنی حاصل کانولوشن:

اگر دو سیگنال در هم کانوالو شوند سطح زیر منحنی سیگنال حاصل برابر با حاصل‌ضرب سطح زیر منحنی دو سیگنال است.

$$y(t) = x(t) * h(t) \quad \Longrightarrow \quad A_y = A_x \cdot A_h$$

۵- کانولوشن دو سیگنال FIR:

اگر دو سیگنال زمان- گسسته‌ی FIR که تعداد محدودی نمونه‌ی غیرصفر دارند با هم کانوالو شوند حاصل، سیگنالی FIR خواهد بود که تنها در محدوده‌ی از مجموع ابتداها تا مجموع انتهاها می‌تواند مقدار غیر صفر داشته باشد.

سیگنالی FIR با ابتدای N_{i1} و انتهای N_{f1}:
$$x_1[n] = 0\,, \qquad n \notin [N_{i1}, N_{f1}]$$

سیگنالی FIR با ابتدای N_{i2} و انتهای N_{f2}:
$$x_2[n] = 0\,, \qquad n \notin [N_{i2}, N_{f2}]$$

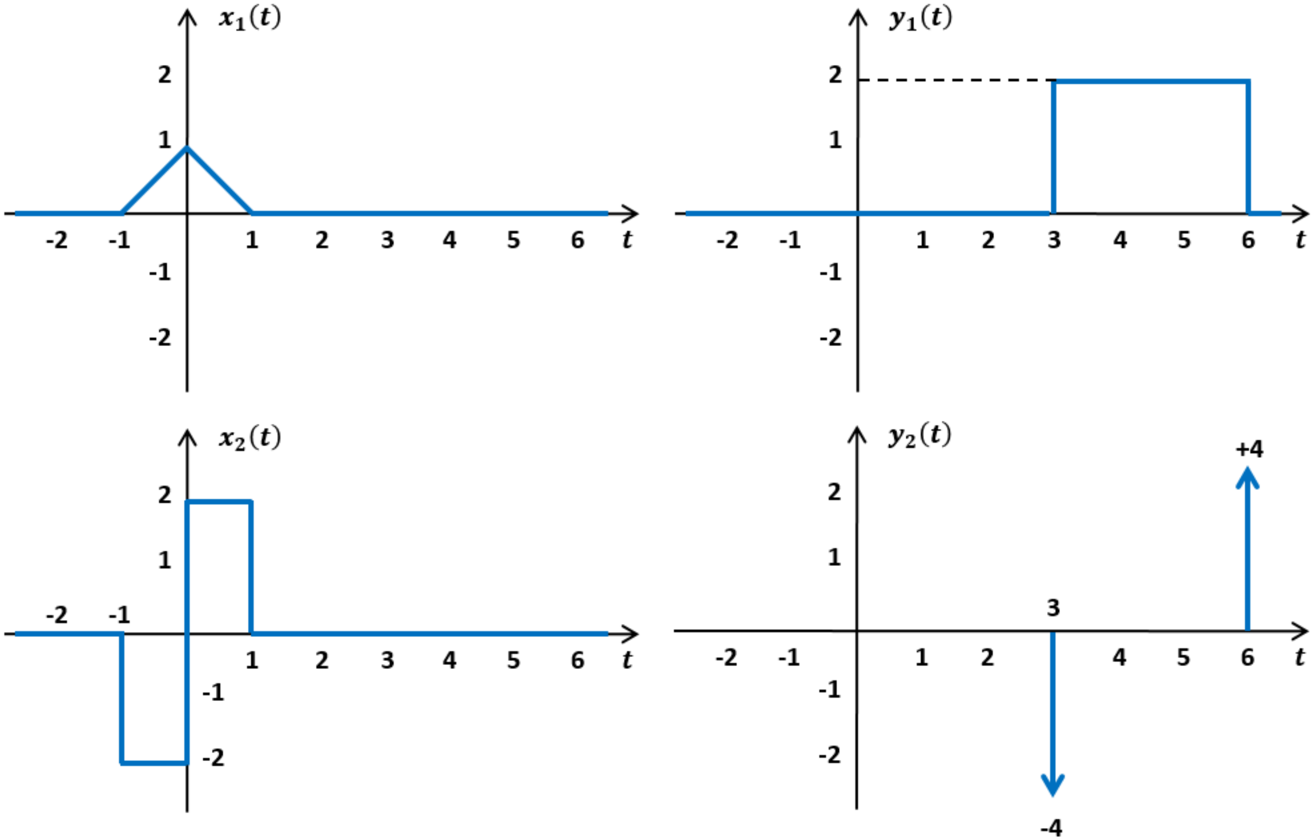
$$\Rightarrow x_1[n] * x_2[n] = 0\,, \qquad n \notin [N_{i1} + N_{i2}, N_{f1} + N_{f2}]$$

به همین شیوه می‌توان محدوده‌ی غیرصفر دو سیگنال زمان- پیوسته با دوره‌ی محدود را تعیین نمود.

$$x_1(t) = 0 \quad for \quad t \notin [t_{i1}, t_{f1}]$$
$$x_2(t) = 0 \quad for \quad t \notin [t_{i2}, t_{f2}]$$
$$\Rightarrow x_1(t) * x_2(t) = 0 \quad for \quad t \notin [t_{i1} + t_{i2}, t_{f1} + t_{f2}]$$

مثال ۱۶: نکات کانولوشن

پاسخ یک سیستم LTI به ورودی $x_1(t)$ برابر $y_1(t)$ است. پاسخ این سیستم را به ورودی $x_2(t)$ به دست آورید.



حل:

$$x_2(t) = -2\frac{dx_1(t)}{dt} \quad \Rightarrow y_2(t) = -2\frac{dy_1(t)}{dt}$$

مثال ۱۷: اثبات نکته‌ی سطح زیر منحنی حاصل کانولوشن

ثابت کنید اگر دو سیگنال در هم کانوالو شوند ($y(t) = x(t) * h(t)$) سطح زیر منحنی سیگنال حاصل برابر با حاصل ضرب سطح زیر منحنی دو سیگنال است ($A_y = A_x \cdot A_h$).

