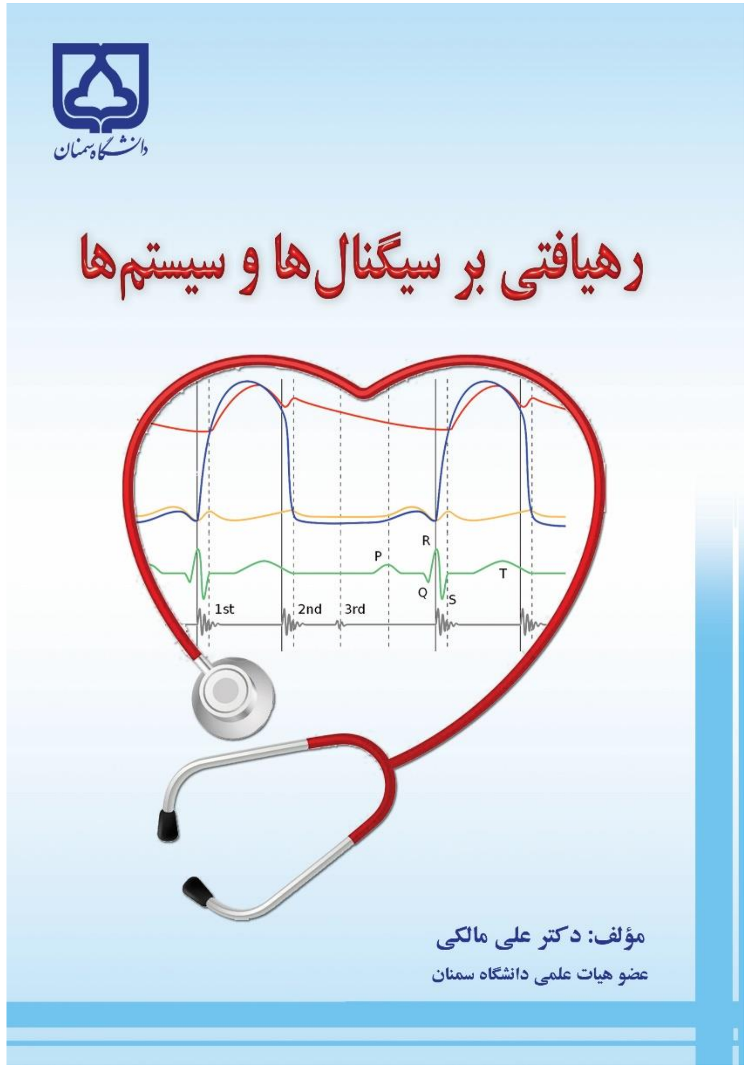
سیگنال‌ها و سیستم‌ها

مبحث چهارم

تبدیل فوریه‌ی زمان- پیوسته

دکتر علی مالکی

http://maleki.semnan.ac.ir



دانشگاه سمنان
رهیافتی بر سیگنال‌ها و سیستم‌ها
P
R
T
Q
S
1st
2nd
3rd
مؤلف: دکتر علی مالکی
عضو هیات علمی دانشگاه سمنان

اهداف فصل

فهرست مطالب

زوج تبدیل فوریه:

$$\begin{cases} X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt \\ x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega \end{cases}$$

«شرط‌های دیریکله برای همگرایی تبدیل فوریه»:

شرط‌های دیریکله، شرط کافی هستند.

۱- سیگنال مطلق انتگرال‌پذیر یا مربع انتگرال‌پذیر باشد.

شرط مطلق انتگرال‌پذیر بودن: $$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|dt < \infty$$

شرط مربع انتگرال‌پذیر بودن: $$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)dt < \infty$$

۲- در هر دوره‌ی محدود، تعداد نقاط اکسترمم (بیشینه و کمینه) محدود باشد.

۳- در هر دوره‌ی محدود، تعداد نقاط ناپیوستگی محدود باشد.

نکته:

برای اینکه بتوانیم توصیف یک سیستم LTI را به حوزه‌ی فرکانس مهاجرت دهیم لازم است پاسخ ضربه‌ی سیستم شرط‌های دیریکله را برآورده کند. برآورده شدن شرط نخست برای پاسخ ضربه به معنای مطلق انتگرال‌پذیر بودن پاسخ ضربه است. در فصل دوم آموختیم که مطلق انتگرال‌پذیر بودن پاسخ ضربه شرط پایداری سیستم است. بنابراین می‌توان نتیجه‌گیری کرد که تبدیل فوریه صرفا برای تجزیه و تحلیل سیستم‌های LTI پایدار قابل استفاده است.

مثال ۱: تبدیل فوریه‌ی سیگنال‌های پرکاربرد

تبدیل فوریه‌ی سیگنال‌های زیر را به دست آورید.

الف) $x(t) = u(t)$

ب) $x(t) = \delta(t)$

ج) $x(t) = e^{-\alpha t}u(t), \alpha > 0$

د) $x(t) = e^{-\alpha|t|}, \alpha > 0$

هـ) $x(t) = \Pi(t)$

حل الف: سیگنال پله واحد مطلق انتگرال‌پذیر نیست.

حل ب:

$$\mathcal{F}\{\delta(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$$

حل ج:

$$\mathcal{F}\{e^{-\alpha t}u(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha t}u(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{0}^{+\infty} e^{-(\alpha+j\omega)t} dt = \frac{-1}{\alpha + j\omega} e^{-(\alpha+j\omega)t} \Big|_0^\infty = \frac{1}{\alpha + j\omega}$$

حل د:

$$\mathcal{F}\{e^{-\alpha|t|}\} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha|t|} e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{0} e^{\alpha t} e^{-j\omega t} dt + \int_{0}^{+\infty} e^{-\alpha t} e^{-j\omega t} dt$$

$$= \frac{1}{\alpha - j\omega} e^{(\alpha-j\omega)t} \Big|_{-\infty}^{0} + \frac{-1}{\alpha + j\omega} e^{-(\alpha+j\omega)t} \Big|_0^\infty = \frac{1}{\alpha - j\omega} + \frac{1}{\alpha + j\omega} = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}$$

حل هـ:

$$\mathcal{F}\{\Pi(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{-j\omega t} dt = \frac{-1}{j\omega} e^{-j\omega t} \Big|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{j\omega}\left(e^{j\omega/2} - e^{-j\omega/2}\right)$$

$$= \frac{1}{\omega/2} \cdot \frac{1}{2j}\left(e^{j\omega/2} - e^{-j\omega/2}\right) = \frac{1}{\omega/2} \cdot \sin(\omega/2) = \mathrm{sinc}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$$

مثال ۱: تبدیل فوریه‌ی سیگنال‌های پرکاربرد

تبدیل فوریه‌ی سیگنال‌های زیر را به دست آورید.

الف) $x(t) = u(t)$

ب) $x(t) = \delta(t)$

ج) $x(t) = e^{-\alpha t}u(t), \alpha > 0$

د) $x(t) = e^{-\alpha|t|}, \alpha > 0$

ه) $x(t) = \Pi(t)$

«جمع‌بندی مثال»:

$$\delta(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} 1$$

$$e^{-\alpha t}u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{\alpha + j\omega}$$

$$e^{-\alpha|t|} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}$$

$$\Pi(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \text{sinc}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$$

مثال ۲: وارون تبدیل فوریه

تبدیل فوریه‌ی سیگنالی به صورت زیر داده شده است. سیگنال را بیابید.

$$X(j\omega)=\Pi\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$$

حل:

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{\Pi\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)\right\}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\Pi\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)e^{j\omega t}d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{j\omega t}d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{jt}e^{j\omega t}\Big|_{-\pi}^{\pi}$$

$$=\frac{1}{\pi t}\cdot\frac{1}{2j}\left(e^{j\pi t}-e^{-j\pi t}\right)$$

$$=\frac{1}{\pi t}\cdot\sin\pi t$$

$$=sinc(t)$$

«زوج‌های تبدیل فوریه‌ی پرکاربرد»:

$$\delta(t)\xleftrightarrow{\mathcal{F}}1$$

$$e^{-\alpha t}u(t)\xleftrightarrow{\mathcal{F}}\frac{1}{\alpha+j\omega}$$

$$e^{-\alpha|t|}\xleftrightarrow{\mathcal{F}}\frac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2}$$

$$\Pi(t)\xleftrightarrow{\mathcal{F}}\text{sinc}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$$

$$sinc(t)\xleftrightarrow{\mathcal{F}}\Pi\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$$

مثال ۳: محاسبه‌ی تبدیل فوریه

تبدیل فوریه‌ی $\delta(t-t_0)$ را به دست آورید. با مقایسه‌ی روند محاسبات و نتیجه این مثال با بند ب مثال قبل، در مورد اثر جابجایی زمانی بر تبدیل فوریه‌ی سیگنال نظر دهید.

حل:

$$\mathcal{F}\{\delta(t-t_0)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-t_0) e^{-j\omega t} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-t_0) e^{-j\omega t_0} dt$$

$$= e^{-j\omega t_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-t_0) dt$$

$$= e^{-j\omega t_0}$$

$$\Rightarrow \delta(t-t_0) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} e^{-j\omega t_0}$$

فهرست مطالب

- معرفی تبدیل فوریه‌ی زمان- پیوسته
- ویژگی‌های تبدیل فوریه‌ی زمان- پیوسته
- تبدیل فوریه‌ی تعمیم‌یافته
- تبدیل فوریه‌ی تعمیم‌یافته‌ی سیگنال‌های متناوب
- سیستم‌های توصیف شده با معادله دیفرانسیل
- مثال‌های کاربردی
- مثال‌های مروری
- مثال‌های نرم‌افزاری
- تمرین‌های تئوری
- تمرین‌های نرم‌افزاری

ویژگی‌های تبدیل فوریه‌ی زمان–پیوسته

- ویژگی خطی بودن،
- ویژگی جابجایی زمانی،
- ویژگی مزدوج و تقارن‌های آن،
- ویژگی مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری،
- ویژگی مقیاس زمان و فرکانس،
- ویژگی دوگانی،
- رابطه‌ی پارسوال،
- ویژگی کانولوشن و
- ویژگی ضرب (مدولاسیون)

ویژگی خطی بودن

$$\begin{cases} x_1(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \mathrm{X}_1(j\omega) \\ x_2(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \mathrm{X}_2(j\omega) \end{cases} \Longrightarrow \quad \alpha x_1(t) + \beta x_2(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \alpha X_1(j\omega) + \beta X_2(j\omega)$$

اثبات:

$$\mathcal{F}\{\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \big(\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)\big) e^{-j\omega t} dt$$

$$= \alpha \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t) e^{-j\omega t} dt + \beta \int_{-\infty}^{+\infty} x_2(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$= \alpha X_1(j\omega) + \beta X_2(j\omega)$$

مثال ۴: ویژگی خطی بودن

تبدیل فوریه‌ی سیگنال $x(t) = 2e^{-2t}u(t) + 3e^{-3t}u(t)$ را به دست آورید.

حل:

$$\begin{cases} e^{-2t}u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \dfrac{1}{j\omega + 2} \\ e^{-3t}u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \dfrac{1}{j\omega + 3} \end{cases} \Rightarrow \quad 2e^{-2t}u(t) + 3e^{-3t}u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{2}{j\omega + 2} + \frac{3}{j\omega + 3}$$

ویژگی جابجایی زمانی

$$x(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(j\omega) \quad \Longrightarrow \quad x(t-t_0) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} e^{-j\omega t_0}X(j\omega)$$

نکته:

جابجایی زمانی تاثیری بر اندازه‌ی تبدیل فوریه ندارد و تنها موجب یک جابجایی فاز خطی می‌گردد.

$$\mathcal{F}\{x(t)\} = \left|X\left(e^{j\omega}\right)\right| e^{j\measuredangle X(j\omega)}$$

$$\mathcal{F}\{x(t-t_0)\} = \left|X\left(e^{j\omega}\right)\right| e^{j\measuredangle X(j\omega)} e^{-j\omega t_0} = \left|X\left(e^{j\omega}\right)\right| e^{j(\measuredangle X(j\omega) - t_0\omega)}$$

مثال ۵: اثبات ویژگی جابجایی زمانی

ویژگی جابجایی زمانی تبدیل فوریه‌ی زمان- پیوسته را اثبات کنید.

