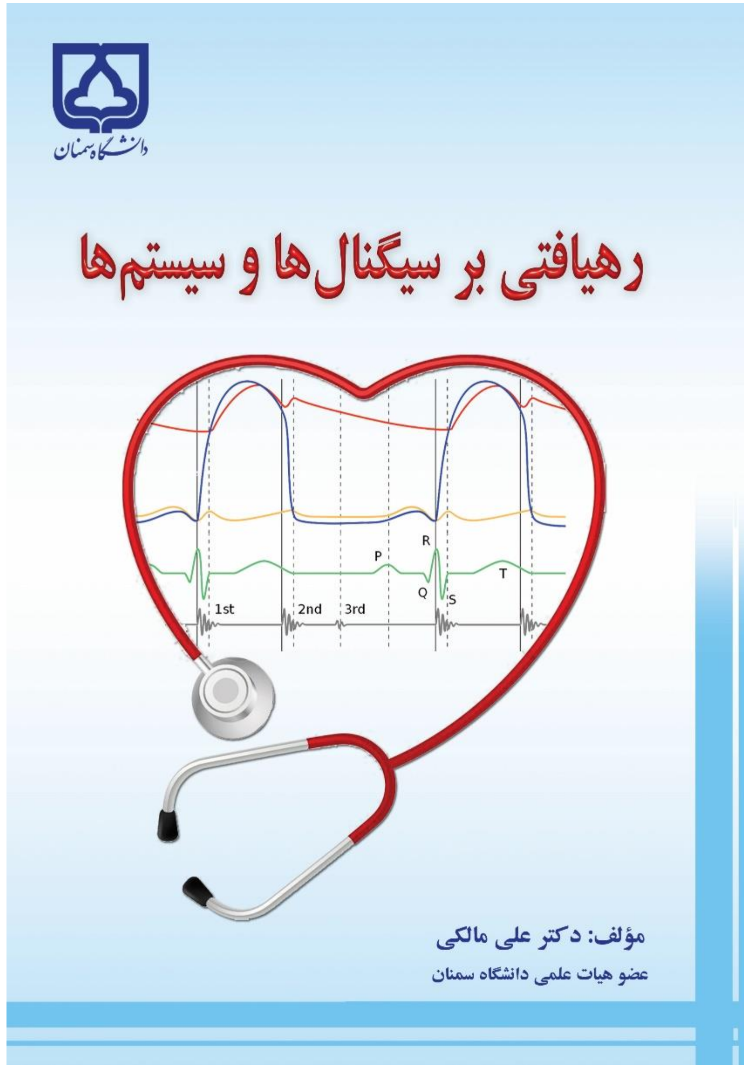
سیگنال‌ها و سیستم‌ها

مبحث سوم

سری فوریه نمایی

دکتر علی مالکی

http://maleki.semnan.ac.ir


دانشگاه سمنان
رهیافتی بر سیگنال‌ها و سیستم‌ها
P
R
Q
S
T
1st
2nd
3rd
مؤلف: دکتر علی مالکی
عضو هیات علمی دانشگاه سمنان

اهداف فصل

پس از مطالعه‌ی این فصل، قادر خواهید بود:

مجموعه توابع متعامد و سری فوریه تعمیم‌یافته را توصیف کنید؛

متعامد بودن مجموعه توابع نمایی مختلط را نشان دهید؛

سری فوریه نمایی را برای هر سیگنال متناوب به دست آورید؛

در مورد اهمیت نمایی مختلط در تجزیه و تحلیل سیستم‌ها نظر دهید؛

مفهوم تابع ویژه و مقدار ویژه را برای سیستم توصیف کنید؛

شرط‌های همگرایی سری فوریه نمایی زمان- پیوسته را برشمارید.

فهرست مطالب

برای معرفی سری فوریه‌ی تعمیم‌یافته، لازم است ابتدا ضرب داخلی دو تابع، مفهوم تعامد و مجموعه توابع متعامد را تعریف کنیم.

تعریف ضرب داخلی دو تابع:

$$< f(t), g(t) > \triangleq \int_a^b f(t)g^*(t)dt$$

دو تابع $f(t)$ و $g(t)$ را در محدوده‌ی (a,b) متعامد گوییم اگر:

$$\begin{cases} < f(t), g(t) >= 0 \\ < f(t), f(t) >\neq 0 \\ < g(t), g(t) >\neq 0 \end{cases}$$

$$< f(t), f(t) >= \int_a^b f(t)f^*(t)dt = \int_a^b |f(t)|^2 dt$$

تعریف مجموعه توابع متعامد: مجموعه توابع $\{\phi_n(t)\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ را در فاصله‌ی (a,b) متعامد گوییم اگر:

$$\begin{cases} < \phi_k(t), \phi_l(t) >= 0 \quad k \neq l \\ < \phi_k(t), \phi_l(t) >\neq 0 \quad k = l \end{cases}$$

هر سیگنال متناوب $x(t)$ را می‌توان به صورت ترکیب خطی از اعضای یک مجموعه توابع متعامد (رابطه‌ی سنتز) بازنمایی کرد.

رابطه‌ی سنتز سری فوریه‌ی تعمیم‌یافته:
$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k\phi_k(t)$$

ضریب یا سهم هر یک از توابع متعامد در بازنمایی سیگنال توسط رابطه‌ی آنالیز تعیین می‌گردد.

رابطه‌ی آنالیز سری فوریه‌ی تعمیم‌یافته:
$$a_k=\frac{<x(t),\phi_k(t)>}{<\phi_k(t),\phi_k(t)>}$$

دو رابطه‌ی آنالیز و سنتز سری فوریه‌ی تعمیم‌یافته در اصطلاح زوج سری فوریه‌ی تعمیم‌یافته نامیده می‌شوند.