حل:

$$A_y = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \big(x(t) * h(t)\big)dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)dt d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-\tau)dt\, d\tau$$

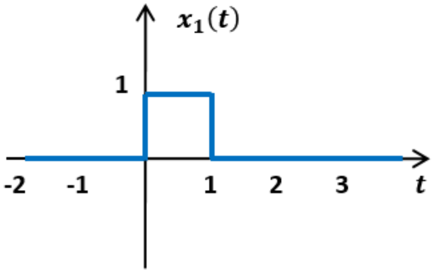
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)A_h d\tau$$

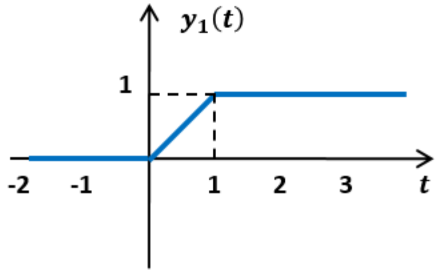
$$= A_h \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)d\tau$$

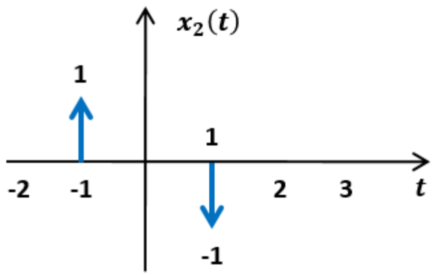
$$= A_x \cdot A_h$$

مثال ۱۸: نکات کانولوشن

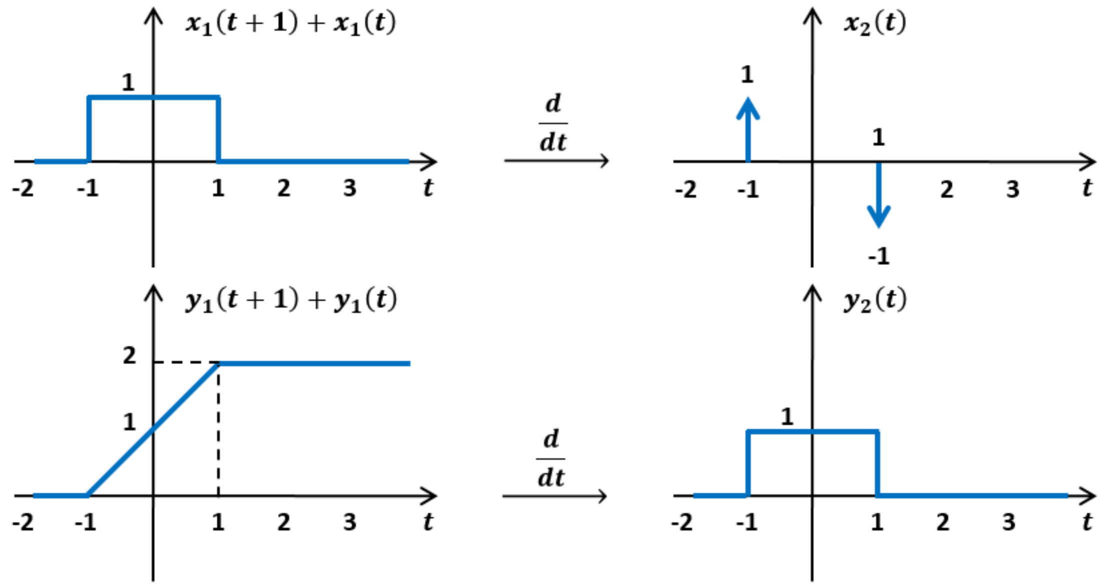
پاسخ یک سیستم LTI به ورودی $x_1(t)$ برابر $y_1(t)$ است. پاسخ این سیستم را به ورودی $x_2(t)$ به دست آورید.







حل:



$$x_2(t) = \frac{d}{dt}\big(x_1(t+1) + x_1(t)\big)$$

$$y_2(t) = \frac{d}{dt}\big(y_1(t+1) + y_1(t)\big)$$

مثال ۱۹: نکات کانولوشن

یک سیستم LTI برای ورودی $x(t) = e^{-5t}u(t)$ دارای پاسخ $y(t) = \sin 5t$ است. پاسخ ضربه‌ی این سیستم را تعیین کنید.

راهنمایی: از رابطه‌ی $y'(t) = x'(t) * h(t)$ استفاده نمایید.

حل:

$$y(t) = x(t) * h(t) \;\Rightarrow\; y'(t) = x'(t) * h(t)$$

$$\Rightarrow 5\cos 5t = \left[-5e^{-5t}u(t) + e^{-5t}\delta(t)\right] * h(t)$$

$$= [-5x(t) + \delta(t)] * h(t)$$

$$= -5x(t) * h(t) + \delta(t) * h(t)$$

$$= -5y(t) + h(t)$$

$$= -5\sin 5t + h(t)$$

$$\Rightarrow\; 5\cos 5t = -5\sin 5t + h(t)$$

$$\Rightarrow\; h(t) = 5(\cos 5t + \sin 5t)$$

فهرست مطالب

- جمع کانولوشن
- انتگرال کانولوشن
- ویژگی‌های کانولوشن
- نکات کانولوشن
- ارزیابی ویژگی‌های سیستم‌های LTI توصیف شده با پاسخ ضربه
- پاسخ پله‌ی سیستم‌های LTI
- سیستم‌های توصیف شده با معادله دیفرانسیل / دیفرنس
- نمایش نمودار بلوکی
- مثال‌های مروری
- مثال‌های نرم‌افزاری
- تمرین‌های تئوری
- تمرین‌های نرم‌افزاری

ارزیابی ویژگی‌های سیستم‌های LTI

سیستم‌های LTI :

- ✓ ویژگی خطی بودن
- ✓ ویژگی استقلال از زمان
- ❖ توصیف با پاسخ ضربه

- ❑ ویژگی حافظه‌دار بودن،
- ❑ ویژگی علی بودن،
- ❑ ویژگی پایداری و
- ❑ ویژگی معکوس‌پذیری.

ویژگی حافظه‌دار بودن

یادآوری تعریف سیستم بدون حافظه:

سیستم بدون حافظه است اگر خروجی آن در هر زمان صرفا به ورودی در همان زمان وابسته باشد.

برای یک سیستم زمان- گسسته داریم:

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]x[n-k]$$

$$= \cdots h[-2]x[n+2] + h[-1]x[n+1] + h[0]x[n] + h[1]x[n-1] + h[2]x[n-2] + \cdots$$

شرط بدون حافظه بودن سیستم LTI :

$$h[n] = 0 \quad for \quad n \neq 0 \quad or \quad h[n] = A\delta[n]$$

$$h(t) = 0 \quad for \quad t \neq 0 \quad or \quad h(t) = A\delta(t)$$

مثال ۲۰: ارزیابی ویژگی بدون حافظه بودن

حافظه‌دار / بدون حافظه بودن سیستم‌های LTI توصیف شده با پاسخ ضربه زیر را ارزیابی نمایید.