حل:

$$x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(j\omega)$$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

$$\Rightarrow x(t-t_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega)e^{j\omega (t-t_0)}d\omega$$

$$\Rightarrow x(t-t_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \left(e^{-j\omega t_0}X(j\omega)\right)e^{j\omega t}d\omega$$

$$\Rightarrow x(t-t_0) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} e^{-j\omega t_0}X(j\omega)$$

ویژگی مزدوج و تقارن‌های مزدوج

$$x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(j\omega) \quad \Longrightarrow \quad x^*(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X^*(-j\omega)$$

تقارن‌های مزدوج:

$$x(t): real \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} Re\{X(j\omega)\}: Even \\ Im\{X(j\omega)\}: Odd \end{cases}$$

$$x(t): real \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} |X(j\omega)|: Even \\ \measuredangle X(j\omega): Odd \end{cases}$$

$$x(t): real \,\&\, even \quad \Longrightarrow \quad X(j\omega): real \,\&\, even$$

$$x(t): real \,\&\, odd \quad \Longrightarrow \quad X(j\omega): purely\ imaginary \,\&\, odd$$

مثال ۶: اثبات ویژگی مزدوج

ویژگی مزدوج تبدیل فوریه‌ی زمان- پیوسته را اثبات کنید.

حل:

$$x(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(j\omega)$$

$$\Rightarrow \quad x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

$$\Rightarrow \quad x^*(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X^*(j\omega)e^{-j\omega t}d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{+\infty}^{-\infty} X^*(-j\Omega)e^{+j\Omega t}(-d\Omega)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X^*(-j\Omega)e^{j\Omega t}d\Omega$$

$$\Rightarrow \quad x^*(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X^*(-j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

$$\Rightarrow \quad x^*(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X^*(-j\omega)$$

مثال ۷: اثبات تقارن‌های مزدوج

ثابت کنید چنانچه سیگنال $x(t)$ حقیقی باشد،

الف: بخش حقیقی تبدیل فوریه دارای تقارن زوج و بخش موهومی تبدیل فوریه دارای تقارن فرد است.

ب: اندازه‌ی تبدیل فوریه‌ی آن دارای تقارن زوج و فاز تبدیل فوریه‌ی آن دارای تقارن فرد است.

حل الف: اگر سیگنال $x(t)$ حقیقی باشد $x(t) = x^*(t)$ است.

$$\Rightarrow X(j\omega) = X^*(-j\omega)$$

$$\Rightarrow Re\{X(j\omega)\} + j\,Im\{X(j\omega)\} = Re\{X(-j\omega)\} - j\,Im\{X(-j\omega)\}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} Re\{X(j\omega)\} = Re\{X(-j\omega)\} & \Rightarrow Re\{X(j\omega)\}: even \\ Im\{X(j\omega)\} = -\,Im\{X(-j\omega)\} & \Rightarrow Im\{X(j\omega)\}: odd \end{cases}$$

$$\boxed{x(t): real \quad \Rightarrow \begin{cases} Re\{X(j\omega)\}: even \\ Im\{X(j\omega)\}: odd \end{cases}}$$

حل ب:

$$x(t): real \;\Rightarrow X^*(j\omega) = X(-j\omega) \;\Rightarrow |X(j\omega)|e^{-j\measuredangle X(j\omega)} = |X(-j\omega)|e^{j\measuredangle X(-j\omega)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |X(j\omega)| = |X(-j\omega)| & \Rightarrow |X(j\omega)|: even \\ \measuredangle X(j\omega) = -\,\measuredangle X(-j\omega) & \Rightarrow \measuredangle X(j\omega): odd \end{cases}$$

$$\boxed{x(t): real \quad \Rightarrow \begin{cases} |X(j\omega)|: even \\ \measuredangle X(j\omega): odd \end{cases}}$$

نکته:

هنگام محاسبه یا ترسیم تبدیل فوریه‌ی یک سیگنال مقدار حقیقی، کافی است دامنه- فاز یا بخش‌های حقیقی- موهومی را صرفا برای فرکانس‌های مثبت تعیین کنیم. در صورت نیاز، دامنه با تقارن زوج، فاز با تقارن فرد، بخش حقیقی با تقارن زوج و بخش موهومی با تقارن فرد قابل تکمیل است.

مثال ۸: اثبات تقارن‌های مزدوج

ثابت کنید اگر سیگنال حقیقی و زوج باشد تبدیل فوریه‌ی آن حقیقی و زوج خواهد بود و چنانچه سیگنال حقیقی و فرد باشد تبدیل فوریه‌ی آن موهومی محض و فرد خواهد بود.

حل:

$$x(t): real \;\Longrightarrow\; x(t)=x^*(t) \;\Longrightarrow\; X(j\omega)=X^*(-j\omega) \;\Longrightarrow\; X^*(j\omega)=X(-j\omega)$$

$$X(j\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$\Longrightarrow X(-j\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{+j\omega t}dt=\int_{+\infty}^{-\infty} x(-\tau)e^{-j\omega\tau}(-d\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(-\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau$$

$$\Longrightarrow X(-j\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(-t)e^{-j\omega t}dt$$

$$x(t): even \;\Longrightarrow\; X(-j\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt=X(j\omega) \;\Longrightarrow\; \overbrace{X^*(j\omega)=X(j\omega)}^{real}\underbrace{=X(-j\omega)}_{even}$$

$$x(t): odd \;\Longrightarrow\; X(-j\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} -x(t)e^{-j\omega t}dt=-X(j\omega) \;\Longrightarrow\; \overbrace{X^*(j\omega)=-X(j\omega)}^{purely\ imaginary}\underbrace{=X(-j\omega)}_{odd}$$

نکته:

سیگنال حقیقی $x(t)$ با تبدیل فوریه $X(j\omega)$ را در نظر بگیرید. همان‌طور که می‌دانید می‌توان $x(t)$ را به بخش‌های زوج و فرد تجزیه کرد. از سوی دیگر، $X(j\omega)$ را نیز که مقداری مختلط است می‌توان با بخش‌های حقیقی و موهومی محض بازنمایی کرد. بخش زوج $x(t)$ با توجه به حقیقی بودن سیگنال، حقیقی و زوج است بنابراین تبدیل فوریه‌ی آن بایستی حقیقی و زوج باشد. بخش فرد $x(t)$ نیز حقیقی و فرد است بنابراین تبدیل فوریه آن بایستی موهومی محض و فرد باشد. بنابراین، اگر سیگنال حقیقی باشد تبدیل فوریه‌ی بخش زوج آن برابر بخش حقیقی تبدیل فوریه‌ی سیگنال است که خود تقارن زوج دارد. تبدیل فوریه‌ی بخش فرد سیگنال نیز برابر j در بخش موهومی تبدیل فوریه‌ی سیگنال است که خود تقارن فرد دارد. بیان دیگر،

$$x(t): real \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} Even\{x(t)\} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} Re\{X(j\omega)\}: even \\ Odd\{x(t)\} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} j\, Im\{X(j\omega)\}: odd \end{cases} \qquad (۱٤-٤)$$

مثال ۹: تقارن‌های مزدوج

با استفاده از زوج فوریه‌ی $e^{-\alpha t}u(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{j\omega+\alpha}$ و تقارن مزدوج، تبدیل فوریه‌ی $e^{-\alpha|t|}$ را به دست آورید.

حل:

$$e^{-\alpha|t|} = e^{-\alpha t}u(t) + e^{\alpha t}u(-t) = 2Even\{e^{-\alpha t}u(t)\}$$

$$Even\{e^{-\alpha t}u(t)\} \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} Re\left\{\frac{1}{j\omega+\alpha}\right\}$$

$$\Rightarrow \mathcal{F}\{e^{-\alpha|t|}\} = 2Re\left\{\frac{1}{j\omega+\alpha}\right\}$$

$$= 2Re\left\{\frac{-j\omega+\alpha}{-j^2\omega^2+\alpha^2}\right\}$$

$$= 2\frac{\alpha}{\alpha^2+\omega^2}$$

$$= \frac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2}$$

ویژگی مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری زمانی

$$x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(j\omega) \quad \Rightarrow \quad \frac{dx(t)}{dt} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} j\omega\, X(j\omega)$$

$$\Rightarrow \quad \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{j\omega}X(j\omega) + \pi X(0)\delta(\omega)$$

که $X(0)$ نشانگر $X(j\omega)$ به ازای $\omega = 0$ است.

طبق ویژگی مشتق‌گیری زمانی تبدیل فوریه ملاحظه می‌کنید که مشتق در حوزه‌ی زمان به صورت ضریب $j\omega$ در حوزه‌ی فرکانس ظاهر می‌گردد. به همین دلیل است که معادله دیفرانسیل در حوزه‌ی زمان به معادله‌ای جبری در حوزه‌ی فرکانس تبدیل می‌گردد.

مثال ۱۰: اثبات ویژگی مشتق‌گیری زمانی

ویژگی مشتق‌گیری زمانی تبدیل فوریه‌ی زمان- پیوسته را اثبات کنید.

حل:

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{X}(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

$$\Rightarrow\frac{dx(t)}{dt}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{X}(j\omega)(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

$$\Rightarrow\frac{dx(t)}{dt}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\big(j\omega\mathrm{X}(j\omega)\big)e^{j\omega t}d\omega$$

$$\Rightarrow\frac{dx(t)}{dt}\overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow}j\omega\mathrm{X}(j\omega)$$

مثال ۱۱: ویژگی مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری زمانی

با انتگرال‌گیری زمانی از سیگنال ضربه واحد $\delta(t)$، تبدیل فوریه‌ی تعمیم‌یافته‌ی $u(t)$ را به دست آورید. آیا با استفاده از ویژگی مشتق‌گیری زمانی و زوج فوریه‌ی پله واحد به دست آمده می‌توانید زوج فوریه‌ی $\delta(t)$ را به دست آورید؟

حل:

$$\delta(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} 1$$

$$\Rightarrow u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)d\tau \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$$

$$\Rightarrow u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} j\omega\left\{\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)\right\} = 1 + j\omega\pi\delta(\omega)$$

$$\Rightarrow \delta(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} 1$$

ویژگی مقیاس زمان و فرکانس

$$x(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(j\omega) \quad \Longrightarrow x(at) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{|a|} X\left(j\frac{\omega}{a}\right), \qquad a: real$$

در حالت خاص، اگر $a = -1$ باشد داریم:

$$x(-t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(-j\omega)$$

این رابطه گویای آن است که با قرینه شدن سیگنال زمانی، طیف فرکانسی آن نیز قرینه خواهد شد.

نکته:

طبق «ویژگی مقیاس زمان و فرکانس» تبدیل فوریه، اگر سیگنال در حوزه‌ی زمان فشرده شود طیف آن در حوزه فرکانس گسترش می‌یابد و برعکس، اگر سیگنال در حوزه‌ی زمان گسترش یابد طیف آن در حوزه‌ی فرکانس فشرده می‌شود.

مثال ۱۲: اثبات ویژگی مقیاس زمان و فرکانس

ویژگی مقیاس زمان و فرکانس تبدیل فوریه‌ی زمان- پیوسته را اثبات کنید.

حل:

$$\mathcal{F}\{x(at)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(at)e^{-j\omega t}dt$$

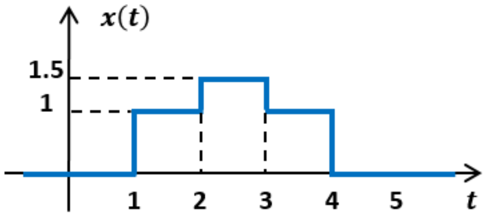
$$= \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)e^{-j\omega\frac{\tau}{a}} \cdot \frac{1}{a}d\tau & a \geq 0 \\ \displaystyle\int_{+\infty}^{-\infty} x(\tau)e^{-j\omega\frac{\tau}{a}} \cdot \frac{1}{a}d\tau & a < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \displaystyle\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)e^{-j\frac{\omega}{a}\tau}d\tau & a \geq 0 \\ \displaystyle-\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)e^{-j\frac{\omega}{a}\tau}d\tau & a < 0 \end{cases}$$

$$= \frac{1}{|a|}X\left(j\frac{\omega}{a}\right)$$

مثال ۱۳: ویژگی مقیاس زمان و فرکانس

تبدیل فوریه‌ی سیگنال $x(t)$ داده شده را به دست آورید.



حل:

$$x(t) = \Pi\left(\frac{t-2.5}{3}\right) + 0.5\,\Pi(t-2.5)$$

$$\Pi(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} sinc\left(\frac{\omega}{2\pi}\right) \quad \Rightarrow \Pi\left(\frac{t}{3}\right) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} 3sinc\left(\frac{3\omega}{2\pi}\right)$$

$$\Rightarrow \Pi\left(\frac{t-2.5}{3}\right) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} 3e^{-j2.5\omega}sinc\left(\frac{3\omega}{2\pi}\right)$$

$$\Rightarrow \Pi(t-2.5) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} e^{-j2.5\omega}sinc\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$$

$$\Rightarrow \Pi\left(\frac{t-2.5}{3}\right) + 0.5\,\Pi(t-2.5) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} 3e^{-j2.5\omega}sinc\left(\frac{3\omega}{2\pi}\right) + 0.5e^{-j2.5\omega}sinc\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$$

$$\Rightarrow \mathrm{X}(j\omega) = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2.5\omega}\left(3sinc\left(\frac{3\omega}{2\pi}\right) + 0.5sinc\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)\right)$$

دکتر علی مالکی

ویژگی دوگانی

$$x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(\omega) \quad \Longrightarrow \quad X(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi x(-\omega)$$

مثال ۱۴: اثبات ویژگی دوگانی

ویژگی دوگانی تبدیل فوریه‌ی زمان- پیوسته را اثبات کنید.