زوج سری فوریه‌ی تعمیم‌یافته:
$$\begin{cases}x(t)=\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k\phi_k(t)\\[2ex] a_k=\dfrac{<x(t),\phi_k(t)>}{<\phi_k(t),\phi_k(t)>}\end{cases}$$

مثال ۱: رابطه‌ی آنالیز سری فوریه‌ی تعمیم‌یافته

رابطه‌ی آنالیز سری فوریه‌ی تعمیم‌یافته زمان- پیوسته را به دست آورید.

$$a_k = \frac{< x(t), \phi_k(t) >}{< \phi_k(t), \phi_k(t) >}$$

حل:

$$< x(t), \phi_k(t) > = \int_a^b x(t)\phi_k^*(t)dt$$

$$= \int_a^b \sum_{l=-\infty}^{+\infty} a_l\phi_l(t)\,\phi_k^*(t)dt$$

$$= \sum_{l=-\infty}^{+\infty} a_l \int_a^b \phi_l(t)\phi_k^*(t)dt$$

$$= \sum_{l=-\infty}^{+\infty} a_l < \phi_l(t), \phi_k(t) >$$

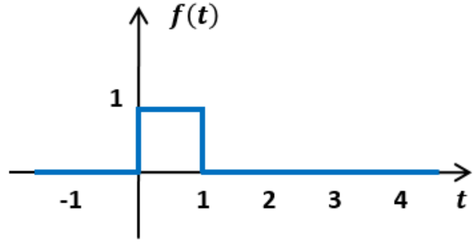
$$= a_k < \phi_k(t), \phi_k(t) > \qquad \Rightarrow < x(t), \phi_k(t) >= a_k < \phi_k(t), \phi_k(t) >$$

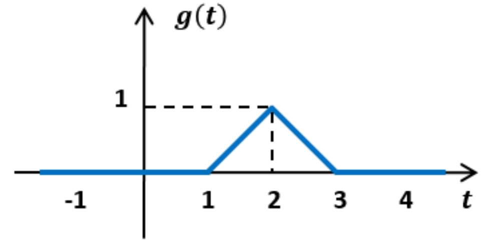
رابطه‌ی آنالیز سری فوریه‌ی تعمیم‌یافته:

$$\Rightarrow a_k = \frac{< x(t), \phi_k(t) >}{< \phi_k(t), \phi_k(t) >}$$

مثال ۲: تعامد دو تابع

متعامد بودن دو تابع $f(t)$ و $g(t)$ زیر را در محدوده‌ی $(0,10)$ بررسی کنید.





حل:

$$< f(t), g(t) > = \int_0^{10} f(t) g^*(t) dt = 0$$

$$< f(t), f(t) > = \int_0^{10} |f(t)|^2 dt = \int_0^1 dt = 1$$

$$< g(t), g(t) > = \int_0^{10} |g(t)|^2 dt = \int_1^2 (t-1)^2 dt + \int_2^3 (-t+3)^2 dt$$

$$= 2\int_0^1 t^2 dt = \frac{2}{3} t^3 \Big|_0^1 = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} < f(t), g(t) > = 0 \\ < f(t), f(t) > \neq 0 \\ < g(t), g(t) > \neq 0 \end{cases}$$

بنابراین $f(t)$ و $g(t)$ در محدوده‌ی $(0,10)$ متعامد هستند.

مثال ۳: متعامد بودن مجموعه توابع نمایی مختلط

نشان دهید مجموعه توابع $\left\{e^{jk\frac{2\pi}{T}t}\right\}_{k=-\infty}^{+\infty}$ در فاصله‌ای به طول T (مثلا $(0,T)$) متعامد است.

حل:

$$< e^{jk\frac{2\pi}{T}t}, e^{jl\frac{2\pi}{T}t} > = \int_0^T e^{jk\frac{2\pi}{T}t} e^{-jl\frac{2\pi}{T}t} dt = \int_0^T e^{j(k-l)\frac{2\pi}{T}t} dt$$

$$for \quad k = l \quad : \quad \int_0^T e^{j(k-l)\frac{2\pi}{T}t} dt = \int_0^T e^{j(k-k)\frac{2\pi}{T}t} dt = \int_0^T dt = T$$

$$for \quad k \neq l \quad : \quad \int_0^T e^{j(k-l)\frac{2\pi}{T}t} dt = \left. \frac{e^{j(k-l)\frac{2\pi}{T}t}}{j(k-l)\frac{2\pi}{T}} \right|_0^T = \frac{e^{j(k-l)\frac{2\pi}{T}T} - e^{j(k-l)\frac{2\pi}{T}(0)}}{j(k-l)\frac{2\pi}{T}}$$

$$= \frac{1-1}{j(k-l)\frac{2\pi}{T}t} = 0$$

$$\Rightarrow < e^{jk\frac{2\pi}{T}t}, e^{jl\frac{2\pi}{T}t} > = \begin{cases} 0 & k \neq l \\ T & k = l \end{cases}$$

بنابراین مجموعه توابع $\left\{e^{jk\frac{2\pi}{T}t}\right\}_{k=-\infty}^{+\infty}$ در فاصله‌ای به طول T متعامد است.

مثال ۴: ضرایب سری فوریه نمایی مختلط

اگر بخواهیم سیگنالی را توسط اعضای مجموعه توابع متعامد نمایی مختلط یعنی $\left\{e^{jk\frac{2\pi}{T}t}\right\}_{k=-\infty}^{+\infty}$ بازنمایی کنیم ضرایب سری فوریه آن را بیابید.