الف) $h(t) = 5\,\delta(t)$

ب) $h[n] = 3\,\delta[n] + 12\,\delta[n-1]$

حل الف: بدون حافظه

حل ب: حافظه‌دار

ویژگی علی بودن

یادآوری تعریف سیستم علی:

سیستم علی است اگر خروجی آن در هر زمان، صرفا به ورودی در همان زمان و زمان‌های قبل وابسته باشد.

برای یک سیستم زمان- گسسته داریم:

$$y[n]=x[n]*h[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}h[k]x[n-k]$$

$$=\cdots h[-2]x[n+2]+h[-1]x[n+1]+h[0]x[n]+\ h[1]x[n-1]+h[2]x[n-2]+\cdots$$

شرط علی بودن سیستم LTI:

$$h[n]=0 \quad for \quad n<0$$

$$h(t)=0 \quad for \quad t<0$$

مثال ۲۱: ارزیابی ویژگی علی بودن

علی بودن سیستم‌های LTI توصیف شده با پاسخ ضربه زیر را ارزیابی نمایید.

الف) $h(t) = e^{-2t}u(t)$

ب) $h(t) = e^{4t}u(-t)$

ج) $h(t) = e^{4t}u(t)$

د) $h[n] = \delta[n] - \delta[n-1]$

ه) $h[n] = (n+2)(n+1)u[n+2]$

حل الف: علی

حل ب: غیرعلی

حل ج: علی

حل د: علی

حل ه: علی

$$h[n] = (n+2)(n+1)u[n+2]$$
$$= (n+2)(n+1)(\delta[n+2] + \delta[n+1] + u[n])$$
$$= (n+2)(n+1)\delta[n+2] + (n+2)(n+1)\delta[n+1] + (n+2)(n+1)u[n]$$
$$= (n+2)(n+1)u[n]$$

ویژگی پایداری

یادآوری تعریف سیستم پایدار:

سیستم پایدار است اگر خروجی آن به هر ورودی کران‌دار، همواره کران‌دار باشد.

شرط پایداری: $\forall \quad x[n], \qquad |x[n]| < M \quad \Rightarrow \quad |y[n]| < \infty$

برای یک سیستم زمان- گسسته با فرض $|x[n]| < M < \infty$ داریم:

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]x[n-k]$$

$$|y[n]| = \left|\sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]x[n-k]\right| \le \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[k]x[n-k]| = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[k]||x[n-k]| < M \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[k]|$$

شرط پایداری سیستم LTI :

شرط لازم و کافی برای پایداری سیستم LTI زمان- گسسته آن است که پاسخ ضربه «مطلق جمع‌پذیر» باشد.

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[k]| < \infty$$

شرط لازم و کافی برای پایداری سیستم LTI زمان- پیوسته آن است که پاسخ ضربه «مطلق انتگرال‌پذیر» باشد.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)| d\tau < \infty$$

مثال ۲۲: ارزیابی ویژگی پایداری

پایداری سیستم‌های LTI توصیف شده با پاسخ ضربه زیر را ارزیابی کنید.

الف) $h[n] = 10\,\delta[n-10]$

ب) $h[n] = u[n]$

ج) $h[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$

د) $h[n] = 5^n\, u[-n-1]$

ه) $h(t) = e^{-4t}u(-t)$

و) $h(t) = e^{2t}u(-t)$

حل الف: پایدار
$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[k]| = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |10\,\delta[k-10]| = 10$$

حل ب: ناپایدار
$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[k]| = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |u[k]| = \sum_{k=0}^{\infty} 1 \to \infty$$

حل ج: پایدار
$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left|\left(\frac{1}{4}\right)^k u[k]\right| = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$$

حل د: پایدار
$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[k]| = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left|5^k\, u[-k-1]\right| = \sum_{k=-\infty}^{-1} 5^k = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^k = \frac{\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}} = \frac{1}{4}$$

حل ه: ناپایدار
$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)|d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} \left|e^{-4\tau}u(-\tau)\right|d\tau = \int_{-\infty}^{0} e^{-4\tau}d\tau = -\frac{1}{4}e^{-4\tau}\Big|_{-\infty}^{0} \to \infty$$

حل و: پایدار
$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)|d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\tau}u(-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{0} e^{2\tau}d\tau = \frac{1}{2}e^{2\tau}\Big|_{-\infty}^{0} = \frac{1}{2}$$

ویژگی معکوس‌پذیری

اگر یک سیستم LTI معکوس‌پذیر باشد معکوس آن نیز LTI خواهد بود. چنانچه سیستم معکوس با سیستم اصلی سری شود پاسخ نهایی برابر ورودی خواهد بود.

$$x[n] \longrightarrow \boxed{h[n]} \xrightarrow{y[n]} \boxed{h_i[n]} \longrightarrow x[n]$$

$$x[n] * h[n] * h_i[n] = x[n] \quad \Rightarrow \quad h[n] * h_i[n] = \delta[n]$$

$$x(t) * h(t) * h_i(t) = x(t) \quad \Rightarrow \quad h(t) * h_i(t) = \delta(t)$$

مثال ۲۳: ارزیابی ویژگی معکوس‌پذیری

معکوس‌پذیری سیستم‌های LTI توصیف شده با پاسخ ضربه زیر را ارزیابی کنید.

الف) $h(t) = \delta(t - t_0)$

ب) $h[n] = u[n]$

ج) $h[n] = \delta[n] - \delta[n-1]$

حل الف:

سیستم معکوس‌پذیر بوده و پاسخ ضربه سیستم معکوس $h_i(t) = \delta(t + t_0)$ می‌باشد.

$$h(t) * h_i(t) = \delta(t - t_0) * \delta(t + t_0) = \delta(t)$$

حل ب:

سیستم معکوس‌پذیر بوده و پاسخ ضربه سیستم معکوس $h_i[n] = \delta[n] - \delta[n-1]$ می‌باشد.

$$h[n] * h_i[n] = u[n] * (\delta[n] - \delta[n-1]) = u[n] - u[n-1] = \delta[n]$$

حل ج:

سیستم معکوس‌ناپذیر است.