حل:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

$$\Rightarrow 2\pi\, x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

$$\Rightarrow 2\pi\, x(-t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)e^{-j\omega t}d\omega$$

$$\Rightarrow 2\pi\, x(-\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$\Rightarrow X(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi x(-\omega)$$

مثال ۱۵: ویژگی دوگانی

با استفاده از ویژگی دوگانی تبدیل فوریه و زوج فوریه‌ی سیگنال پنجره، تبدیل فوریه‌ی $sinc(t)$ را بیابید.

حل:

$$\Pi(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} sinc\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$$

$$\Rightarrow sinc\left(\frac{t}{2\pi}\right) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi\Pi(-\omega)$$

$$\Rightarrow sinc\left(\frac{t}{2\pi}\right) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi\Pi(\omega)$$

$$\Rightarrow sinc(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \Pi\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$$

مثال ۱۶: ویژگی دوگانی

تبدیل فوریه‌ی سیگنال‌های زیر را بیابید.

الف: $x_1(t) = \frac{1}{jt+a}$ ب: $x_2(t) = \frac{2}{1+t^2}$

حل الف:

$$e^{-\alpha t}u(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{j\omega + \alpha}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{jt + \alpha} \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} 2\pi e^{\alpha\omega}u(-\omega)$$

حل ب:

$$e^{-\alpha|t|} \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}$$

$$\Rightarrow \frac{2\alpha}{\alpha^2 + t^2} \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} 2\pi e^{-\alpha|-\omega|} = 2\pi e^{-\alpha|\omega|}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{1 + t^2} \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} 2\pi e^{-|\omega|}$$

با توجه به ویژگی دوگانی انتظار می‌رود روابطی مشابه آنچه برای جابجایی، مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری در حوزه‌ی زمان مطرح شد در حوزه‌ی فرکانس هم برقرار باشد.

$$e^{+j\omega_0 t}x(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X\big(j(\omega-\omega_0)\big)$$

$$(-jt)x(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \frac{d}{d\omega}X(j\omega)$$

$$\frac{1}{-jt}x(t)+\pi x(0)\delta(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \int_{-\infty}^{\omega} X(\eta)d\eta$$

مثال ۱۷: اثبات ویژگی جابجایی فرکانسی

ویژگی جابجایی فرکانسی تبدیل فوریه‌ی زمان- پیوسته را اثبات کنید.

حل:

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$\Rightarrow X\big(j(\omega - \omega_0)\big) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j(\omega-\omega_0)t} dt$$

$$\Rightarrow X\big(j(\omega - \omega_0)\big) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(e^{+j\omega_0 t} x(t)\right) e^{-j\omega t} dt$$

$$\Rightarrow e^{+j\omega_0 t}\, x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X\big(j(\omega - \omega_0)\big)$$

مثال ۱۸: اثبات ویژگی مشتق‌گیری در حوزه‌ی فرکانس

ویژگی مشتق‌گیری در حوزه‌ی فرکانس تبدیل فوریه را اثبات کنید.

حل:

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$\Rightarrow \frac{d}{d\omega} X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)(-jt) e^{-j\omega t} dt$$

$$\Rightarrow (-jt)x(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \frac{d}{d\omega} X(j\omega)$$

رابطه‌ی پارسوال

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, g^*(t)\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega)G^*(j\omega)d\omega$$

در حالت خاص، اگر $f(t) = g(t) = x(t)$ باشد داریم:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x^*(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega)X^*(j\omega)d\omega$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega$$

$|\cdot|$ نشانگر اندازه‌ی سیگنال است.

این رابطه، انرژی سیگنال را در حوزه‌های زمان و فرکانس به هم مرتبط می‌سازد.

بیشتر بدانیم

برای هر سیگنال $v(t)$، کمیت $E \triangleq \int_a^b |v(t)|^2 dt$ تعریف انرژی سیگنال در فاصله‌ی زمانی $a < t < b$ است. ریشه‌ی این نامگذاری آن است که اگر $v(t)$ ولتاژ یک مقاومت ۱ اهم باشد E انرژی تلف‌شده در مقاومت در فاصله‌ی زمانی $a < t < b$ می‌باشد.

دکتر علی مالکی

مثال ۱۹: اثبات رابطه‌ی پارسوال

رابطه‌ی پارسوال برای تبدیل فوریه‌ی زمان- پیوسته را اثبات کنید.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, g^*(t)\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega)G^*(j\omega)d\omega$$

حل:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g^*(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} G(j\omega)e^{j\omega t}d\omega\right]^* dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\int_{-\infty}^{+\infty} G^*(j\omega)e^{-j\omega t}d\omega\, dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)G^*(j\omega)e^{-j\omega t}d\omega\, dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)G^*(j\omega)e^{-j\omega t}dt\, d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} G^*(j\omega)\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt\, d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega)G^*(j\omega)d\omega$$

مثال ۲۰: رابطه‌ی پارسوال

حاصل انتگرال زیر را محاسبه نمایید.

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\sin \pi t}{\pi t}\right)^2 dt = ?$$

حل:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\sin \pi t}{\pi t}\right)^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(sinc(t)\right)^2 dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}|sinc(t)|^2 dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\Pi\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)\right|^2 d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\cdot \omega \Big|_{-\pi}^{\pi}$$

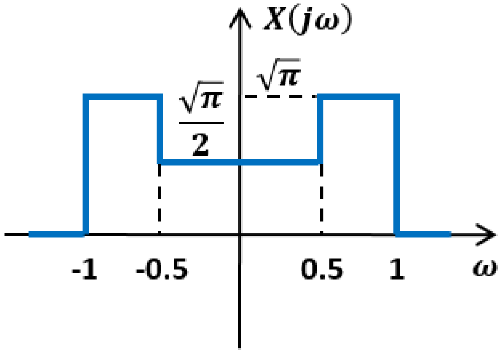
$$= \frac{1}{2\pi}\left(\pi - (-\pi)\right) = 1$$

مثال ۲۱: رابطه‌ی پارسوال

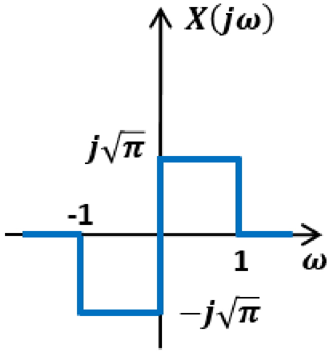
برای هر یک از $X(j\omega)$های داده شده، انرژی کل (E) سیگنال $x(t)$ را محاسبه نمایید.

$$E=\int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|^2dt$$

الف:



ب:



حل الف:

$$E=\int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|^2dt \;=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|X(j\omega)|^2d\omega \;=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{\pi}{4}+\pi\right)\;=\frac{5}{8}$$

حل ب:

$$E=\int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|^2dt \;=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|X(j\omega)|^2d\omega \;=\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\pi d\omega \;=\frac{1}{2\pi}\times 2\pi \;=1$$

ویژگی کانولوشن

$$x(t) * h(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(j\omega) \cdot H(j\omega)$$

مثال ۲۲: اثبات ویژگی کانولوشن

ویژگی کانولوشن تبدیل فوریه‌ی زمان- پیوسته را اثبات کنید.

$$x(t) * h(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(j\omega) \cdot H(j\omega)$$

حل:

$$\mathcal{F}\{x(t) * h(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \big(x(t) * h(t)\big) e^{-j\omega t} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau \, e^{-j\omega t} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t-\tau) e^{-j\omega t} \, d\tau \, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t-\tau) e^{-j\omega t} \, dt \, d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t-\tau) e^{-j\omega \tau} e^{-j\omega (t-\tau)} \, dt d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) e^{-j\omega \tau} \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-\tau) e^{-j\omega (t-\tau)} \, dt \, d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) e^{-j\omega \tau} H(j\omega) d\tau \ = H(j\omega) \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) e^{-j\omega \tau} d\tau \ = X(j\omega) \cdot H(j\omega)$$

اهمیت ویژگی کانولوشن در کاربرد:

حوزه‌ی زمان

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t)$$

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

$$\xleftrightarrow{\mathcal{F}}$$

حوزه‌ی فرکانس

$$X(j\omega) \longrightarrow \boxed{H(j\omega)} \longrightarrow Y(j\omega)$$

$$Y(j\omega) = X(j\omega) \cdot H(j\omega)$$

پاسخ فرکانسی سیستم‌های LTI پایدار زمان- پیوسته:

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}$$

اتصال سری دو سیستم:

در حوزه‌ی زمان

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h_1(t)} \longrightarrow \boxed{h_2(t)} \longrightarrow y(t) \quad \equiv \quad x(t) \longrightarrow \boxed{h_1(t) * h_2(t)} \longrightarrow y(t)$$

در حوزه‌ی فرکانس

$$X(j\omega) \longrightarrow \boxed{H_1(j\omega)} \longrightarrow \boxed{H_2(j\omega)} \longrightarrow Y(j\omega) \quad \equiv \quad X(j\omega) \longrightarrow \boxed{H_1(j\omega) \cdot H_2(j\omega)} \longrightarrow Y(j\omega)$$

مثال ۲۲: ویژگی کانولوشن

پاسخ فرکانسی سیستم مشتق‌گیر و سیستم تاخیر خالص را تعیین نمایید.

حل:

$$y(t) = \frac{d}{dt}x(t)$$

$$\Longrightarrow Y(j\omega) = (j\omega)X(j\omega)$$

$$\Longrightarrow H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = j\omega$$

$$y(t) = x(t - t_0)$$

$$\Longrightarrow Y(j\omega) = e^{-j\omega t_0}X(j\omega)$$

$$\Longrightarrow H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = e^{-j\omega t_0}$$

مثال ۲۴: محاسبه‌ی پاسخ سیستم LTI در حوزه‌ی فرکانس

سیستمی LTI با پاسخ ضربه‌ی $h(t)=e^{-bt}u(t), b>0$ توصیف شده است. پاسخ این سیستم را به ورودی $x(t)=e^{-at}u(t), a>0$ به دست آورید.

حل:

$$x(t)=e^{-at}u(t), a>0 \Longrightarrow X(j\omega)=\frac{1}{j\omega+a}$$

$$h(t)=e^{-bt}u(t), b>0 \Longrightarrow H(j\omega)=\frac{1}{j\omega+b}$$

$$Y(j\omega)=X(j\omega)\cdot H(j\omega) \Longrightarrow Y(j\omega)=\frac{1}{(j\omega+a)(j\omega+b)}$$

برای $a\neq b$: $Y(j\omega)=\dfrac{\frac{1}{b-a}}{j\omega+a}+\dfrac{\frac{1}{a-b}}{j\omega+b}=\dfrac{1}{b-a}\left(\dfrac{1}{j\omega+a}-\dfrac{1}{j\omega+b}\right)$

$$\Longrightarrow y(t)=\frac{1}{b-a}\left(e^{-at}-e^{-bt}\right)u(t)$$

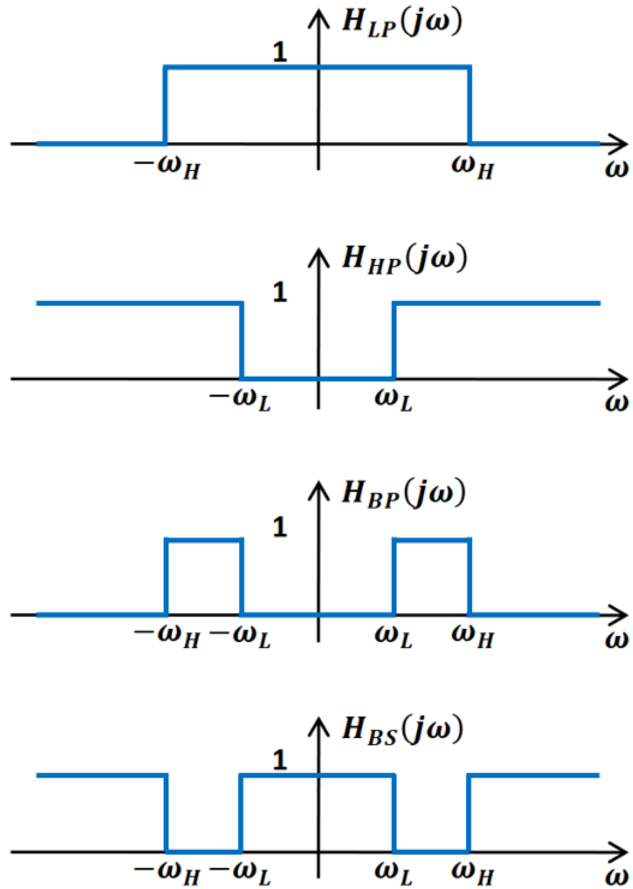
برای $a=b$: $Y(j\omega)=\dfrac{1}{(j\omega+a)^2}$

$$e^{-at}u(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{j\omega+a} \Longrightarrow (-jt)e^{-at}u(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \frac{d}{d\omega}\left(\frac{1}{j\omega+a}\right)=\frac{-j}{(j\omega+a)^2}$$

$$te^{-at}u(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{(j\omega+a)^2} \qquad \Longrightarrow y(t)=te^{-at}u(t)$$