حل:

$$a_k = \frac{< x(t), \phi_k(t) >}{< \phi_k(t), \phi_k(t) >} = \frac{< x(t), e^{jk\frac{2\pi}{T}t} >}{< e^{jk\frac{2\pi}{T}t}, e^{jk\frac{2\pi}{T}t} >}$$

$$= \frac{1}{T} < x(t), e^{jk\frac{2\pi}{T}t} >$$

$$= \frac{1}{T}\int_{<T>} x(t) e^{-jk\frac{2\pi}{T}t} dt$$

دکتر علی مالکی

فهرست مطالب

- سری فوریه تعمیم‌یافته‌ی زمان- پیوسته
- سری فوریه نمایی زمان- پیوسته
- سری فوریه‌ی تعمیم‌یافته‌ی زمان گسسته
- سری فوریه نمایی زمان- گسسته
- اهمیت نمایی مختلط در تجزیه و تحلیل سیستم‌ها
- مثال‌های مروری
- مثال‌های نرم‌افزاری
- تمرین‌های تئوری
- تمرین‌های نرم‌افزاری

سری فوریه‌ی نمایی زمان–پیوسته

هر سیگنال متناوب را می‌توان به صورت ترکیب خطی اعضای مجموعه توابع نمایی مختلط بازنمایی کرد. این بازنمایی، **سری فوریه نمایی** نامیده می‌شود.

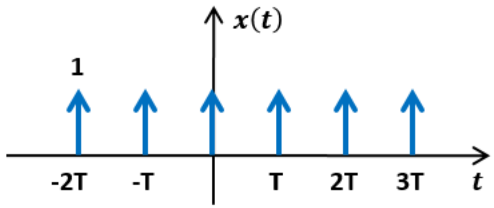
زوج سری فوریه‌ی نمایی:

$$\begin{cases} x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\frac{2\pi}{T}t} \\ a_k = \frac{1}{T}\int_{<T>} x(t) e^{-jk\frac{2\pi}{T}t} dt \end{cases}$$

مثال ۵: سری فوریه نمایی زمان– پیوسته

سری فوریه نمایی سیگنال $x(t)$ داده شده را به دست آورید.

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t-kT)$$



حل:

$$a_k=\frac{1}{T}\int_{<T>}x(t)e^{-jk\frac{2\pi}{T}t}dt$$

$$=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}x(t)e^{-jk\frac{2\pi}{T}t}dt$$

$$=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\delta(t)e^{-jk\frac{2\pi}{T}t}dt$$

$$=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\delta(t)dt$$

$$=\frac{1}{T}$$

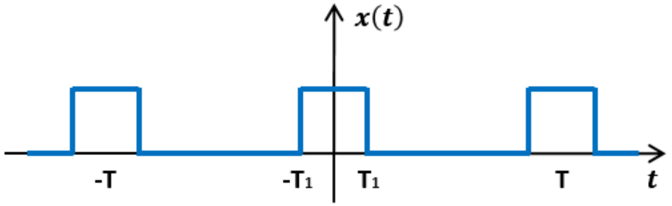
$$\Rightarrow x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{T}e^{jk\frac{2\pi}{T}t}$$

مثال ۶: سری فوریه نمایی زمان– پیوسته

سری فوریه‌ی نمایی سیگنال $x(t)$ داده شده را به دست آورید.

$$x(t)=\begin{cases}1 & |t|<T_1\\ 0 & T_1<|t|<\dfrac{T}{2}\end{cases}\quad , \qquad x(t)=x(t+T)$$

حل:



$$a_k=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}x(t)e^{-jk\frac{2\pi}{T}t}dt$$

$$=\frac{1}{T}\int_{-T_1}^{T_1}e^{-jk\frac{2\pi}{T}t}dt\ =\frac{1}{T}\frac{-1}{jk\frac{2\pi}{T}}e^{-jk\frac{2\pi}{T}t}\Big|_{-T_1}^{T_1}=\frac{1}{j2\pi k}\left(e^{jk\frac{2\pi}{T}T_1}-e^{-jk\frac{2\pi}{T}T_1}\right)$$

$$=\frac{1}{k\pi}\frac{1}{2j}\left(e^{jk\frac{2\pi}{T}T_1}-e^{-jk\frac{2\pi}{T}T_1}\right)\ =\frac{1}{k\pi}\sin\left(k\frac{2\pi}{T}T_1\right)\ =\frac{2T_1}{T}\frac{1}{k\frac{2\pi}{T}T_1}\sin\left(k\frac{2\pi}{T}T_1\right)$$

$$=\frac{2T_1}{T}\operatorname{sinc}\left(\frac{2T_1}{T}k\right)$$

$$\Rightarrow x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{2T_1}{T}\operatorname{sinc}\left(\frac{2T_1}{T}k\right)e^{jk\frac{2\pi}{T}t}$$

مثال ۷: محاسبه‌ی ضرایب سری فوریه نمایی زمان– پیوسته

ضرایب سری فوریه نمایی سیگنال‌های زیر را به دست آورید.