فهرست مطالب

پاسخ پله‌ی سیستم‌های LTI :

برای سیستم‌های LTI،

پاسخ ضربه، سیستم را توصیف نموده و با در اختیار داشتن آن می‌توان پاسخ سیستم به هر ورودی دلخواه را به دست آورد.

با پاسخ ضربه می‌توان ویژگی‌های حافظه‌دار بودن، علی بودن، پایداری و معکوس‌پذیری ارزیابی نمود.

بین ضربه واحد و پله واحد رابطه‌ای وجود دارد به نحوی که هر کدام را می‌توان توسط دیگری توصیف کرد.

بر این اساس، آیا پاسخ پله هم به اندازه‌ی پاسخ ضربه در توصیف و ارزیابی سیستم کارآمد است؟

پاسخ پله‌ی سیستم‌های LTI :

$$u[n]=\sum_{k=0}^{\infty}\delta[n-k]=\sum_{k=-\infty}^{n}\delta[k]$$

$$s[n]=u[n]*h[n]=h[n]*u[n]=h[n]*\sum_{k=0}^{\infty}\delta[n-k]=\sum_{k=0}^{\infty}h[n]*\delta[n-k]$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}h[n-k]$$

$$\Rightarrow s[n]=\sum_{k=0}^{\infty}h[n-k]$$

$$u(t)=\int_{0}^{\infty}\delta(t-\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)d\tau$$

$$s(t)=u(t)*h(t)=h(t)*u(t)=h(t)*\int_{0}^{\infty}\delta(t-\tau)d\tau=\int_{0}^{\infty}h(t)*\delta(t-\tau)d\tau$$

$$=\int_{0}^{\infty}h(t-\tau)d\tau$$

$$\Rightarrow s(t)=\int_{0}^{\infty}h(t-\tau)d\tau$$

جمع‌بندی روابط پاسخ پله و پاسخ ضربه

$$s(t) = \int_0^{\infty} h(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{t} h(\tau)d\tau$$

$$h(t) = \frac{d}{dt}s(t)$$

$$s[n] = \sum_{k=0}^{\infty} h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{n} h[n]$$

$$h[n] = s[n] - s[n-1]$$

$$y(t) = x'(t) * s(t)$$

$$y[n] = (x[n] - x[n-1]) * s[n]$$

مثال ۲۴: ارتباط پاسخ پله و پاسخ ضربه سیستم LTI

پاسخ پله یک سیستم LTI زمان- گسسته داده شده است. پاسخ ضربه‌ی سیستم را تعیین نمایید.

$$s[n] = \frac{1-(-a)^{n+1}}{1+a}u[n]$$

حل:

$$h[n] = s[n] - s[n-1]$$

$$= \frac{1-(-a)^{n+1}}{1+a}u[n] - \frac{1-(-a)^{n}}{1+a}u[n-1]$$

$$= \frac{1-(-a)^{n+1}}{1+a}u[n] - \frac{1-(-a)^{n}}{1+a}u[n]$$

$$= \frac{1-(-a)^{n+1}-1+(-a)^{n}}{1+a}u[n]$$

$$= \frac{(-a)^{n}(a+1)}{1+a}u[n]$$

$$= (-a)^{n}u[n] \qquad \Rightarrow \; h[n] = (-a)^{n}u[n]$$

مثال ۲۵: بررسی ویژگی‌های سیستم‌های LTI با استفاده از پاسخ پله:

پاسخ پله‌ی سیستمی LTI داده شده است. این سیستم دارای کدام یک از ویژگی‌های زیر می‌باشد.

الف: بدون حافظه بودن؛ ب: معکوس‌پذیری؛

ج: علی بودن؛ د: پایداری.

$$s[n]=\left[1-\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right]u[n]$$

حل:

$$h[n]=s[n]-s[n-1]=\left[1-\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right]u[n]-\left[1-\left(-\frac{1}{3}\right)^{n}\right]u[n-1]$$

$$=\left[1-\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right]u[n]-\left[1-\left(-\frac{1}{3}\right)^{n}\right]u[n]=\left[1-\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1}-1+\left(-\frac{1}{3}\right)^{n}\right]u[n]$$

$$=\left(-\frac{1}{3}\right)^{n}\left(-\left(-\frac{1}{3}\right)+1\right)u[n]=\frac{4}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n}u[n]\qquad\Rightarrow h[n]=\frac{4}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n}u[n]$$

حل الف: سیستم حافظه‌دار است.

حل ب: سیستم معکوس‌پذیر است. پاسخ ضربه‌ی سیستم معکوس: $h_i[n]=\frac{3}{4}\left(\delta[n]+\frac{1}{3}\delta[n-1]\right)$

وارسی پاسخ ضربه سیستم وارون:

$$h[n] * h_i[n] = \left(\frac{4}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n]\right) * \left(\frac{3}{4}\left(\delta[n] + \frac{1}{3}\delta[n-1]\right)\right)$$

$$= \left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n] + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} u[n-1]$$

$$= \left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n] - \left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n-1]$$

$$= \left(-\frac{1}{3}\right)^n (u[n] - u[n-1])$$

$$= \left(-\frac{1}{3}\right)^n \delta[n]$$

$$= \delta[n]$$

مثال ۲۵: بررسی ویژگی‌های سیستم‌های LTI با استفاده از پاسخ پله:

پاسخ پله‌ی سیستمی LTI داده شده است. این سیستم دارای کدام یک از ویژگی‌های زیر می‌باشد.

$$s[n]=\left[1-\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right]u[n]$$

الف: بدون حافظه بودن؛ ب: معکوس‌پذیری؛

ج: علی بودن؛ د: پایداری.

حل:

$$h[n]=s[n]-s[n-1]=\left[1-\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right]u[n]-\left[1-\left(-\frac{1}{3}\right)^{n}\right]u[n-1]$$

$$=\left[1-\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right]u[n]-\left[1-\left(-\frac{1}{3}\right)^{n}\right]u[n]=\left[1-\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1}-1+\left(-\frac{1}{3}\right)^{n}\right]u[n]$$

$$=\left(-\frac{1}{3}\right)^{n}\left(-\left(-\frac{1}{3}\right)+1\right)u[n]=\frac{4}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n}u[n]\quad\Rightarrow h[n]=\frac{4}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n}u[n]$$

حل الف: سیستم حافظه‌دار است.