بیشتر بدانیم: فیلترهای فرکانس‌گزین

فیلترهای فرکانس‌گزین در حالت ایده‌آل، سیستم‌هایی هستند که محدوده‌ای از مولفه‌های فرکانسی سیگنال را حذف کرده و دیگر مولفه‌ها را بدون تغییر باقی می‌گذارند. پاسخ فرکانسی این سیستم‌ها در محدوده‌ای از فرکانس که می‌خواهیم مولفه‌های فرکانسی سیگنال حذف شوند مقدار صفر دارد در حالی که در دیگر فرکانس‌ها مقدار یک دارد. یادآوری می‌گردد که تبدیل فوریه‌ی خروجی فیلتر برابر حاصل‌ضرب پاسخ فرکانسی در تبدیل فوریه‌ی ورودی است. از این‌رو چنانچه پاسخ فرکانسی در محدوده‌ای از فرکانس مقدار صفر داشته باشد مولفه‌های متناظر در خروجی صفر می‌شوند و چنانچه پاسخ فرکانسی در محدوده‌ای از فرکانس دارای مقدار یک باشد مولفه‌های متناظر در خروجی و ورودی یکسان خواهند بود. محدوده‌ای از فرکانس که پاسخ فرکانسی مقدار صفر دارد در اصطلاح باند توقف[۱] و محدوده‌ای که پاسخ فرکانسی مقدار یک دارد در اصطلاح باند عبور[۲] نامیده می‌شود. از آنجا که در حالت زمان- پیوسته، فرکانس‌های حول و حوش صفر هرتز نشانگر فرکانس‌های پایین و فرکانس‌های حول و حوش بی‌نهایت نشانگر فرکانس‌های بسیار بالا است فیلترها را می‌توان به پایین‌گذر[۳]، بالاگذر[۴]، میان‌گذر[۵] و میان‌نگذر[۶] تقسیم کرد. پاسخ فرکانسی این فیلترهای فرکانس‌گزین ایده‌آل به ترتیب در شکل زیر رسم شده است. فرکانسی که مقدار پاسخ فرکانسی از صفر به یک یا برعکس تغییر می‌کند در اصطلاح فرکانس قطع[۷] فیلتر نامیده می‌شود.



نوع خاصی از فیلتر فرکانس گزین هم وجود دارد که فیلتر ناچ[1] نامیده می‌شود.

مثال ۲۵: فیلتر پایین‌گذر ایده‌آل

پاسخ فیلتر پایین‌گذر ایده‌آل با فرکانس قطع بالای ω_c را به ورودی $x(t)$ داده شده تعیین نمایید.

$$x(t)=\frac{\omega_i}{\pi}sinc\left(\frac{\omega_i}{\pi}t\right)$$

حل:

$$sinc(t)\overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow}\Pi\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)\qquad\Rightarrow sinc\left(\frac{\omega_i}{\pi}t\right)\overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow}\frac{\pi}{\omega_i}\Pi\left(\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\pi}{\omega_i}\omega\right)=\frac{\pi}{\omega_i}\Pi\left(\frac{\omega}{2\omega_i}\right)$$

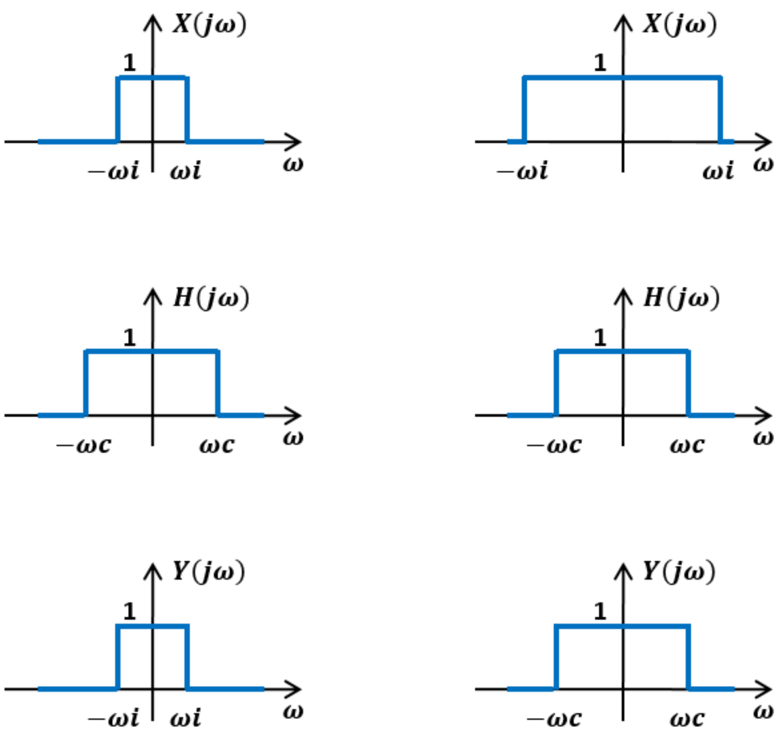
$$\Rightarrow\frac{\omega_i}{\pi}sinc\left(\frac{\omega_i}{\pi}t\right)\overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow}\Pi\left(\frac{\omega}{2\omega_i}\right)$$

$$Y(j\omega)=X(j\omega)\cdot H(j\omega)$$

$$\Rightarrow Y(j\omega)=\begin{cases}1 & |\omega|<\min\{\omega_c,\omega_i\}\\ 0 & |\omega|>\min\{\omega_c,\omega_i\}\end{cases}$$

$$\Rightarrow y(t)=\begin{cases}\frac{\omega_i}{\pi}sinc\left(\frac{\omega_i}{\pi}t\right) & \omega_i<\omega_c\\ \frac{\omega_c}{\pi}sinc\left(\frac{\omega_c}{\pi}t\right) & \omega_i\geq\omega_c\end{cases}$$

حالت $\omega_i<\omega_c$ حالت $\omega_i\geq\omega_c$



ویژگی ضرب (ویژگی مدولاسیون)

$$x_s(t) \cdot x_c(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{2\pi} \cdot X_s(j\omega) * X_c(j\omega)$$

مثال ۲۶: اثبات ویژگی ضرب

ویژگی ضرب تبدیل فوریه‌ی زمان- پیوسته را اثبات کنید.

$$x_s(t)\cdot x_c(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2\pi}\cdot X_s(j\omega) * X_c(j\omega)$$

حل:

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{2\pi}\cdot X_s(j\omega) * X_c(j\omega)\right\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{2\pi}\cdot X_s(j\omega) * X_c(j\omega)\right)e^{j\omega t}d\omega$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}X_s(j\eta)X_c\big(j(\omega-\eta)\big)d\eta\, e^{j\omega t}d\omega$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}X_s(j\eta)X_c\big(j(\omega-\eta)\big)e^{j\omega t}d\eta\, d\omega$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}X_s(j\eta)X_c\big(j(\omega-\eta)\big)e^{j\omega t}d\omega\, d\eta$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}X_s(j\eta)X_c\big(j(\omega-\eta)\big)e^{j\eta t}e^{j(\omega-\eta)t}d\omega\, d\eta$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}X_s(j\eta)e^{j\eta t}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}X_c\big(j(\omega-\eta)\big)e^{j(\omega-\eta)t}d\omega\, d\eta$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}X_s(j\eta)e^{j\eta t}\cdot x_c(t)d\eta$$

$$= x_c(t)\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}X_s(j\eta)e^{j\eta t}d\eta$$

$$= x_s(t)\cdot x_c(t)$$

مثال ۲۷: ویژگی ضرب

تبدیل فوریه‌ی سیگنال روبرو را بیابید.

$$x(t)=\frac{\sin(t)\cdot\sin\left(\frac{t}{2}\right)}{\pi t^2}$$

حل:

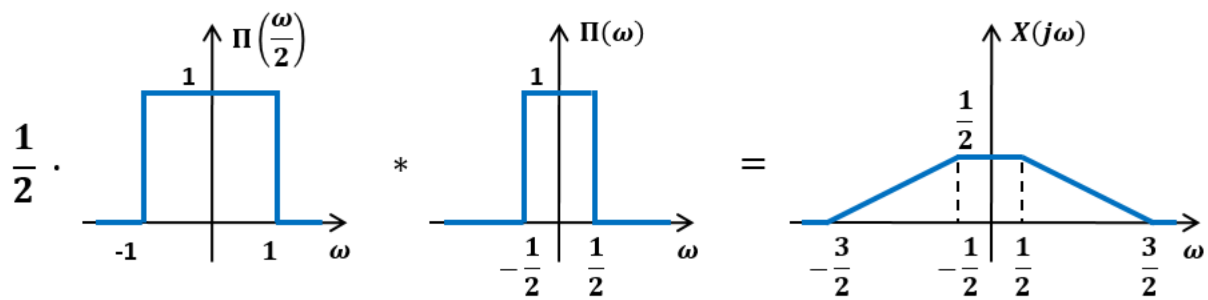
$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\sin t}{t}\cdot\frac{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}{\frac{t}{2}}=\frac{1}{2\pi}\cdot sinc\left(\frac{t}{\pi}\right)\cdot sinc\left(\frac{t}{2\pi}\right)$$

$$sinc(t)\overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow}\Pi\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)\quad\Longrightarrow sinc\left(\frac{t}{\pi}\right)\overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow}\pi\,\Pi\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

$$\Longrightarrow sinc\left(\frac{t}{2\pi}\right)\overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow}2\pi\,\Pi(\omega)$$

$$\Longrightarrow x(t)\overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow}\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{2\pi}\cdot\pi\cdot 2\pi\cdot\Pi\left(\frac{\omega}{2}\right)*\Pi(\omega)$$

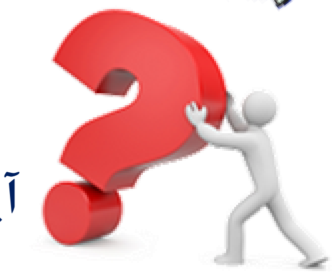
$$\Longrightarrow \mathcal{F}\{x(t)\}=\frac{1}{2}\Pi\left(\frac{\omega}{2}\right)*\Pi(\omega)$$



فهرست مطالب

- معرفی تبدیل فوریه‌ی زمان- پیوسته
- ویژگی‌های تبدیل فوریه‌ی زمان- پیوسته
- تبدیل فوریه‌ی تعمیم‌یافته
- تبدیل فوریه‌ی تعمیم‌یافته‌ی سیگنال‌های متناوب
- سیستم‌های توصیف شده با معادله دیفرانسیل
- مثال‌های کاربردی
- مثال‌های مروری
- مثال‌های نرم‌افزاری
- تمرین‌های تئوری
- تمرین‌های نرم‌افزاری

آیا سیگنال‌های k، $e^{j\omega_0 t}$، $\cos\omega_0 t$، $\sin\omega_0 t$ و $u(t)$ تبدیل فوریه‌ی معمولی دارند؟



خیر، زیرا مطلق انتگرال‌پذیر نیستند.

با مجاز شمردن سیگنال ضربه واحد، تبدیل فوریه‌ی تعمیم‌یافته این سیگنال‌ها محاسبه می‌گردد.

$$\delta(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} 1 \qquad \Longrightarrow \qquad 1 \xleftrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi\delta(-\omega) = 2\pi\delta(\omega)$$

مثال ۲۸: تبدیل فوریه‌ی تعمیم‌یافته‌ی سیگنال‌های پرکاربرد

تبدیل فوریه‌ی تعمیم‌یافته‌ی سیگنال‌های زیر را به دست آورید.