الف: $x(t)=\sin\omega_0 t$ ب: $x(t)=1+\sin\omega_0 t+2\cos\omega_0 t+\cos\left(2\omega_0 t+\frac{\pi}{4}\right)$

حل الف:

$$x(t)=\sin\omega_0 t=\frac{1}{2j}\left(e^{j\omega_0 t}-e^{-j\omega_0 t}\right)=\frac{1}{2j}e^{j\omega_0 t}-\frac{1}{2j}e^{-j\omega_0 t}=\frac{1}{2j}e^{j(1)\omega_0 t}-\frac{1}{2j}e^{j(-1)\omega_0 t}$$

$$\Rightarrow a_1=\frac{1}{2j}\quad,\qquad a_{-1}=-\frac{1}{2j}\quad,\qquad a_k=0\quad for\quad k\neq 1,-1$$

حل ب:

$$x(t)=1+\frac{1}{2j}\left(e^{j\omega_0 t}-e^{-j\omega_0 t}\right)+2\times\frac{1}{2}\left(e^{j\omega_0 t}+e^{-j\omega_0 t}\right)+\frac{1}{2}\left(e^{j\left(2\omega_0 t+\frac{\pi}{4}\right)}+e^{-j\left(2\omega_0 t+\frac{\pi}{4}\right)}\right)$$

$$=1+\frac{1}{2j}e^{j\omega_0 t}-\frac{1}{2j}e^{-j\omega_0 t}+e^{j\omega_0 t}+e^{-j\omega_0 t}+\frac{1}{2}e^{j\left(2\omega_0 t+\frac{\pi}{4}\right)}+\frac{1}{2}e^{-j\left(2\omega_0 t+\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$=1+\left(1+\frac{1}{2j}\right)e^{j(1)\omega_0 t}+\left(1-\frac{1}{2j}\right)e^{j(-1)\omega_0 t}+\left(\frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{4}}\right)e^{j(2)\omega_0 t}+\left(\frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}\right)e^{j(-2)\omega_0 t}$$

$$\Rightarrow a_0=1\,,\qquad a_1=1+\frac{1}{2j}\,,\qquad a_{-1}=1-\frac{1}{2j}\,,\qquad a_2=\frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{4}}\,,\qquad a_{-2}=\frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}$$

$$a_k=0\quad for\quad k\notin\{-2,-1,0,1,2\}$$

شرط‌های همگرایی سری فوریه نمایی زمان– پیوسته

آیا برای هر سیگنال متناوبی می‌توان بسط سری فوریه‌ی نمایی نوشت؟

خیر؛ زیرا ممکن است

- ❖ انتگرال معادله‌ی آنالیز واگرا شود (مقدار به دست برای برخی a_kها بی‌نهایت شود)؛
- ❖ تمام ضرایب a_k محدود باشند ولی معادله‌ی سنتز با این ضرایب به سیگنال اصلی همگرا نشود.

معادله‌ی سنتز:

معادله‌ی آنالیز:

$$\begin{cases} x(t) = \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\frac{2\pi}{T}t} \\ a_k = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{<T>} x(t) e^{-jk\frac{2\pi}{T}t} dt \end{cases}$$

«شرط‌های دیریکله برای همگرایی سری فوریه»:

۱- سیگنال در هر دوره‌ی تناوب، مطلق انتگرال‌پذیر (Absolutely integrable) باشد.

$$\int_{<T>} |x(t)|dt < \infty$$

۲- تعداد نقاط اکسترمم (بیشینه و کمینه) در هر تناوب محدود باشد.

۳- تعداد نقاط ناپیوستگی در هر دوره‌ی تناوب محدود باشد. بعلاوه، مقدار این ناپیوستگی‌ها هم محدود باشد.

اگر شرط‌های دیریکله برآورده شود سیگنال و سری فوریه‌ی آن جز در نقاط ناپیوستگی با هم مساوی خواهند بود. در نقاط ناپیوستگی نیز مقدار سری فوریه به میانگین مقادیر در طرفین ناپیوستگی همگرا می‌شود.

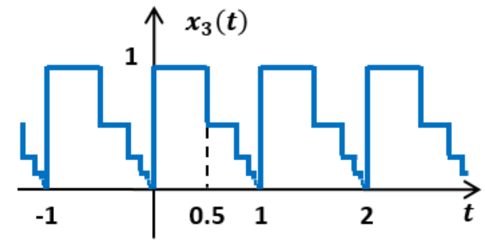
مثال ۸: شرط‌های همگرایی سری فوریه

برآورده شدن شرط‌های دیریکله برای همگرایی سری فوریه را برای هر یک از سیگنال‌های زیر ارزیابی کنید.

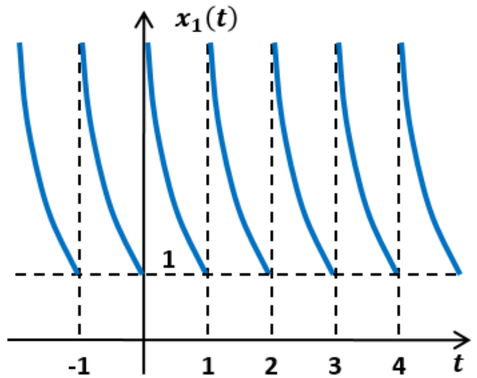
الف: $x_1(t) = \frac{1}{t} \quad 0 < t \leq 1 \quad , x_1(t) = x_1(t+1)$؛

ب: $x_2(t) = \sin\left(\frac{2\pi}{t}\right) \quad 0 < t \leq 1 \quad , x_2(t) = x_2(t+1)$؛

ج: $x_3(t)$ متناوب با دوره‌ی تناوب ۱ مطابق شکل روبرو.

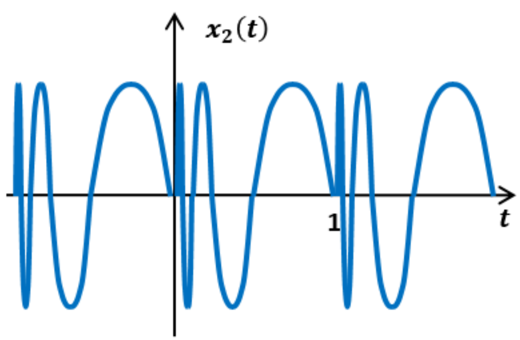


حل الف:



$$\int_{<T>} |x(t)|dt = \int_0^1 \frac{1}{t} dt = \ln(t) \Big|_0^1 = \ln(1) - \ln(0) \to \infty$$

حل ب:



حل ج: شرط سوم از شرط‌های دیریکله برآورده نمی‌شود.