حل ب: سیستم معکوس‌پذیر است. پاسخ ضربه‌ی سیستم معکوس: $h_i[n]=\frac{3}{4}\left(\delta[n]+\frac{1}{3}\delta[n-1]\right)$

حل ج: سیستم علی است.

حل د: سیستم پایدار است.

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}|h[k]|=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left|\frac{4}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)^{k}u[k]\right|=\frac{4}{3}\sum_{k=0}^{\infty}\left|\left(-\frac{1}{3}\right)^{k}\right|=\frac{4}{3}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{k}=\frac{4}{3}\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=2$$

فهرست مطالب

معرفی با مثال:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2y(t)}{dt^2} + 3\dfrac{dy(t)}{dt} - y(t) = \dfrac{dx(t)}{dt} - 3x(t) \\ \left.\dfrac{dy(t)}{dt}\right|_{t=0} = 1 \quad , \qquad \left.y(t)\right|_{t=0} = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y[n] - 2y[n-1] + 10y[n-2] = x[n] - 12x[n-1] \\ y[0] = 1 \quad , \qquad y[1] = 2 \end{cases}$$

سیستم‌های توصیف شده با معادله دیفرانسیل

فرم عمومی معادله دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت:

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k} \\ y(t)\Big|_{t=t_0}, \quad \dfrac{dy(t)}{dt}\Big|_{t=t_0}, \quad \dots, \quad \dfrac{d^{(N-1)}y(t)}{dt^{(N-1)}}\Big|_{t=t_0} \end{cases}$$

دکتر علی مالکی

مثال ۲۶: سیستم توصیف شده با معادله دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت

سیستمی با معادله دیفرانسیل زیر توصیف شده است. پاسخ این سیستم را به سیگنال ورودی $x(t) = u(t+1)$ بیابید.

$$\begin{cases} \dfrac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

حل:

$$for \;\; t \geq -1, \qquad x(t) = 1 \;\Rightarrow \frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 1$$

$$m + 2 = 0 \;\Rightarrow\; m = -2 \;\Rightarrow\; y_h(t) = Ae^{-2t}$$

$$y_p(t) = Y \;\Rightarrow \frac{dY}{dt} + 2Y = 1 \;\Rightarrow Y = \frac{1}{2} \Rightarrow y_p(t) = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow y(t) = y_h(t) + y_p(t) = Ae^{-2t} + \frac{1}{2} \qquad y(0) = 0 \;\Rightarrow\; Ae^{-2(0)} + \frac{1}{2} = 0 \;\Rightarrow A = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow y(t) = -\frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{1}{2} \qquad for \quad t \geq -1 \qquad \Rightarrow y(-1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{2}$$

$$for \quad t < -1, \qquad x(t) = 0 \;\Rightarrow\; \frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 0$$

$$m + 2 = 0 \Rightarrow\; m = -2 \;\Rightarrow y_h(t) = Be^{-2t} \qquad y_p(t) = 0 \qquad y(t) = y_h(t) + y_p(t) = Be^{-2t}$$

$$y(-1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{2} \;\Rightarrow\; Be^{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{2} \;\Rightarrow B = \frac{1}{2}e^{-2} - \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow y(t) = \left(\frac{1}{2}e^{-2} - \frac{1}{2}\right)e^{-2t} \qquad for \quad t < -1 \Rightarrow y(t) = \begin{cases} \left(\dfrac{1}{2}e^{-2} - \dfrac{1}{2}\right)e^{-2t} & t < -1 \\ -\dfrac{1}{2}e^{-2t} + \dfrac{1}{2} & t \geq -1 \end{cases}$$

سیستم‌های توصیف شده با معادله دیفرنس

فرم عمومی معادله دیفرنس خطی با ضرایب ثابت:

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] \\ y[n-n_0], y[n-(n_0+1)], \cdots, y[n-(n_0+N-1)] \end{cases}$$

سیستم‌های زمان- گسسته‌ی توصیف شده با معادله دیفرنس (تفاضلی) خطی با ضرایب ثابت را بر اساس طول پاسخ ضربه‌ی سیستم می‌توان به دو دسته تقسیم کرد:

سیستم‌های با طول پاسخ ضربه‌ی محدود (FIR):

اگر $N=0$ باشد،

- نشانگر یک معادله‌ی غیربازگشتی است؛
- سیستمی FIR را توصیف می‌کند.

$$for\ N=0, \quad y[n] = \frac{1}{a_0}\sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

$$h[n] = \begin{cases} \frac{b_n}{a_0} & 0 \le n \le M \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

سیستم‌های با طول پاسخ ضربه‌ی نامحدود (IIR):

اگر $N \neq 0$ باشد،

- نشانگر یک معادله‌ی بازگشتی است؛
- سیستمی IIR را توصیف می‌کند.
- معادله دیفرنس نیازمند شرط‌های کمکی است.

$$for\ N \neq 0,$$

$$y[n] = \frac{1}{a_0}\left\{\sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] - \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k]\right\}$$

مثال ۲۷: سیستم توصیف شده با معادله دیفرنس خطی با ضرایب ثابت

سیستمی با معادله دیفرنس بازگشتی زیر توصیف شده است. پاسخ این سیستم را به سیگنال ورودی $x[n] = k\delta[n]$ به دست آورید.

$$\begin{cases} y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = x[n] \\ y[-1] = a \end{cases}$$

حل:

$$y[n-1] = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} y[n] - \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} x[n]$$

$$y[-2] = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} y[-1] + \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} x[-1] = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} a$$

$$y[-3] = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} y[-2] + \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} x[-2] = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} a$$

$$\vdots$$

$$\Rightarrow y[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} a \qquad for \qquad n \le -1$$

$$y[n] = \frac{1}{2}y[n-1] + x[n]$$

$$y[0] = \frac{1}{2}y[-1] + x[0] = \frac{1}{2}a + k$$

$$y[1] = \frac{1}{2}y[0] + x[1] = \left(\frac{1}{2}\right)^{2} a + \frac{1}{2}k$$

$$y[2] = \frac{1}{2}y[1] + x[2] = \left(\frac{1}{2}\right)^{3} a + \left(\frac{1}{2}\right)^{2} k$$

$$\vdots$$

$$\Rightarrow y[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} a + \left(\frac{1}{2}\right)^{n} k \qquad for \;\; n \ge 0$$

$$\Rightarrow y[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} a + \left(\frac{1}{2}\right)^{n} k\, u[n]$$