الف: $x(t) = k$ ب: $x(t) = e^{j\omega_0 t}$ ج: $x(t) = \sin \omega_0 t$ د: $x(t) = \cos \omega_0 t$

حل الف:

$$1 \xleftrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi\delta(\omega) \qquad \Longrightarrow k \xleftrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi k\delta(\omega)$$

حل ب:

$$\Longrightarrow e^{j\omega_0 t} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$$

حل ج:

$$\sin \omega_0 t = \frac{1}{2j}\left(e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}\right)$$

$$e^{j\omega_0 t} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$$

$$e^{-j\omega_0 t} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi\delta(\omega + \omega_0) \qquad \Longrightarrow \sin \omega_0 t \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \pi j\{\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)\}$$

حل د:

$$\cos \omega_0 t = \frac{1}{2}\left(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}\right) \qquad \Longrightarrow \cos \omega_0 t \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \pi\{\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)\}$$

مثال ۲۹: تبدیل فوریه‌ی تعمیم‌یافته

سیستمی LTI با پاسخ ضربه‌ی $h(t) = e^{-t}u(t)$ توصیف شده است.
پاسخ این سیستم را به ورودی $x(t)$ داده شده به دست آورید.

$$x(t) = \sum_{k=-3}^{3} a_k e^{jk2\pi t}$$

حل در حوزه فرکانس:

$$h(t) = e^{-t}u(t) \quad \Longrightarrow \quad H(j\omega) = \frac{1}{j\omega + 1}$$

$$e^{jk2\pi t} \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} 2\pi\delta(\omega - 2\pi k) \quad \Longrightarrow \quad x(t) = \sum_{k=-3}^{3} a_k e^{jk2\pi t} \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \sum_{k=-3}^{3} 2\pi a_k \delta(\omega - 2\pi k)$$

$$\Longrightarrow Y(j\omega) = X(j\omega) \cdot H(j\omega) = \sum_{k=-3}^{3} 2\pi a_k \delta(\omega - 2\pi k) \cdot \frac{1}{j\omega + 1}$$

$$\Longrightarrow Y(j\omega) = \sum_{k=-3}^{3} 2\pi a_k \cdot \frac{1}{j2\pi k + 1} \cdot \delta(\omega - 2\pi k) \quad \Longrightarrow y(t) = \sum_{k=-3}^{3} \frac{a_k}{j2\pi k + 1} e^{j2\pi kt}$$

حل در حوزه زمان:

$$y(t) = \sum_{k=-3}^{3} a_k \left. \frac{1}{j\omega + 1} \right|_{\omega = 2\pi k} e^{j2\pi kt}$$

$$\Longrightarrow y(t) = \sum_{k=-3}^{3} \frac{a_k}{j2\pi k + 1} e^{j2\pi kt}$$

$$e^{jk\omega_0 t} \longrightarrow \boxed{H(j\omega)} \longrightarrow H(j\omega)\Big|_{\omega = k\omega_0} e^{jk\omega_0 t}$$

تابع ویژه — پاسخ فرکانسی — مقدار ویژه — تابع ویژه

فهرست مطالب

- معرفی تبدیل فوریه‌ی زمان- پیوسته
- ویژگی‌های تبدیل فوریه‌ی زمان- پیوسته
- تبدیل فوریه‌ی تعمیم‌یافته
- تبدیل فوریه‌ی تعمیم‌یافته‌ی سیگنال‌های متناوب
- سیستم‌های توصیف شده با معادله دیفرانسیل
- مثال‌های کاربردی
- مثال‌های مروری
- مثال‌های نرم‌افزاری
- تمرین‌های تئوری
- تمرین‌های نرم‌افزاری

نکته: رهیافت محاسبه‌ی تبدیل فوریه‌ی تعمیم‌یافته‌ی سیگنال‌های متناوب

برای به دست آوردن تبدیل فوریه‌ی تعمیم‌یافته‌ی سیگنال‌های متناوب باید ابتدا سیگنال را به صورت بسط سری فوریه‌ی نمایی بازنمایی کنیم. سپس با دانستن تبدیل فوریه‌ی سیگنال نمایی مختلط و بر اساس ویژگی خطی بودن تبدیل فوریه، تبدیل فوریه‌ی تعمیم‌یافته‌ی سیگنال را به دست آوریم. دقت کنید که تبدیل فوریه‌ی تعمیم‌یافته‌ی سیگنال‌های متناوب، همواره قطاری از ضربه‌ها خواهد بود.

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \, e^{jk\omega_0 t}$$

$$e^{jk\omega_0 t} \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} 2\pi \, \delta(\omega - k\omega_0)$$

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \, e^{jk\omega_0 t} \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi \, a_k \, \delta(\omega - k\omega_0)$$

مثال ۳۰: تبدیل فوریه‌ی تعمیم‌یافته‌ی سیگنال متناوب

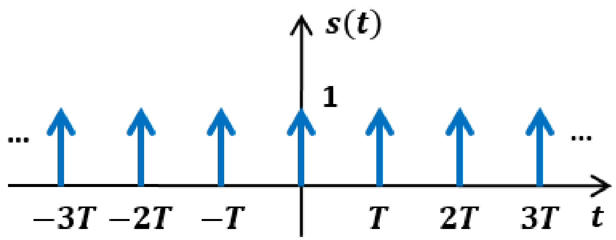
تبدیل فوریه سیگنال $s(t)$ داده شده را به دست آورید.

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT)$$

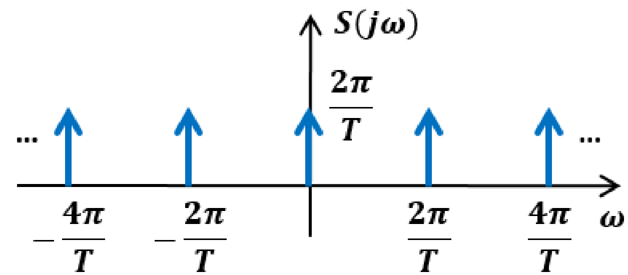
حل:

$$a_k = \frac{1}{T}\int_{<T>} x(t)\, e^{-jk\frac{2\pi}{T}t}\, dt = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} \delta(t)\, e^{-jk\frac{2\pi}{T}t}\, dt = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta(t)\, dt = \frac{1}{T}$$

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\frac{2\pi}{T}t} \quad \Longrightarrow s(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} e^{jk\frac{2\pi}{T}t} \quad \Longrightarrow S(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{2\pi}{T}\delta\left(\omega - k\frac{2\pi}{T}\right)$$



$$\overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow}$$



فهرست مطالب

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k} \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \sum_{k=0}^{N} a_k \,(j\omega)^k\, Y(j\omega) = \sum_{k=0}^{M} b_k \,(j\omega)^k\, X(j\omega)$$

$$\Longrightarrow Y(j\omega)\sum_{k=0}^{N} a_k (j\omega)^k = X(j\omega)\sum_{k=0}^{M} b_k (j\omega)^k$$

$$\Longrightarrow \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k (j\omega)^k}{\sum_{k=0}^{N} a_k (j\omega)^k}$$

$$\Longrightarrow H(j\omega) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k (j\omega)^k}{\sum_{k=0}^{N} a_k (j\omega)^k}$$

مثال ۳۱: سیستم توصیف شده با معادله دیفرانسیل

سیستم LTI پایداری را در نظر بگیرید که با معادله دیفرانسیل زیر توصیف شده است. پاسخ فرکانسی و پاسخ ضربه‌ی سیستم را به دست آورید.

$$\frac{dy(t)}{dt} + a\,y(t) = x(t) \qquad a > 0$$

حل:

$$(j\omega)Y(j\omega) + aY(j\omega) = X(j\omega)$$

$$\Longrightarrow\ Y(j\omega)(j\omega + a) = X(j\omega)$$

$$\Longrightarrow\ \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{1}{j\omega + a} \qquad \Longrightarrow\ H(j\omega) = \frac{1}{j\omega + a} \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} h(t) = e^{-at}u(t)$$

مثال ۳۲: سیستم توصیف شده با معادله دیفرانسیل

سیستم LTI پایداری را در نظر بگیرید که با معادله دیفرانسیل روبرو توصیف شده است.

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+4\frac{dy(t)}{dt}+3\,y(t)=\frac{dx(t)}{dt}+2x(t)$$

الف: پاسخ فرکانسی و پاسخ ضربه‌ی این سیستم را به دست آورید.

ب: پاسخ این سیستم را به ورودی $x(t)=e^{-t}u(t)$ تعیین کنید.

حل الف:

$$(j\omega)^2Y(j\omega)+4(j\omega)Y(j\omega)+3Y(j\omega)=(j\omega)X(j\omega)+2X(j\omega)$$

$$\Rightarrow Y(j\omega)\{(j\omega)^2+4j\omega+3\}=X(j\omega)\{j\omega+2\} \qquad \Rightarrow \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}=\frac{j\omega+2}{(j\omega)^2+4j\omega+3}$$

$$\Rightarrow H(j\omega)=\frac{j\omega+2}{(j\omega)^2+4j\omega+3}=\frac{j\omega+2}{(j\omega+3)(j\omega+1)}=\frac{A}{j\omega+3}+\frac{B}{j\omega+1}$$

$$A=(j\omega+3)\cdot H(j\omega)\Big|_{j\omega=-3}=\frac{j\omega+2}{j\omega+1}\Big|_{j\omega=-3}=\frac{1}{2}$$

$$B=(j\omega+1)\cdot H(j\omega)\Big|_{j\omega=-1}=\frac{j\omega+2}{j\omega+3}\Big|_{j\omega=-1}=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow H(j\omega)=\frac{\frac{1}{2}}{j\omega+3}+\frac{\frac{1}{2}}{j\omega+1} \qquad \Rightarrow h(t)=\frac{1}{2}e^{-3t}u(t)+\frac{1}{2}e^{-t}u(t)$$

ب: پاسخ این سیستم را به ورودی $x(t)=e^{-t}u(t)$ تعیین کنید.

حل ب:

$$x(t)=e^{-t}u(t)\overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow}X(j\omega)=\frac{1}{j\omega+1}$$

$$Y(j\omega)=H(j\omega)\cdot X(j\omega)=\frac{j\omega+2}{(j\omega+3)(j\omega+1)}\cdot\frac{1}{j\omega+1}\quad\Rightarrow Y(j\omega)=\frac{j\omega+2}{(j\omega+3)(j\omega+1)^2}$$

$$\Rightarrow Y(j\omega)=\frac{A}{j\omega+3}+\frac{B}{(j\omega+1)^2}+\frac{C}{j\omega+1}$$

$$A=(j\omega+3)\cdot Y(j\omega)\Big|_{j\omega=-3}=\frac{j\omega+2}{(j\omega+1)^2}\Big|_{j\omega=-3}=-\frac{1}{4}$$

$$B=(j\omega+1)^2\cdot Y(j\omega)\Big|_{j\omega=-1}=\frac{j\omega+2}{j\omega+3}\Big|_{j\omega=-1}=\frac{1}{2}$$

$$C=\frac{1}{1!}\frac{d}{d(j\omega)}\left[(j\omega+1)^2\cdot Y(j\omega)\right]\Big|_{j\omega=-1}=\frac{d}{d(j\omega)}\left(\frac{j\omega+2}{j\omega+3}\right)\Big|_{j\omega=-1}$$

$$=\frac{j\omega+3-(j\omega+2)}{(j\omega+3)^2}\Big|_{j\omega=-1}=\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow Y(j\omega)=\frac{-\frac{1}{4}}{j\omega+3}+\frac{\frac{1}{2}}{(j\omega+1)^2}+\frac{\frac{1}{4}}{j\omega+1}$$

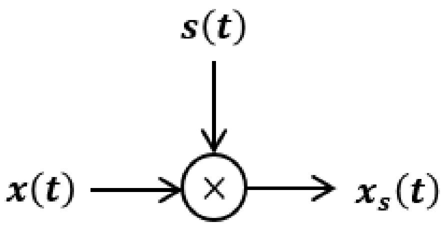
$$\Rightarrow y(t)=-\frac{1}{4}e^{-3t}u(t)+\frac{1}{2}te^{-t}u(t)+\frac{1}{4}e^{-t}u(t)$$

فهرست مطالب

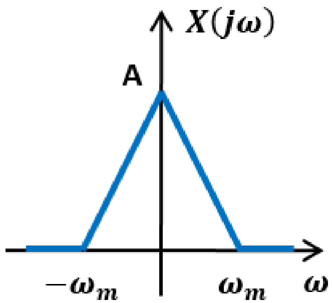
- معرفی تبدیل فوریه‌ی زمان- پیوسته
- ویژگی‌های تبدیل فوریه‌ی زمان- پیوسته
- تبدیل فوریه‌ی تعمیم‌یافته
- تبدیل فوریه‌ی تعمیم‌یافته‌ی سیگنال‌های متناوب
- سیستم‌های توصیف شده با معادله دیفرانسیل
- مثال‌های کاربردی
- مثال‌های مروری
- مثال‌های نرم‌افزاری
- تمرین‌های تئوری
- تمرین‌های نرم‌افزاری

مثال ۳۳: نمونه‌برداری

نمودار بلوکی نوعی نمونه‌بردار در شکل زیر نشان داده شده است که در آن، $x(t)$ سیگنال آنالوگ، $s(t)$ سیگنال نمونه‌برداری و $x_s(t)$ سیگنال نمونه‌برداری شده را نشان می‌دهد.



