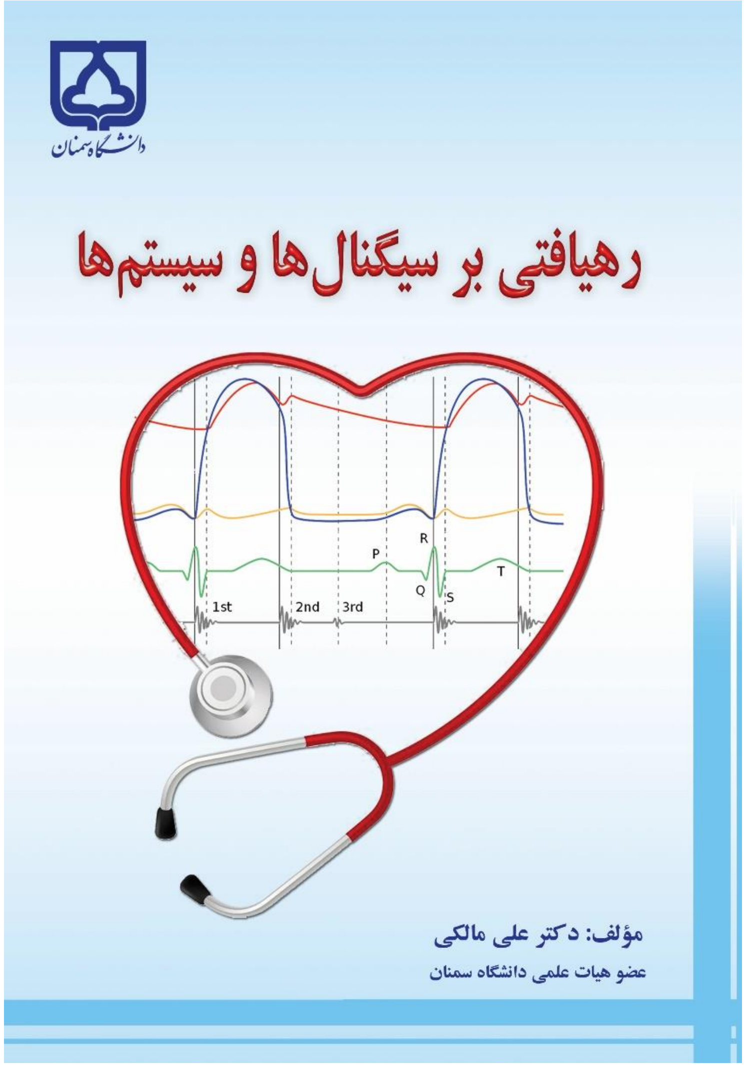
سیگنال‌ها و سیستم‌ها

مبحث پنجم

تبدیل فوریه‌ی زمان- گسسته

دکتر علی مالکی

http://maleki.semnan.ac.ir


دانشگاه سمنان
رهیافتی بر سیگنال‌ها و سیستم‌ها
P
R
T
Q
S
1st
2nd
3rd
مؤلف: دکتر علی مالکی
عضو هیات علمی دانشگاه سمنان

اهداف فصل

فهرست مطالب

معرفی تبدیل فوریه‌ی زمان–گسسته

رابطه‌ی آنالیز: $$X(e^{j\omega}) \triangleq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

رابطه‌ی سنتز: $$x[n] \triangleq \frac{1}{2\pi}\int_{<2\pi>} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

❖ تبدیل فوریه‌ی سیگنال زمان- گسسته، سیگنالی پیوسته (بر حسب ω) است.

❖ تبدیل فوریه‌ی زمان- گسسته‌ی سیگنال ($X(e^{j\omega})$) با دوره‌ی تناوب 2π متناوب است.

❖ فرکانس‌های حوالی صفر و ضرایب زوج π نشانگر فرکانس‌های پایین است در حالی که فرکانس‌های حوالی ضرایب فرد π نشانگر فرکانس‌های بالا است.

❖ شرط همگرایی تبدیل فوریه‌ی زمان- گسسته آن است که سیگنال «مطلق جمع‌پذیر» باشد.

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]| < \infty$$

مثال ۱: تبدیل فوریه‌ی سیگنال‌های پرکاربرد

تبدیل فوریه‌ی سیگنال‌های زمان- گسسته‌ی زیر را به دست آورید.

الف) $x[n] = \delta[n]$

ب) $x[n] = \alpha^n u[n], \qquad |\alpha| < 1$

ج) $x[n] = \alpha^{|n|}, \qquad |\alpha| < 1$

د) $x[n] = \begin{cases} 1 & |n| \le N_1 \\ 0 & otherwise \end{cases}$

حل الف:

$$\mathcal{F}\{\delta[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta[n] e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta[n] = 1$$

$$\Rightarrow \delta[n] \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} 1$$

حل ب:

$$\mathcal{F}\{\alpha^n u[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha^n u[n] e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\alpha e^{-j\omega}\right)^n = \frac{1}{1-\alpha e^{-j\omega}}$$

$$\Rightarrow \alpha^n u[n], |\alpha| < 1 \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1-\alpha e^{-j\omega}}$$

حل ج:

$$\mathcal{F}\{\alpha^{|n|}\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha^{|n|} e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} \alpha^{-n} e^{-j\omega n} + \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^{n} e^{-j\omega n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\alpha e^{j\omega}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\alpha e^{-j\omega}\right)^n$$

$$= \frac{\alpha e^{j\omega}}{1-\alpha e^{j\omega}} + \frac{1}{1-\alpha e^{-j\omega}} = \frac{\alpha e^{j\omega} - \alpha^2 + 1 - \alpha e^{j\omega}}{(1-\alpha e^{+j\omega})(1-\alpha e^{-j\omega})} = \frac{1-\alpha^2}{1-\alpha(e^{+j\omega}+e^{-j\omega})+\alpha^2}$$

$$= \frac{1-\alpha^2}{1-2\alpha\cos\omega+\alpha^2}$$

$$\Rightarrow \alpha^{|n|}, |\alpha| < 1 \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \frac{1-\alpha^2}{1-2\alpha\cos\omega+\alpha^2}$$

مثال ۱: تبدیل فوریه‌ی سیگنال‌های پرکاربرد

تبدیل فوریه‌ی سیگنال‌های زمان- گسسته‌ی زیر را به دست آورید.