ارزیابی ویژگی‌های سیستم‌های توصیف شده با معادله دیفرانسیل / دیفرنس

- سیستم‌هایی که با معادله دیفرانسیل/ دیفرنس خطی با ضرایب ثابت توصیف شده‌اند، **خطی افزایشی** می‌باشند.
- شرط **لازم و کافی** برای **خطی بودن** سیستمی که با معادله دیفرانسیل/دیفرنس خطی با ضرایب ثابت توصیف شده آن است که **تمامی شرط‌های کمکی معادله صفر باشند.**
- شرط **لازم و کافی** برای **LTI و علی بودن** سیستمی که با معادله دیفرانسیل/ دیفرنس خطی با ضرایب ثابت توصیف شده است آن است که **دارای سکون اولیه باشد.**

http://maleki.semnan.ac.ir

دکتر علی مالکی

مثال ۲۸: تعیین پاسخ سیستم توصیف شده با معادله دیفرانسیل

سیستم LTI و علی توصیف شده با معادله دیفرانسیل $y'(t) + 2y(t) = x(t)$ را در نظر بگیرید.
پاسخ این سیستم را به ورودی $x(t) = ke^{3t}u(t)$ تعیین نمایید.

حل: با توجه به LTI و علی بودن سیستم می‌توان نتیجه‌گیری نمود سیستم دارای سکون اولیه است.

$$for \quad t < 0 \;, \qquad x(t) = 0 \;\Rightarrow\; y(t) = 0 \quad for \quad t < 0$$

$$for \quad t \geq 0 \;, \qquad x(t) = ke^{3t} \;\Rightarrow\; y'(t) + 2y(t) = ke^{3t}, \qquad y(0) = 0$$

$$y_p(t) = Ae^{3t} \qquad 3Ae^{3t} + 2Ae^{3t} = ke^{3t} \;\Rightarrow\; A = \frac{k}{5} \;\Rightarrow y_p(t) = \frac{k}{5}e^{3t}$$

$$m + 2 = 0 \;\Rightarrow m = -2 \;\Rightarrow y_h(t) = Be^{-2t} \qquad y(t) = y_p(t) + y_h(t) = \frac{k}{5}e^{3t} + Be^{-2t}$$

$$y(0) = 0 \;\Rightarrow \frac{k}{5} + B = 0 \;\Rightarrow B = -\frac{k}{5} \;\Rightarrow y(t) = \frac{k}{5}\left(e^{3t} - e^{-2t}\right) \quad for \quad t \geq 0$$

$$y(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{k}{5}\left(e^{3t} - e^{-2t}\right) & t \geq 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow y(t) = \frac{k}{5}\left(e^{3t} - e^{-2t}\right)u(t)$$

فهرست مطالب

- جمع کانولوشن
- انتگرال کانولوشن
- ویژگی‌های کانولوشن
- نکات کانولوشن
- ارزیابی ویژگی‌های سیستم‌های LTI توصیف شده با پاسخ ضربه
- پاسخ پله‌ی سیستم‌های LTI
- سیستم‌های توصیف شده با معادله دیفرانسیل / دیفرنس
- نمایش نمودار بلوکی
- مثال‌های مروری
- مثال‌های نرم‌افزاری
- تمرین‌های تئوری
- تمرین‌های نرم‌افزاری

نمایش نمودار بلوکی

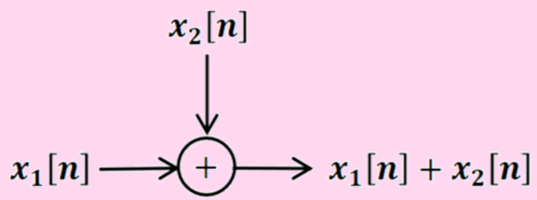
نمودار بلوکی نمایشی ترسیمی و نزدیک به پیاده‌سازی از سیستم است.

- به واسطه‌ی ترسیمی بودن، درک خصوصیات و رفتار سیستم را برای انسان ساده‌تر و موثرتر می‌کند.
- به واسطه‌ی نزدیک به پیاده‌سازی بودن، می‌توان بر اساس آن در مورد منابع مورد نیاز برای پیاده‌سازی نظر داد.

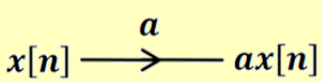
نمودار بلوکی سیستم‌های توصیف شده با معادله دیفرنس

نمایش نمودار بلوکی سیستم‌های توصیف شده با معادله دیفرنس خطی با ضرایب ثابت شامل **اجزای سازنده**ی زیر است:

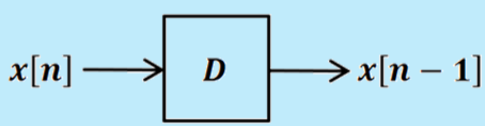
جمع‌کننده:



ضرب در ضریب:



تاخیر واحد:



مثال ۲۹: نمایش نمودار بلوکی زمان– گسسته

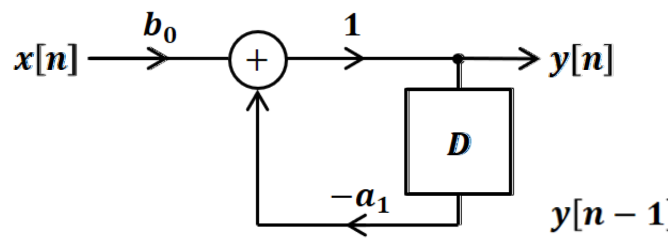
نمایش نمودار بلوکی سیستم‌های توصیف شده با معادله دیفرنس زیر را رسم کنید.