$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_s)\,, T_s = \frac{1}{f_s} \quad , \omega_s = 2\pi f_s$$



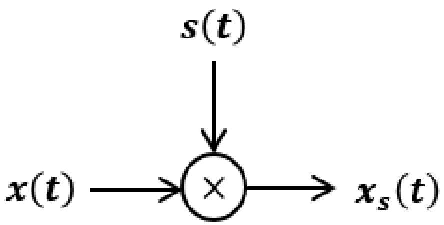
الف: برای $X(j\omega)$ داده شده، $X_s(j\omega)$ را به دست آورید.

ب: طیف فرکانسی $X_s(j\omega)$ را به ازای $\omega_s = 4\omega_m$، $\omega_s = 2\omega_m$ و $\omega_s = \omega_m$ رسم کنید.

ج: در چه شرایطی می‌توان از سیگنال نمونه‌برداری شده، سیگنال اصلی را بازسازی نمود؟

مثال ۳۳: نمونه‌برداری

نمودار بلوکی نوعی نمونه‌بردار در شکل زیر نشان داده شده است که در آن، $x(t)$ سیگنال آنالوگ، $s(t)$ سیگنال نمونه‌برداری و $x_s(t)$ سیگنال نمونه‌برداری شده را نشان می‌دهد.



$$s(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t-kT_s)\,,T_s=\frac{1}{f_s}\quad,\omega_s=2\pi f_s$$

الف: برای $X(j\omega)$ داده شده، $X_s(j\omega)$ را به دست آورید.

حل الف به شیوه تحلیلی:

$$a_k=\frac{1}{T_s}\,,\qquad s(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{T_s}e^{jk\frac{2\pi}{T_s}t}\quad\Longrightarrow S(j\omega)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{2\pi}{T_s}\delta\left(\omega-k\frac{2\pi}{T_s}\right)$$

$$x_s(t)=x(t)\cdot s(t)\quad\Longrightarrow X_s(j\omega)=\frac{1}{2\pi}\cdot X(j\omega)*S(j\omega)$$

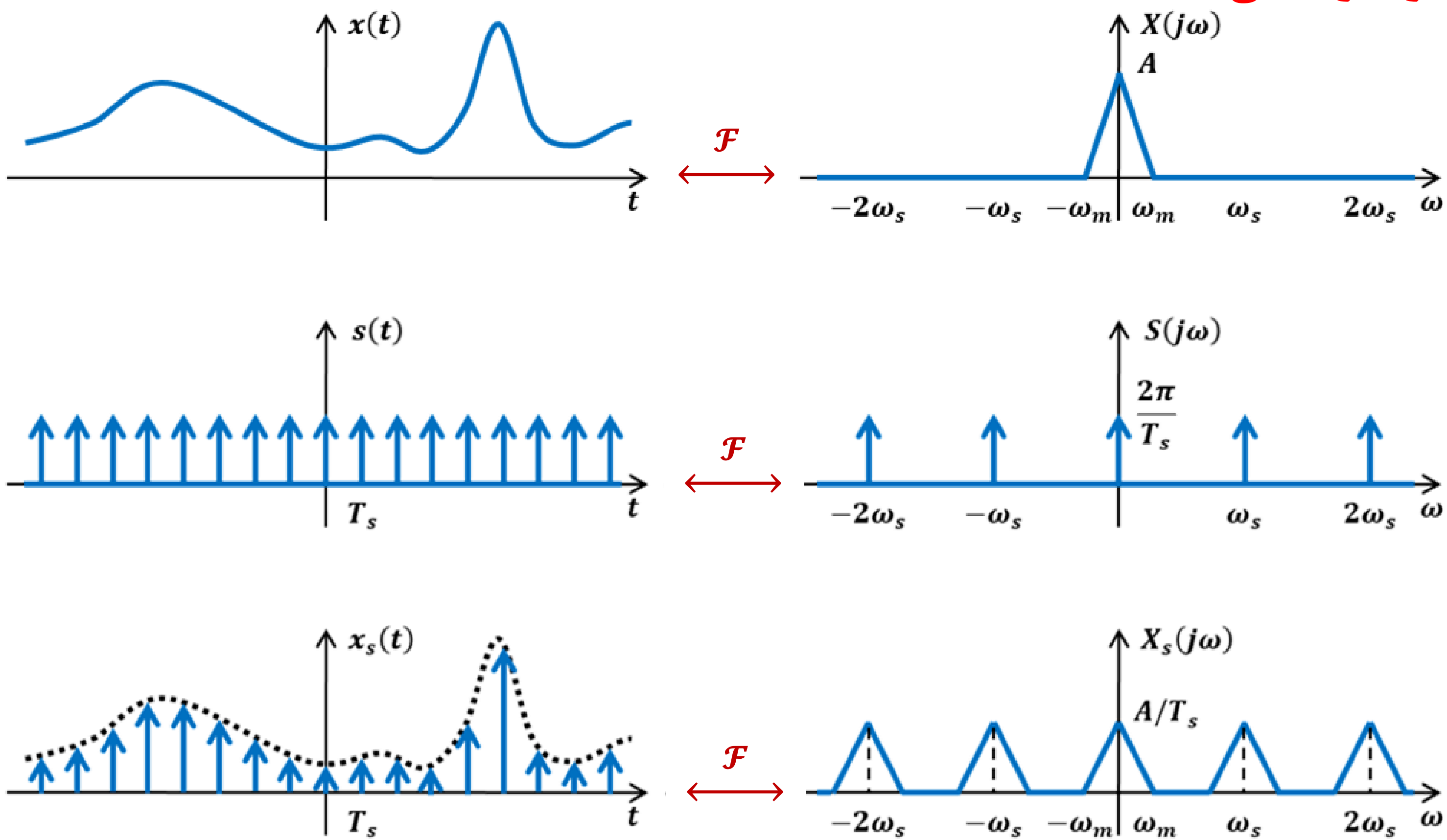
$$\Longrightarrow X_s(j\omega)=\frac{1}{2\pi}\cdot X(j\omega)*\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{2\pi}{T_s}\delta\left(\omega-k\frac{2\pi}{T_s}\right)$$

$$\Longrightarrow X_s(j\omega)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{T_s}X\left(j\left(\omega-k\frac{2\pi}{T_s}\right)\right)$$

$$s(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t-kT_s) \quad \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \quad S(j\omega)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{2\pi}{T_s}\delta(\omega-k\omega_s)$$

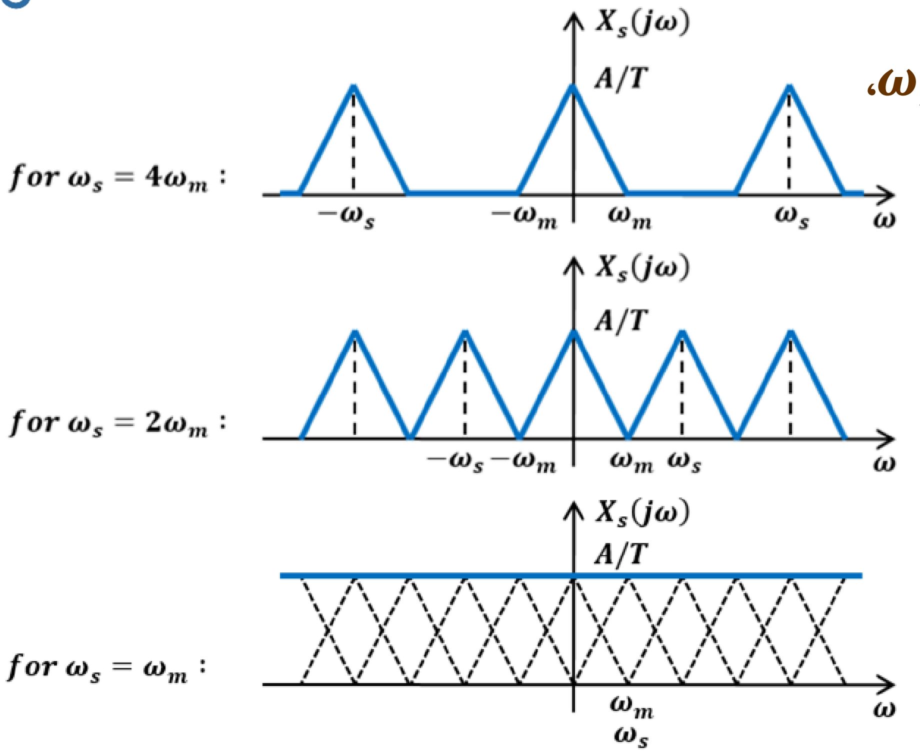
$$x_s(t)=x(t)\cdot s(t) \quad \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \quad X_s(j\omega)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{T_s}X\big(j(\omega-k\omega_s)\big)$$

حل الف به شیوه ترسیمی:



ب: طیف فرکانسی $X_s(j\omega)$ را به ازای $\omega_s = 4\omega_m$، $\omega_s = 2\omega_m$ و $\omega_s = \omega_m$ رسم کنید.

حل ب:

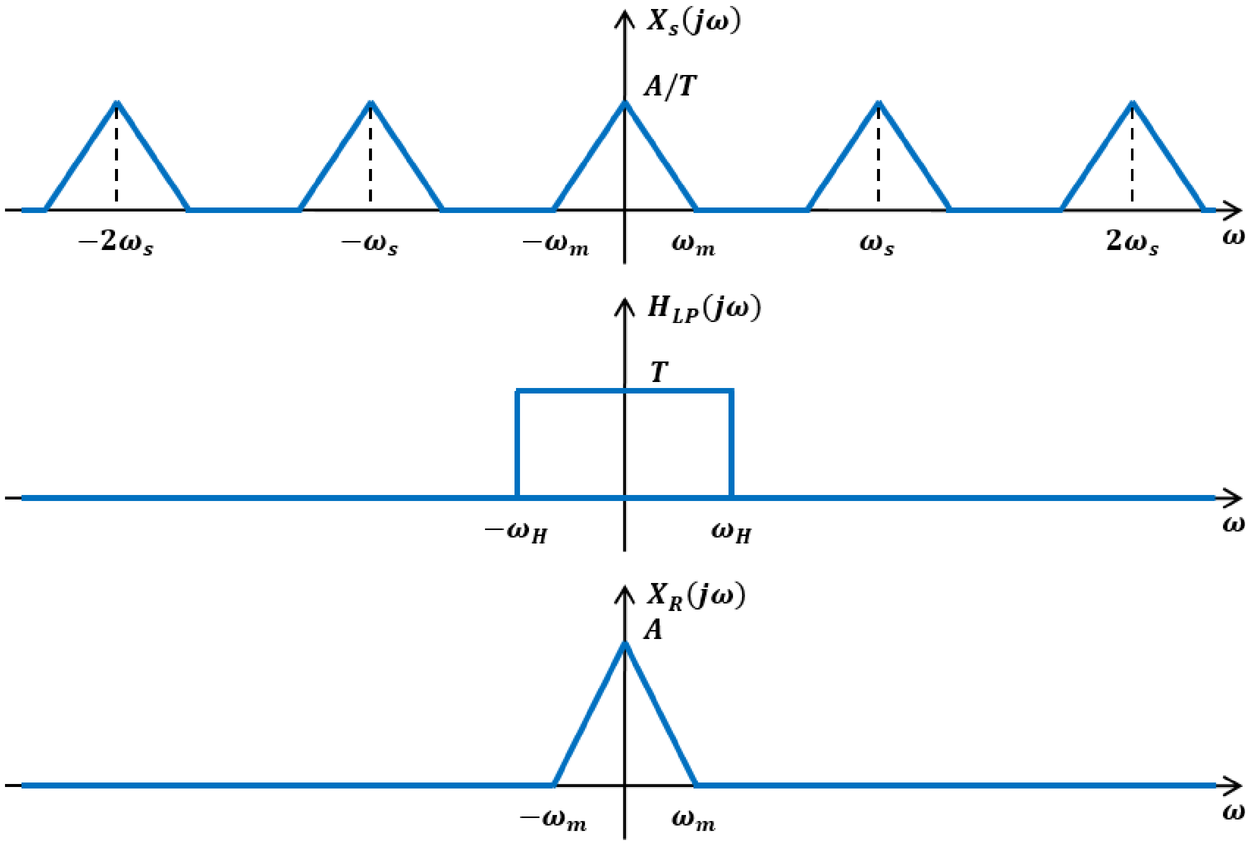


بیشتر بدانیم: تداخل فرکانسی

چنانچه به واسطه‌ی نامناسب انتخاب کردن فرکانس نمونه‌برداری (بسته به بالاترین مولفه‌ی فرکانسی سیگنال)، طیف‌های آینه‌ای با هم و با طیف باند پایه (حول فرکانس صفر) همپوشانی پیدا کنند در اصطلاح گفته می‌شود «تداخل فرکانسی[۱]» رخ داده است. در صورت بروز تداخل فرکانسی، دیگر نمی‌توان سیگنال اصلی را از سیگنال نمونه‌برداری شده به درستی بازسازی کرد.