بیشتر بدانیم: پدیده گیبس

اگر چه سری فوریه‌ی نمایی یک سری نامحدود است (متغیر زیگما در رابطه‌ی سنتز سری فوریه نمایی از $-\infty$ تا $+\infty$ تغییر می‌کند یعنی سری فوریه شامل بی‌نهایت جمله است) ولی گاهی در عمل به واسطه‌ی ملاحظات محاسباتی، آن را با یک سری محدود تقریب می‌زنند.

$$x(t) \cong \sum_{k=-N}^{N} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

گیبس[1] اثر افزایش N بر تطابق سیگنال با تقریب بسط سری فوریه آن را مورد مطالعه قرار داد. او مشاهده کرد با افزایش تعداد جملات تقریب سری فوریه (N)، برخلاف انتظار، بیشینه‌ی اختلاف کاهش نمی‌یابد بلکه به محل ناپیوستگی نزدیک‌تر می‌شود که از آن به عنوان «پدیده‌ی گیبس[2]» نام برده می‌شود. در تمرین نرم‌افزاری انتهای فصل، بیشتر با پدیده‌ی گیبس آشنا خواهید شد.

فهرست مطالب

برای معرفی سری فوریه‌ی تعمیم‌یافته، لازم است ابتدا ضرب داخلی دو تابع، مفهوم تعامد و مجموعه توابع متعامد را تعریف کنیم.

تعریف ضرب داخلی دو تابع در محدوده‌ی $[N_1,N_2]$:

$$< f[n], g[n] > = \sum_{n=N_1}^{N_2} f[n]g^*[n]$$

تعریف تعامد دو تابع:

دو تابع $f[n]$ و $g[n]$ را در محدوده‌ی $[N_1,N_2]$ متعامد گوییم اگر:

$$\begin{cases} < f[n], g[n] >= 0 \\ < f[n], f[n] >\neq 0 \\ < g[n], g[n] >\neq 0 \end{cases}$$

تعریف مجموعه توابع متعامد:

مجموعه توابع $\{\phi_k[n]\}_{k=-\infty}^{+\infty}$ را در محدوده‌ی $[N_1,N_2]$ متعامد گوییم اگر:

$$\begin{cases} < \phi_k[n], \phi_l[n] >= 0 \quad k \neq l \\ < \phi_k[n], \phi_l[n] >\neq 0 \quad k = l \end{cases}$$

هر سیگنال متناوب $x[n]$ را می‌توان به صورت ترکیب خطی از اعضای یک مجموعه توابع متعامد (رابطه‌ی سنتز) بازنمایی کرد.

رابطه‌ی سنتز سری فوریه‌ی تعمیم‌یافته:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \phi_k[n]$$

ضریب یا سهم هر یک از توابع متعامد در بازنمایی سیگنال توسط رابطه‌ی آنالیز تعیین می‌گردد.

رابطه‌ی آنالیز سری فوریه‌ی تعمیم‌یافته:

$$a_k = \frac{< x[n], \phi_k[n] >}{< \phi_k[n], \phi_k[n] >}$$

دو رابطه‌ی آنالیز و سنتز سری فوریه‌ی تعمیم‌یافته در اصطلاح زوج سری فوریه‌ی تعمیم‌یافته نامیده می‌شوند.

زوج سری فوریه‌ی تعمیم‌یافته:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \phi_k[n]$$

$$a_k = \frac{< x[n], \phi_k[n] >}{< \phi_k[n], \phi_k[n] >}$$

مثال ۹: رابطه‌ی آنالیز سری فوریه تعمیم‌یافته

رابطه‌ی آنالیز سری فوریه‌ی تعمیم‌یافته زمان- گسسته را به دست آورید.

$$a_k = \frac{< x[n], \phi_k[n] >}{< \phi_k[n], \phi_k[n] >}$$

حل:

$$< x[n], \phi_k[n] > = \sum_{n=<N>} x[n]\phi_k^*[n] = \sum_{n=<N>} \left(\sum_{l=<N>} a_l \phi_l[n] \right) \phi_k^*[n]$$

$$= \sum_{n=<N>} \sum_{l=<N>} a_l \phi_l[n]\, \phi_k^*[n] = \sum_{l=<N>} a_l \sum_{n=<N>} \phi_l[n]\, \phi_k^*[n]$$

$$= \sum_{n=<N>} a_l < \phi_l[n], \phi_k[n] > = a_k < \phi_k[n], \phi_k[n] >$$

$$\Rightarrow \quad < x[n], \phi_k[n] > = a_k < \phi_k[n], \phi_k[n] > \qquad \Rightarrow a_k = \frac{< x[n], \phi_k[n] >}{< \phi_k[n], \phi_k[n] >}$$

مثال ۱۰: وارسی مجموعه توابع نمایی مختلط زمان– گسسته

نشان دهید مجموعه توابع $\left\{e^{jk\frac{2\pi}{N}n}\right\}_{k=-\infty}^{+\infty}$ تنها شامل N سیگنال متمایز است.