الف) $y[n] + a_1 y[n-1] = b_0 x[n]$

ب) $a_0 y[n] + a_1 y[n-1] + a_2 y[n-2] = b_0 x[n] + b_1 x[n-1]$

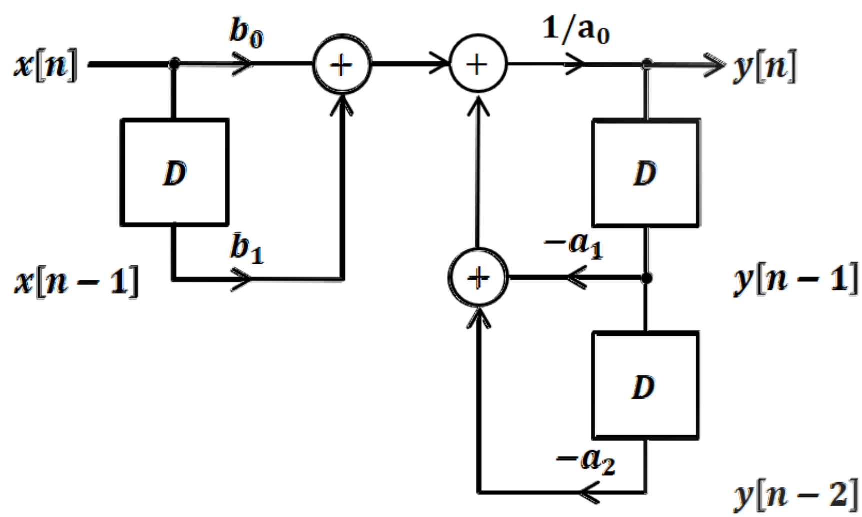
حل الف:

$$\Rightarrow y[n] = b_0 x[n] - a_1 y[n-1]$$



حل ب:

$$\Rightarrow y[n] = \frac{1}{a_0}\{(b_0 x[n] + b_1 x[n-1]) + (-a_1 y[n-1] - a_2 y[n-2])\}$$



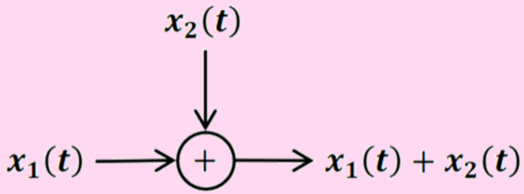
این فرم نمایش نمودار بلوکی در اصطلاح،

« فرم مستقیم I » نامیده می‌شود.

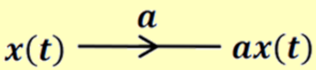
نمودار بلوکی سیستم‌های توصیف شده با معادله دیفرانسیل

نمایش نمودار بلوکی سیستم‌های توصیف شده با معادله دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت شامل اجزای سازنده‌ی زیر است:

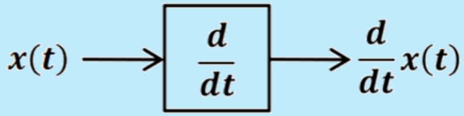
جمع‌کننده:

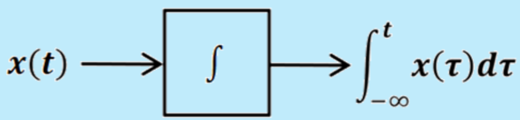


ضرب در ضریب:



مشتق‌گیر یا انتگرال‌گیر:





استفاده از انتگرال‌گیر نسبت به مشتق‌گیر ارجحیت دارد زیرا مشتق‌گیر به شدت به نویز حساس است.

مثال ۳۰: نمایش نمودار بلوکی سیستم زمان– پیوسته (مشتق‌گیر – انتگرال‌گیر)

سیستمی با معادله دیفرانسیل زیر توصیف شده است. نمایش نمودار بلوکی سیستم را به صورت‌های خواسته شده رسم کنید.

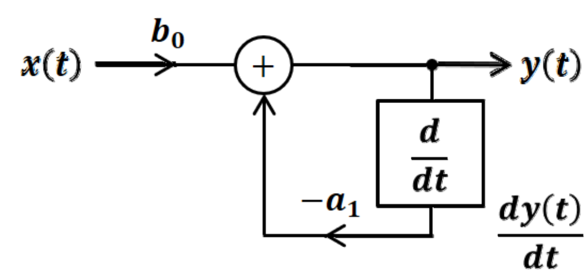
$$a_1 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = b_0 x(t)$$

الف: پیاده‌سازی با مشتق‌گیر؛

ب: پیاده‌سازی با انتگرال‌گیر.

حل الف:

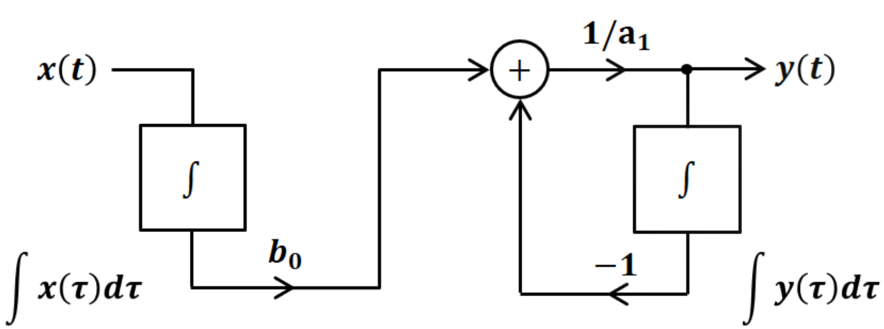
$$y(t) = b_0 x(t) - a_1 \frac{dy(t)}{dt}$$



حل ب:

$$a_1 y(t) + \int_{-\infty}^{t} y(\tau)d\tau = b_0 \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$$

$$y(t) = \frac{1}{a_1}\left\{b_0 \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau - \int_{-\infty}^{t} y(\tau)d\tau\right\}$$



مثال ۳۱: نمایش نمودار بلوکی سیستم زمان– پیوسته

نمایش نمودار بلوکی سیستم‌های توصیف شده با معادله دیفرانسیل زیر را با استفاده از انتگرال‌گیر و به فرم مستقیم I رسم کنید.

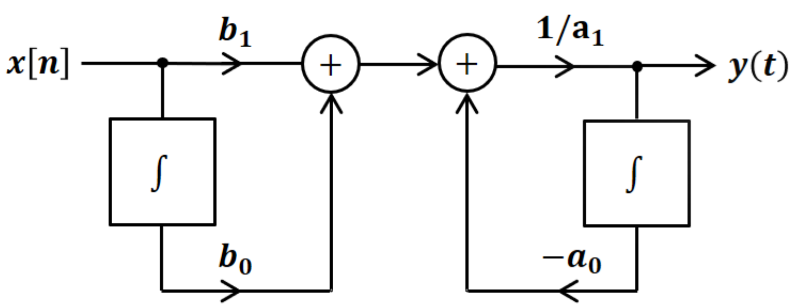
الف) $$a_1\frac{dy(t)}{dt}+a_0y(t)=b_1\frac{dx(t)}{dt}+b_0x(t)$$

ب) $$a_2\frac{d^2y(t)}{dt^2}+a_1\frac{dy(t)}{dt}+a_0y(t)=b_1\frac{dx(t)}{dt}+b_0x(t)$$

حل الف:

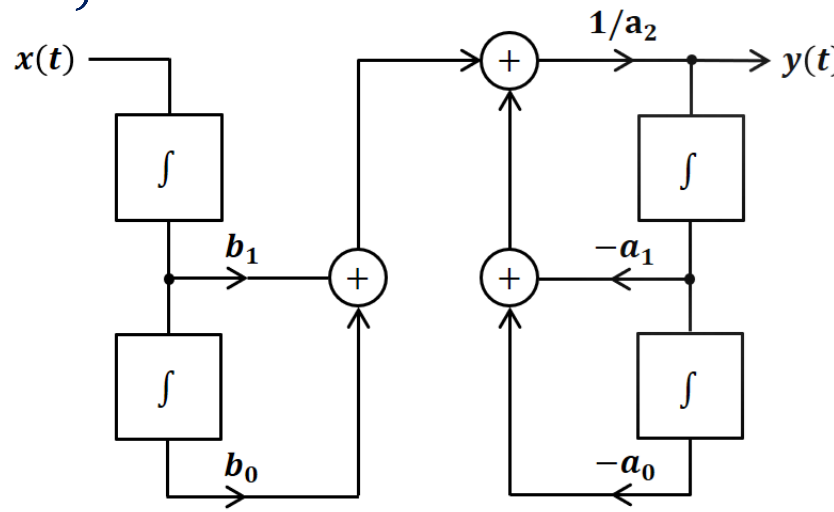
$$a_1y(t)+a_0\int_{-\infty}^{t}y(\tau)d\tau=b_1x(t)+b_0\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau$$

$$y(t)=\frac{1}{a_1}\left\{b_1x(t)+b_0\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau-a_0\int_{-\infty}^{t}y(\tau)d\tau\right\}$$



حل ب:

مستقیما با استفاده از معادله دیفرانسیل داده شده، نمودار بلوکی را به فرم مستقیم I رسم می‌کنیم.



مثال ۳۲: بررسی حساسیت مشتق‌گیر نسبت به نویز فرکانس بالا

می‌خواهیم در قالب مثالی بسیار ساده، حساسیت بلوک مشتق‌گیر نسبت به نویز فرکانس بالا را مورد مطالعه قرار دهیم. سیگنال نویزی ساختگی $x(t) = s(t) + n(t)$ را در نظر بگیرید که در آن، سیگنال مطلوب $s(t)$ با نویز فرکانس بالای $n(t)$ آلوده شده است. می‌خواهیم این سیگنال را از بلوک مشتق‌گیر گذرانده و نسبت سیگنال به نویز را در ورودی و خروجی بلوک بررسی کنیم.

با فرض $s(t) = \sin(\pi t)$ و $n(t) = 0.01\sin(100\pi t)$، نسبت دامنه سیگنال به دامنه‌ی نویز را در ورودی و خروجی بلوک مشتق‌گیر محاسبه کرده و نتیجه را تحلیل کنید.

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\frac{d}{dt}} \longrightarrow y(t)$$

حل:

$$x(t) = s(t) + n(t) = \sin(\pi t) + 0.01\sin(100\pi t)$$

$$SRN_i = \frac{1}{0.01} = 100$$

$$y(t) = \frac{d}{dt}x(t) = \pi\cos(\pi t) + \pi\cos(100\pi t)$$

$$SRN_o = \frac{\pi}{\pi} = 1$$

فهرست مطالب

- جمع کانولوشن
- انتگرال کانولوشن
- ویژگی‌های کانولوشن
- نکات کانولوشن
- ارزیابی ویژگی‌های سیستم‌های LTI توصیف شده با پاسخ ضربه
- پاسخ پله‌ی سیستم‌های LTI
- سیستم‌های توصیف شده با معادله دیفرانسیل / دیفرنس
- نمایش نمودار بلوکی
- مثال‌های مروری
- مثال‌های نرم‌افزاری
- تمرین‌های تئوری
- تمرین‌های نرم‌افزاری

فهرست مطالب

- جمع کانولوشن
- انتگرال کانولوشن
- ویژگی‌های کانولوشن
- نکات کانولوشن
- ارزیابی ویژگی‌های سیستم‌های LTI توصیف شده با پاسخ ضربه
- پاسخ پله‌ی سیستم‌های LTI
- سیستم‌های توصیف شده با معادله دیفرانسیل / دیفرنس
- نمایش نمودار بلوکی
- مثال‌های مروری
- مثال‌های نرم‌افزاری
- تمرین‌های تئوری
- تمرین‌های نرم‌افزاری

فهرست مطالب

- جمع کانولوشن
- انتگرال کانولوشن
- ویژگی‌های کانولوشن
- نکات کانولوشن
- ارزیابی ویژگی‌های سیستم‌های LTI توصیف شده با پاسخ ضربه
- پاسخ پله‌ی سیستم‌های LTI
- سیستم‌های توصیف شده با معادله دیفرانسیل / دیفرنس
- نمایش نمودار بلوکی
- مثال‌های مروری
- مثال‌های نرم‌افزاری
- تمرین‌های تئوری
- تمرین‌های نرم‌افزاری

فهرست مطالب

- جمع کانولوشن
- انتگرال کانولوشن
- ویژگی‌های کانولوشن
- نکات کانولوشن
- ارزیابی ویژگی‌های سیستم‌های LTI توصیف شده با پاسخ ضربه
- پاسخ پله‌ی سیستم‌های LTI
- سیستم‌های توصیف شده با معادله دیفرانسیل / دیفرنس
- نمایش نمودار بلوکی
- مثال‌های مروری
- مثال‌های نرم‌افزاری
- تمرین‌های تئوری
- تمرین‌های نرم‌افزاری

فهرست مطالب

گفت ما را هفت وادی در ره است
چون گذشتی هفت وادی، درگه است

وانیامد در جهان زین راه کس
نیست از فرسنگ آن آگاه کس

چون نیامد باز کس زین راه دور
چون دهندت آگهی ای ناصبور؟

چون شدند آن جایگه گم سر به سر
کی خبر بازت دهد ای بی خبر؟

هست وادی طلب آغاز کار
وادی عشق است از آن پس، بی کنار

پس سیم وادی است آن معرفت
پس چهارم وادی استغنا صفت

هست پنجم وادی توحید پاک
پس ششم وادی حیرت صعبناک

هفتمین وادی فقر است و فنا
بعد از این روی روش نبود تو را

در کشش افتی روش گم گرددت
گر بود یک قطره قلزم گرددت

عطار نیشابوری