ج: در چه شرایطی می‌توان از سیگنال نمونه‌برداری شده، سیگنال اصلی را بازسازی نمود؟

حل ج:



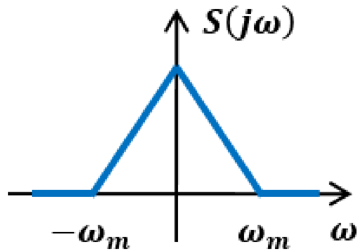
بیشتر بدانیم: نرخ نمونه‌برداری نایکوئیست

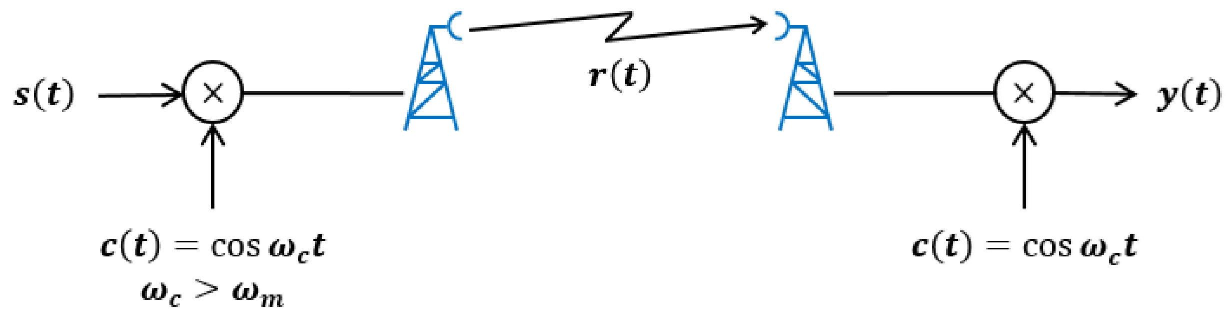
برای اینکه بتوان سیگنال را از نمونه‌های آن بازسازی نمود لازم است نمونه‌برداری با نرخ بالاتر از دو برابر بالاترین مولفه‌ی فرکانسی سیگنال انجام گردد. دو برابر بالاترین مولفه‌ی فرکانسی سیگنال در اصطلاح «نرخ نمونه‌برداری نایکوئیست[۱]» نامیده می‌شود. در عمل، معمولا نمونه‌برداری با نرخ ۵ تا ۱۰ برابر بالاترین مولفه‌ی فرکانسی سیگنال انجام می‌گردد تا با یک فیلتر غیر ایده‌آل معقول نیز بتوان سیگنال را از نمونه‌ها بازسازی کرد.

همچنین برای پرهیز از اثر تداخلی نویزهای فرکانس بالا بر طیف سیگنال، سیگنال را پیش از نمونه‌برداری، با یک فیلتر پایین‌گذر ضد تداخل[۲] با فرکانس قطع بالای کوچکتر از نصف فرکانس نمونه‌برداری فیلتر می‌کنند.

مثال ۳۴: مدولاسیون دامنه در سیستم‌های مخابراتی

شکل زیر یک سیستم مخابراتی را نشان می‌دهد که در آن سیگنال $x(t)$ توسط حامل $c(t)$ مدوله می‌شود تا مناسب ارسال گردد. در گیرنده نیز سیگنال دریافتی در $c(t)$ ضرب می‌شود تا بستر برای بازسازی سیگنال اصلی فراهم گردد.

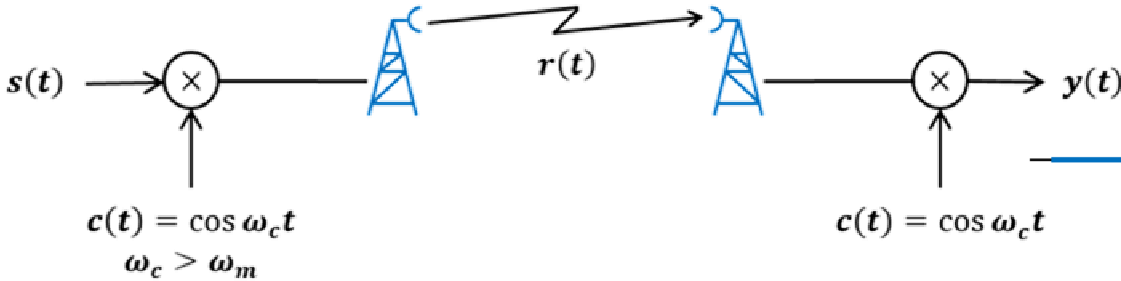


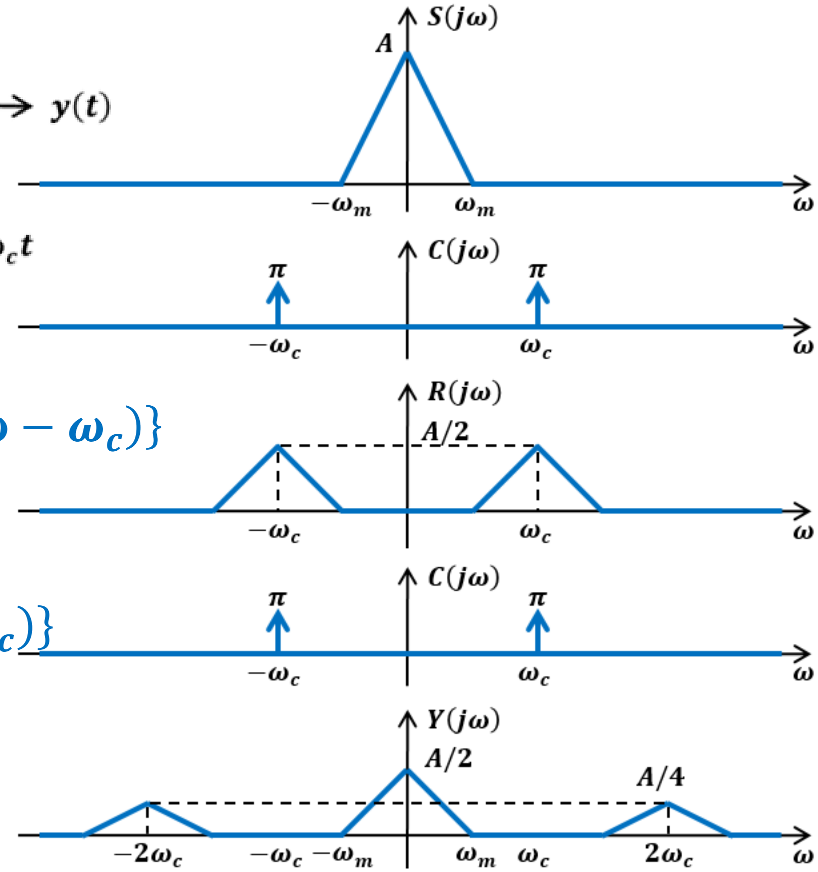


الف: برای $c(t)$ و $S(j\omega)$ داده شده، $R(j\omega)$ و $Y(j\omega)$ را به دست آورید.

ب: چگونه می‌توان از $y(t)$، سیگنال $s(t)$ را بازیابی نمود؟

حل الف به شیوه ترسیمی:





حل الف به شیوه تحلیلی:

$$c(t) = \cos\omega_c t \quad \Longrightarrow C(j\omega) = \pi\{\delta(\omega+\omega_c) + \delta(\omega-\omega_c)\}$$

$$r(t) = s(t)\cdot c(t) \;\Longrightarrow R(j\omega) = \frac{1}{2\pi} S(j\omega) * C(j\omega)$$

$$\Longrightarrow R(j\omega) = \frac{1}{2\pi} S(j\omega) * \pi\{\delta(\omega+\omega_c) + \delta(\omega-\omega_c)\}$$

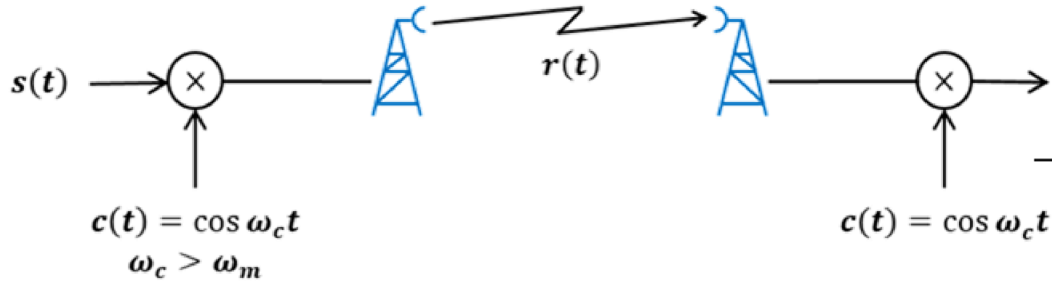
$$\Longrightarrow R(j\omega) = \frac{1}{2}\{S(j(\omega+\omega_c)) + S(j(\omega-\omega_c))\}$$

$$y(t) = r(t)\cdot c(t) \Longrightarrow Y(j\omega) = \frac{1}{2\pi} R(j\omega) * C(j\omega)$$

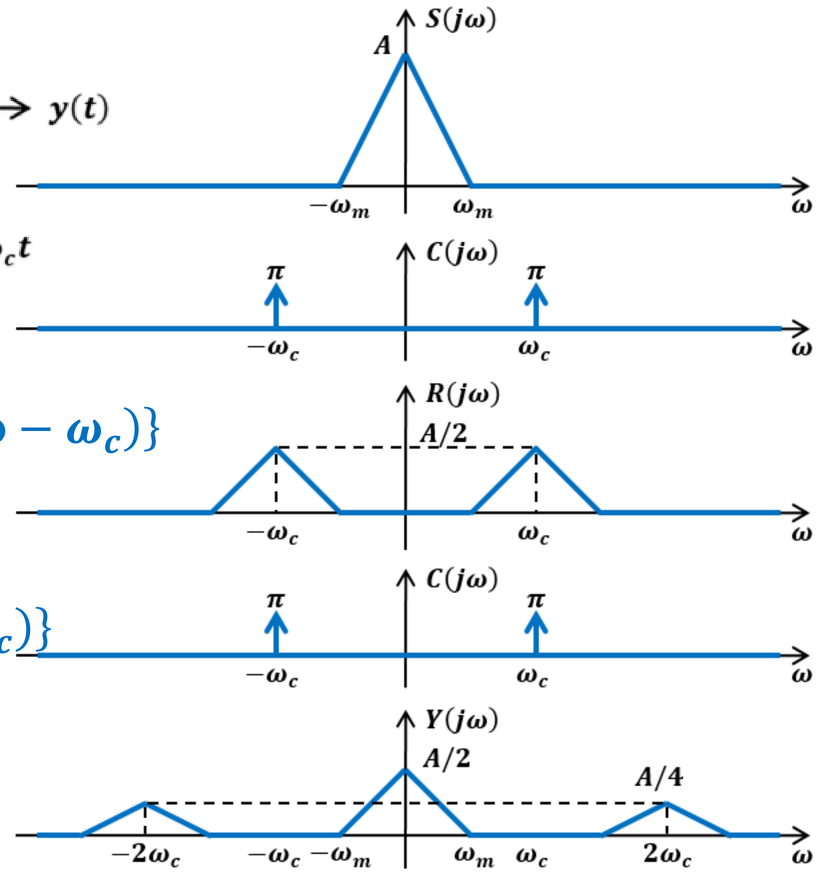
$$\Longrightarrow Y(j\omega) = \frac{1}{4}\{S(j(\omega+\omega_c)) + S(j(\omega-\omega_c))\} * \{\delta(\omega+\omega_c) + \delta(\omega-\omega_c)\}$$

$$\Longrightarrow Y(j\omega) = \frac{1}{4}\{S(j(\omega+2\omega_c)) + S(j\omega) + S(j\omega) + S(j(\omega-2\omega_c))\}$$

$$\Longrightarrow Y(j\omega) = \frac{1}{4} S(j(\omega+2\omega_c)) + \frac{1}{2} S(j\omega) + \frac{1}{4} S(j(\omega-2\omega_c))$$



حل الف به شیوه ترسیمی:



حل الف به شیوه تحلیلی:

$$c(t) = \cos \omega_c t \quad \Rightarrow C(j\omega) = \pi\{\delta(\omega + \omega_c) + \delta(\omega - \omega_c)\}$$

$$r(t) = s(t)\cdot c(t) \Rightarrow R(j\omega) = \frac{1}{2\pi} S(j\omega) * C(j\omega)$$

$$\Rightarrow R(j\omega) = \frac{1}{2\pi} S(j\omega) * \pi\{\delta(\omega + \omega_c) + \delta(\omega - \omega_c)\}$$

$$\Rightarrow R(j\omega) = \frac{1}{2}\{S(j(\omega + \omega_c)) + S(j(\omega - \omega_c))\}$$

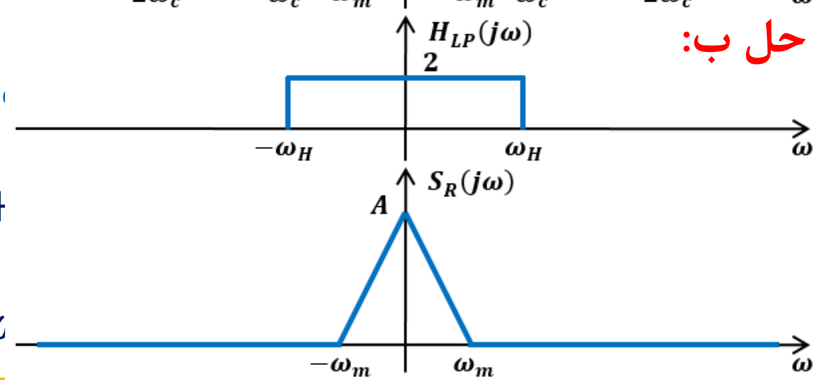
$$y(t) = r(t)\cdot c(t) \Rightarrow Y(j\omega) = \frac{1}{2\pi} R(j\omega) * C(j\omega)$$

$$\Rightarrow Y(j\omega) = \frac{1}{4}\{S(j(\omega + \omega_c)) + S(j(\omega - \omega_c))\} * \{$$

$$\Rightarrow Y(j\omega) = \frac{1}{4}\{S(j(\omega + 2\omega_c)) + S(j\omega) + S(j\omega) +$$

$$\Rightarrow Y(j\omega) = \frac{1}{4} S(j(\omega + 2\omega_c)) + \frac{1}{2} S(j\omega) + \frac{1}{4} S(j(\omega$$

حل ب:

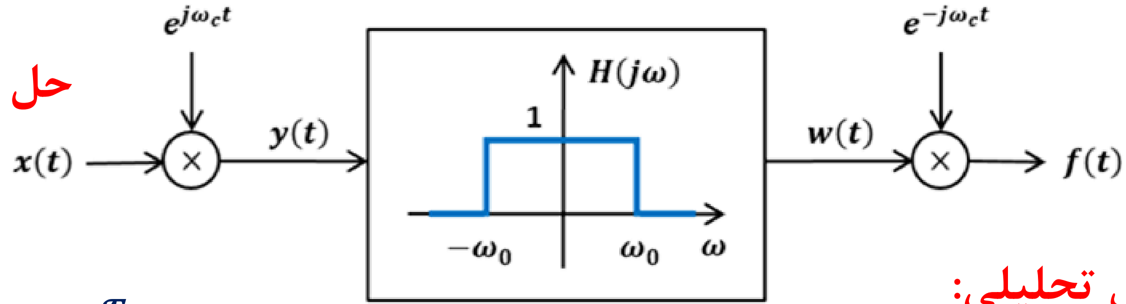


http://maleki.semnan.ac.ir

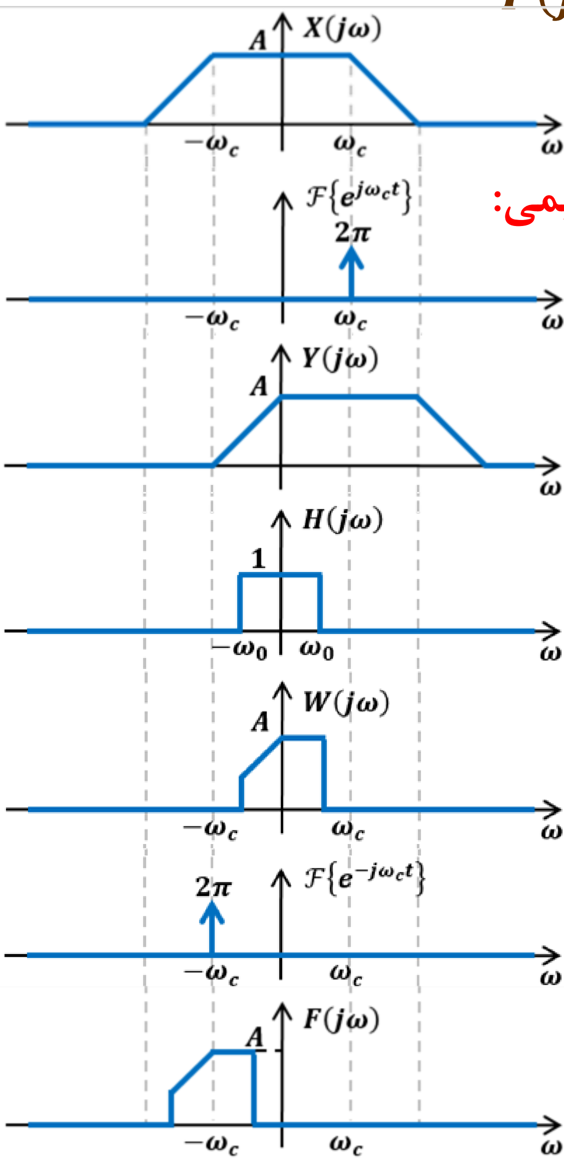
دکتر علی مالکی

مثال ۳۵: پیاده‌سازی فیلتر میان‌گذر با فرکانس مرکزی قابل تنظیم

برای سیستم شکل زیر و $X(j\omega)$ داده شده، $Y(j\omega)$ ، $W(j\omega)$ و $F(j\omega)$ را به دست آورید. آیا می‌توانید معادلی برای این سیستم بیابید؟



حل ترسیمی:



حل تحلیلی:

$$e^{j\omega_c t} \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} 2\pi\delta(\omega-\omega_c)$$

$$y(t) = x(t)\cdot e^{j\omega_c t} \quad \Longrightarrow Y(j\omega) = \frac{1}{2\pi}X(j\omega) * 2\pi\,\delta(\omega-\omega_c)$$

$$\Longrightarrow Y(j\omega) = X\big(j(\omega-\omega_c)\big)$$

$$W(j\omega) = Y(j\omega)\cdot H(j\omega)$$

$$\Longrightarrow W(j\omega) = X\big(j(\omega-\omega_c)\big)\cdot H(j\omega)$$

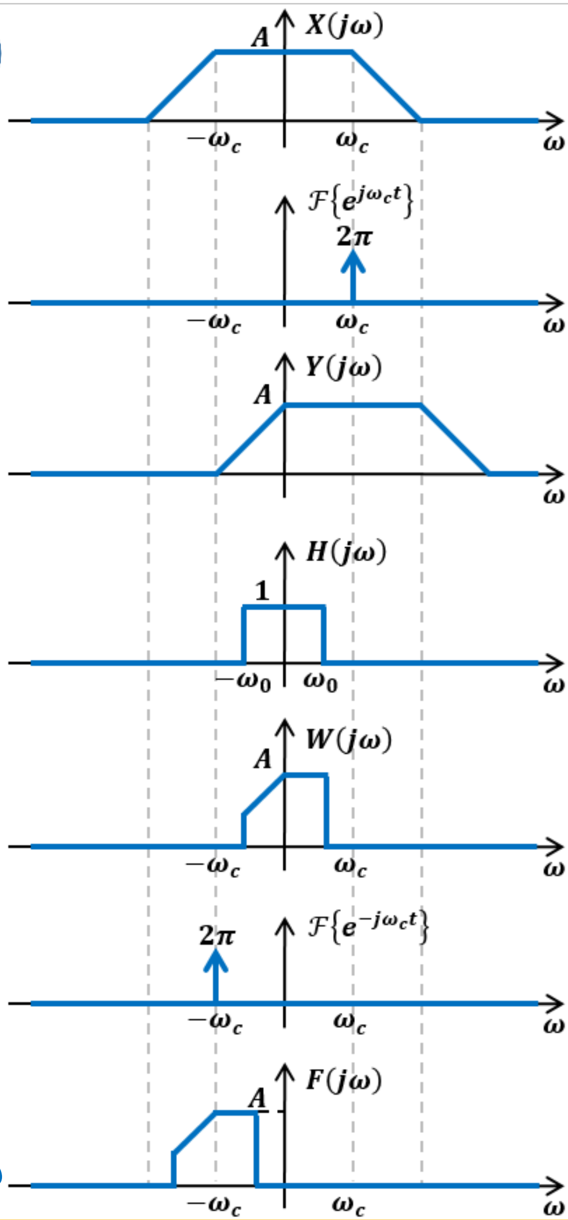
$$e^{-j\omega_c t} \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} 2\pi\delta(\omega+\omega_c)$$

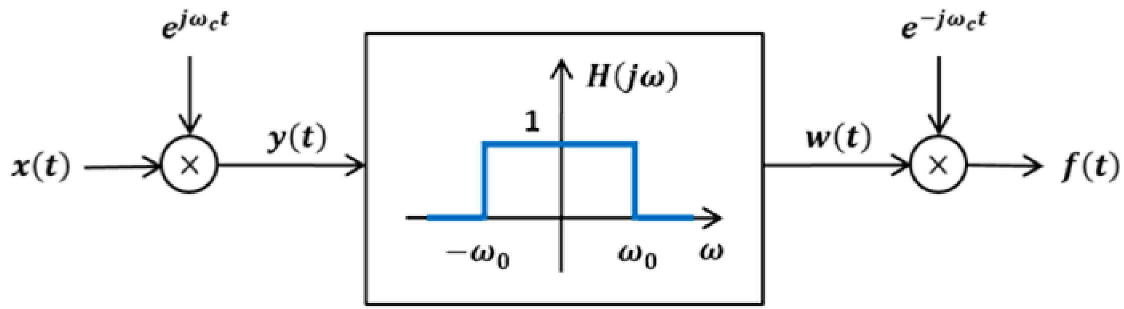
$$f(t) = w(t)\cdot e^{-j\omega_c t}$$

$$\Longrightarrow F(j\omega) = \frac{1}{2\pi}W(j\omega) * 2\pi\delta(\omega+\omega_c)$$

$$\Longrightarrow F(j\omega) = W\big(j(\omega+\omega_c)\big)$$

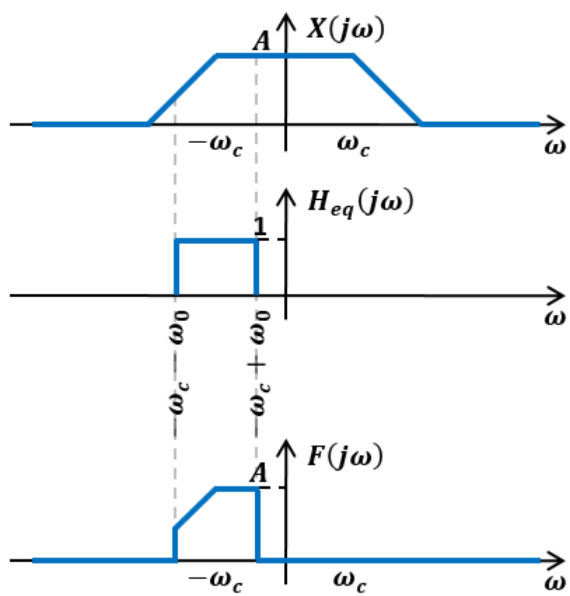
$$\Longrightarrow F(j\omega) = X(j\omega)\cdot H\big(j(\omega+\omega_c)\big)$$





$$F(j\omega) = X(j\omega) \cdot H\big(j(\omega + \omega_c)\big)$$

$$\Rightarrow H_{eq}(j\omega) = H\big(j(\omega + \omega_c)\big)$$



فهرست مطالب

گفت ما را هفت وادی در ره است ... چون گذشتی هفت وادی، درگه است
وانیامد در جهان زین راه کس ... نیست از فرسنگ آن آگاه کس
چون نیامد باز کس زین راه دور ... چون دهندت آگهی ای ناصبور؟
چون شدند آن جایگه گم سر به سر ... کی خبر بازت دهد ای بی خبر؟
هست وادی طلب آغاز کار ... وادی عشق است از آن پس، بی کنار
پس سیم وادی است آن معرفت ... پس چهارم وادی استغنا صفت
هست پنجم وادی توحید پاک ... پس ششم وادی حیرت صعبناک
هفتمین وادی فقر است و فنا ... بعد از این روی روش نبود تو را
در کشش افتی روش گم گرددت ... گر بود یک قطره قلزم گرددت

عطار نیشابوری