حل:

$$e^{j(mN+k)\frac{2\pi}{N}n} = e^{jmN\frac{2\pi}{N}n}e^{jk\frac{2\pi}{N}n} = e^{j2\pi mn}e^{jk\frac{2\pi}{N}n} = e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$$

مثال ۱۱: تعامد مجموعه توابع نمایی مختلط

نشان دهید مجموعه توابع $\{e^{jk\frac{2\pi}{N}n}\}$ در فاصله‌ای به طول N متعامد است.

حل:

$$< e^{jk\frac{2\pi}{N}n}, e^{jl\frac{2\pi}{N}n} > = \sum_{n=<N>} e^{jk\frac{2\pi}{N}n} e^{-jl\frac{2\pi}{N}n} = \sum_{n=<N>} e^{j(k-l)\frac{2\pi}{N}n}$$

$$for \quad k = l \quad : \sum_{n=<N>} e^{j(k-l)\frac{2\pi}{N}n} = \sum_{n=<N>} 1 = N$$

$$for \quad k \neq l \quad : \sum_{n=0}^{N-1} e^{j(k-l)\frac{2\pi}{N}n} = \frac{1 - e^{j(k-l)\frac{2\pi}{N}N}}{1 - e^{j(k-l)\frac{2\pi}{N}}} = \frac{1-1}{1 - e^{j(k-l)\frac{2\pi}{N}}} = 0$$

$$\Rightarrow < e^{jk\frac{2\pi}{N}n}, e^{jl\frac{2\pi}{N}n} >= \begin{cases} 0 & k \neq l \\ N & k = l \end{cases}$$

بنابراین مجموعه توابع $\{e^{jk\frac{2\pi}{N}n}\}$ در فاصله‌ای به طول N متعامد است.

مثال ۱۲: ضرایب سری فوریه نمایی مختلط

اگر بخواهیم سیگنالی را با استفاده از اعضای مجموعه توابع متعامد نمایی مختلط یعنی $\{e^{jk\frac{2\pi}{N}n}\}$ بازنمایی کنیم ضرایب سری فوریه‌ی آن را بیابید.

حل:

$$a_k = \frac{< x[n], \phi_k[n] >}{< \phi_k[n], \phi_k[n] >}$$

$$= \frac{< x[n], e^{jk\frac{2\pi}{N}n} >}{< e^{jk\frac{2\pi}{N}n}, e^{jk\frac{2\pi}{N}n} >}$$

$$= \frac{1}{N} < x[n], e^{jk\frac{2\pi}{N}n} >$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{n=<N>} x[n] e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$$

$$\Rightarrow \quad a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=<N>} x[n] e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$$

مثال ۱۳: متناوب بودن ضرایب سری فوریه نمایی زمان– گسسته

نشان دهید ضرایب سری فوریه‌ی نمایی زمان- گسسته با تناوب N متناوب است.

حل:

$$a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=<N>} x[n]e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$$

$$a_{k+mN} = \frac{1}{N}\sum_{n=<N>} x[n]e^{-j(k+mN)\frac{2\pi}{N}n} = \frac{1}{N}\sum_{n=<N>} x[n]e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}e^{-j2\pi mn}$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{n=<N>} x[n]e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} = a_k$$

$$\Rightarrow \quad a_{k+mN} = a_k$$

فهرست مطالب

- سری فوریه تعمیم‌یافته‌ی زمان- پیوسته
- سری فوریه نمایی زمان- پیوسته
- سری فوریه‌ی تعمیم‌یافته‌ی زمان گسسته
- سری فوریه نمایی زمان- گسسته
- اهمیت نمایی مختلط در تجزیه و تحلیل سیستم‌ها
- مثال‌های مروری
- مثال‌های نرم‌افزاری
- تمرین‌های تئوری
- تمرین‌های نرم‌افزاری

زوج سری فوریه‌ی نمایی زمان-گسسته:

$$\begin{cases} x[n] = \sum_{n=<N>} a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n} \\ a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=<N>} x[n]e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} \end{cases}$$

نکته: سری فوریه‌ی نمایی زمان- گسسته یک سری محدود است.

دقت کنید که معادله‌ی سنتز سری فوریه‌ی نمایی زمان- گسسته شامل حداکثر N جمله (عبارت) است. به عبارت دیگر، سری فوریه‌ی نمایی زمان- گسسته یک سری محدود[1] است در حالی که نمایش سری فوریه‌ی نمایی زمان- پیوسته یک سری نامحدود[2] می‌باشد. همچنین تاکید می‌گردد با اینکه ضرایب a_k برای $k=-\infty$ تا $k=+\infty$ قابل تعیین است ولی متناوب بوده و تنها از N مقدار آن برای نوشتن بسط سری فوریه استفاده می‌گردد.

مثال ۱۴: محاسبه‌ی ضرایب سری فوریه‌ی نمایی زمان– گسسته

ضرایب سری فوریه‌ی نمایی (a_k) سیگنال‌های زیر را برای k از صفر تا $N-1$ به دست آورید.

$$x[n]=\sin 3n$$

$$x[n]=\sin\frac{2\pi}{5}n$$

$$x[n]=\sin\frac{3(2\pi)}{5}n$$

حل الف: $x[n]$ نامتناوب است.

$$\frac{2\pi}{\Omega_0}=\frac{2\pi}{3}\quad:\text{irrational}$$

حل ب:

$$\frac{2\pi}{\Omega_0}=\frac{2\pi}{\left(\frac{2\pi}{5}\right)}=5\quad\Rightarrow N=5$$

$$x[n]=\sin\frac{2\pi}{5}n\quad=\frac{1}{2j}\left(e^{j\frac{2\pi}{5}n}-e^{-j\frac{2\pi}{5}n}\right)=\frac{1}{2j}e^{j(+1)\frac{2\pi}{5}n}-\frac{1}{2j}e^{j(-1)\frac{2\pi}{5}n}$$

$$a_1=\frac{1}{2j},\qquad a_{-1}=-\frac{1}{2j},\qquad\Rightarrow a_4=a_{-1}=-\frac{1}{2j},\qquad a_0=a_2=a_3=0$$

حل ج:

$$\frac{2\pi}{\Omega_0}=\frac{2\pi}{\left(\frac{3(2\pi)}{5}\right)}=\frac{5}{3}\quad:rational\quad\Rightarrow N=5$$

$$\Rightarrow x[n]=\sin\frac{3(2\pi)}{5}n\quad=\frac{1}{2j}e^{j(+3)\frac{2\pi}{5}n}-\frac{1}{2j}e^{j(-3)\frac{2\pi}{5}n}$$

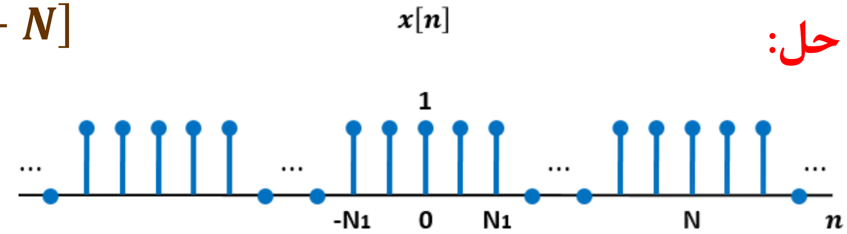
$$\Rightarrow a_3=\frac{1}{2j}\quad,\qquad a_{-3}=-\frac{1}{2j},\qquad\Rightarrow a_2=a_{-3}=-\frac{1}{2j}\quad,\qquad a_0=a_1=a_4=0$$

مثال ۱۵: سری فوریه‌ی نمایی زمان- گسسته:

سری فوریه‌ی نمایی سیگنال $x[n]$ داده شده را به دست آورید.

حل:

$$x[n]=\begin{cases}1 & |n|\le N_1\\ 0 & N_1<|n|\le \dfrac{N}{2}\end{cases}\quad,\qquad x[n]=x[n+N]$$



$$a_k=\frac{1}{N}\sum_{n=<N>}x[n]e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}}x[n]e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}=\frac{1}{N}\sum_{n=-N_1}^{N_1}e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}=\frac{1}{N}\frac{e^{-jk\frac{2\pi}{N}(-N_1)}-e^{-jk\frac{2\pi}{N}(N_1+1)}}{1-e^{-jk\frac{2\pi}{N}}}$$

$$=\frac{1}{N}\frac{e^{-jk\frac{2\pi}{N}\left(\frac{1}{2}\right)}}{e^{-jk\frac{2\pi}{N}\left(\frac{1}{2}\right)}}\;\frac{e^{jk\frac{2\pi}{N}\left(\frac{2N_1+1}{2}\right)}-e^{-jk\frac{2\pi}{N}\left(\frac{2N_1+1}{2}\right)}}{e^{jk\frac{2\pi}{N}\frac{1}{2}}-e^{-jk\frac{2\pi}{N}\frac{1}{2}}}=\frac{1}{N}\frac{\frac{1}{2j}}{\frac{1}{2j}}\frac{e^{jk\frac{2\pi}{N}\left(\frac{2N_1+1}{2}\right)}-e^{-jk\frac{2\pi}{N}\left(\frac{2N_1+1}{2}\right)}}{e^{jk\frac{2\pi 1}{N\,2}}-e^{-jk\frac{2\pi 1}{N\,2}}}$$

$$=\frac{1}{N}\frac{\sin\left(k\frac{2\pi}{N}\left(\frac{2N_1+1}{2}\right)\right)}{\sin\left(k\frac{2\pi}{N}\left(\frac{1}{2}\right)\right)}\quad\Rightarrow a_k=\begin{cases}\dfrac{1}{N}\dfrac{\sin\left(k\frac{2\pi}{N}\left(\frac{2N_1+1}{2}\right)\right)}{\sin\left(k\frac{2\pi}{N}\left(\frac{1}{2}\right)\right)} & k\neq mN, m\in\mathbb{Z}\\[2ex] \dfrac{1}{N}(2N_1+1) & k=mN, m\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

$$a_k=\frac{2N_1+1}{N}\qquad for\quad k=0,\pm N,\pm 2N,\dots$$

فهرست مطالب

- سری فوریه تعمیم‌یافته‌ی زمان- پیوسته
- سری فوریه نمایی زمان- پیوسته
- سری فوریه‌ی تعمیم‌یافته‌ی زمان گسسته
- سری فوریه نمایی زمان- گسسته
- اهمیت نمایی مختلط در تجزیه و تحلیل سیستم‌ها
- مثال‌های مروری
- مثال‌های نرم‌افزاری
- تمرین‌های تئوری
- تمرین‌های نرم‌افزاری

تعیین پاسخ سیستم LTI به ورودی نمایی مختلط

$$e^{jk\omega_0 t} \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t) = ?$$

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t) * h(t) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{jk\omega_0(t-\tau)}d\tau \\ &= e^{jk\omega_0 t}\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{-jk\omega_0 \tau}d\tau \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad y(t) = e^{jk\omega_0 t}\, H(j\omega)\Big|_{\omega = k\omega_0}$$

«تعریف تبدیل فوریه»:

$$H(j\omega) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{-j\omega t}dt$$

تبدیل فوریه‌ی پاسخ ضربه در اصطلاح «پاسخ فرکانسی» نامیده می‌شود.

$$e^{jk\omega_0 t} \longrightarrow \boxed{H(j\omega)} \longrightarrow H(j\omega)\Big|_{\omega = k\omega_0} e^{jk\omega_0 t}$$

تابع ویژه — پاسخ فرکانسی — مقدار ویژه — تابع ویژه

فرم عمومی‌تر تابع ویژه‌ی سیستم‌های زمان- پیوسته، $e^{s_0 t}$ است که s_0 مقداری مختلط است.

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{s_0(t-\tau)}d\tau$$

$$= e^{s_0 t}\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{-s_0\tau}d\tau$$

$$= e^{s_0 t}\, H(s)\Big|_{s=s_0}$$

«تعریف تبدیل لاپلاس»:

$$H(s) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{-st}dt$$

تبدیل لاپلاس پاسخ ضربه را در اصطلاح «تابع سیستم» یا «تابع انتقال» می‌نامند.

$$\underbrace{e^{s_0 t}}_{\text{تابع ویژه}} \longrightarrow \boxed{\underbrace{H(s)}_{\text{تابع سیستم}}} \longrightarrow \underbrace{e^{s_0 t}}_{\text{تابع ویژه}} \cdot \underbrace{H(s)\Big|_{s=s_0}}_{\text{مقدار ویژه}}$$

مثال ۱۶: تابع ویژه‌ی سیستم زمان– پیوسته

سیستمی با تابع سیستم $H(s)$ در نظر بگیرید. پاسخ این سیستم به ورودی $x(t)$ را تعیین نمایید.

$$H(s) = \frac{1}{s+2}$$

$$x(t) = 20e^{2t} + 30e^{3t} + 7e^{5t}$$

حل:

$$y(t) = 20\, H(s)\Big|_{s=2} e^{2t} + 30\, H(s)\Big|_{s=3} e^{3t} + 7\, H(s)\Big|_{s=5} e^{5t}$$

$$\Rightarrow y(t) = 5e^{2t} + 6e^{3t} + e^{5t}$$

$$\begin{aligned} y[n] &= x[n] * h[n] \\ &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h[m]x[n-m] \\ &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h[m]e^{jk\omega_0(n-m)} \\ &= e^{jk\omega_0 n} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h[m]e^{-jk\omega_0 m} \\ &= e^{jk\omega_0 n}\ H(e^{j\omega})\Big|_{\omega = k\omega_0} \end{aligned}$$

«تعریف تبدیل فوریه»:

$$H(e^{j\omega}) \triangleq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]e^{-j\omega n}$$

تبدیل فوریه‌ی پاسخ ضربه در اصطلاح «پاسخ فرکانسی» نامیده می‌شود.

$$e^{jk\omega_0 n} \longrightarrow \boxed{H(e^{j\omega})} \longrightarrow e^{jk\omega_0 n} \cdot H(e^{j\omega})\Big|_{\omega = k\omega_0}$$

تابع ویژه — پاسخ فرکانسی — تابع ویژه — مقدار ویژه

فرم عمومی‌تر تابع ویژه‌ی سیستم‌های زمان- گسسته، z_0^n است که z_0 **مقداری مختلط** است.

$$y[n] = x[n] * h[n]$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h[m]x[n-m]$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h[m]z_0^{n-m}$$

$$= z_0^n \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h[m]z_0^{-m}$$

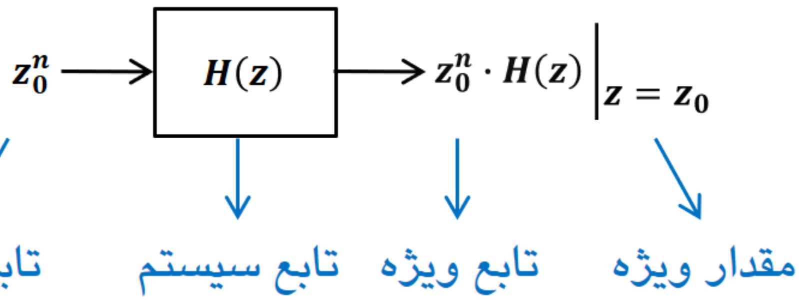
$$= z_0^n \; H(z)\Big|_{z=z_0}$$

«تعریف تبدیل لاپلاس»:

$$H(z) \triangleq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]z^{-n}$$

تبدیل Z پاسخ ضربه را در اصطلاح

«**تابع سیستم**» یا «**تابع انتقال**» می‌نامند.



فهرست مطالب

- سری فوریه تعمیم‌یافته‌ی زمان- پیوسته
- سری فوریه نمایی زمان- پیوسته
- سری فوریه‌ی تعمیم‌یافته‌ی زمان گسسته
- سری فوریه نمایی زمان- گسسته
- اهمیت نمایی مختلط در تجزیه و تحلیل سیستم‌ها
- مثال‌های مروری
- مثال‌های نرم‌افزاری
- تمرین‌های تئوری
- تمرین‌های نرم‌افزاری

گفت ما را هفت وادی در ره است
چون گذشتی هفت وادی، درگه است

وانیامد در جهان زین راه کس
نیست از فرسنگ آن آگاه کس

چون نیامد باز کس زین راه دور
چون دهندت آگهی ای ناصبور؟

چون شدند آن جایگه گم سر به سر
کی خبر بازت دهد ای بی خبر؟

هست وادی طلب آغاز کار
وادی عشق است از آن پس، بی کنار

پس سیم وادی است آن معرفت
پس چهارم وادی استغنا صفت

هست پنجم وادی توحید پاک
پس ششم وادی حیرت صعبناک

هفتمین وادی فقر است و فنا
بعد از این روی روش نبود تو را

در کشش افتی روش گم گرددت
گر بود یک قطره قلزم گرددت

عطار نیشابوری