الف) $x[n]=\delta[n]$

ب) $x[n]=\alpha^n u[n], \qquad |\alpha|<1$

ج) $x[n]=\alpha^{|n|}, \qquad |\alpha|<1$

د) $x[n]=\begin{cases}1 & |n|\le N_1\\ 0 & otherwise\end{cases}$

حل د:

$$\mathcal{F}\left\{x[n]=\begin{cases}1 & |n|\le N_1\\ 0 & otherwise\end{cases}\right\}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n}=\sum_{n=-N_1}^{N_1} e^{-j\omega n}=\frac{e^{-j\omega(-N_1)}-e^{-j\omega(N_1+1)}}{1-e^{-j\omega}}$$

$$=\frac{e^{-j\frac{\omega}{2}}}{e^{-j\frac{\omega}{2}}}\cdot\frac{e^{j\omega\left(\frac{2N_1+1}{2}\right)}-e^{-j\omega\left(\frac{2N_1+1}{2}\right)}}{e^{j\frac{\omega}{2}}-e^{-j\frac{\omega}{2}}}=\frac{\frac{1}{2j}}{\frac{1}{2j}}\cdot\frac{e^{j(2N_1+1)\frac{\omega}{2}}-e^{-j(2N_1+1)\frac{\omega}{2}}}{e^{j\frac{\omega}{2}}-e^{-j\frac{\omega}{2}}}$$

$$=\frac{\sin\left((2N_1+1)\frac{\omega}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}$$

$$\Longrightarrow\begin{cases}1 & |n|\le N_1\\ 0 & otherwise\end{cases}\xleftrightarrow{\mathcal{F}}\frac{\sin\left((2N_1+1)\frac{\omega}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}$$

فهرست مطالب

$$x[n]=\sum_{k=<N>} a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$$

$$e^{j\omega_0 t} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi\delta(\omega-\omega_0)$$

$$e^{j\omega_0 n} \xleftrightarrow{\mathcal{F}?} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} 2\pi\delta(\omega-2\pi l-\omega_0)$$

بررسی درستی این حدس،

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{\sum_{l=-\infty}^{+\infty} 2\pi\delta(\omega-2\pi l-\omega_0)\right\}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{<2\pi>}\left(\sum_{l=-\infty}^{+\infty} 2\pi\delta(\omega-2\pi l-\omega_0)\right)e^{j\omega n}d\omega$$

$$=\int_{<2\pi>}\sum_{l=-\infty}^{+\infty} e^{j\omega n}\delta(\omega-2\pi l-\omega_0)\,d\omega$$

$$=\int_{<2\pi>}\sum_{l=-\infty}^{+\infty} e^{j(2\pi l+\omega_0)n}\delta(\omega-2\pi l-\omega_0)\,d\omega$$

$$=\int_{<2\pi>}\sum_{l=-\infty}^{+\infty} e^{j\omega_0 n}\delta(\omega-2\pi l-\omega_0)\,d\omega$$

$$=e^{j\omega_0 n}\int_{<2\pi>}\sum_{l=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-2\pi l-\omega_0)\,d\omega$$

$$\Longrightarrow\; e^{j\omega_0 n} \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} 2\pi\,\delta(\omega - 2\pi l - \omega_0)$$

$$x[n] = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$$

$$\Longrightarrow\; X\left(e^{j\omega}\right)$$

$$= \sum_{k=\langle N\rangle} a_k \left(\sum_{l=-\infty}^{+\infty} 2\pi\,\delta\left(\omega - 2\pi l - k\frac{2\pi}{N}\right)\right)$$

$$= \sum_{k=\langle N\rangle} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_k\,\delta\left(\omega - 2\pi l - k\frac{2\pi}{N}\right)$$

$$= \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=0}^{N-1} 2\pi a_k\,\delta\left(\omega - 2\pi l - k\frac{2\pi}{N}\right)$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_m\,\delta\left(\omega - m\frac{2\pi}{N}\right)$$

$$a_k\,\delta\left(\omega - 2\pi l - k\frac{2\pi}{N}\right) \stackrel{?}{=} a_m\,\delta\left(\omega - m\frac{2\pi}{N}\right)$$

l	k	$m = Nl + k$	$a_k\delta(\omega - 2\pi l - k\,2\pi/N)$	$a_m\delta(\omega - m\frac{2\pi}{N})$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
0	0	0	$a_0\delta(\omega)$	$= a_0\delta\left(\omega - (0)\frac{2\pi}{N}\right)$
0	1	1	$a_1\delta\left(\omega - \frac{2\pi}{N}\right)$	$= a_1\delta\left(\omega - (1)\frac{2\pi}{N}\right)$
0	2	2	$a_2\delta\left(\omega - 2\frac{2\pi}{N}\right)$	$= a_2\delta\left(\omega - (2)\frac{2\pi}{N}\right)$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
0	$N-1$	$N-1$	$a_{N-1}\delta\left(\omega - (N-1)\frac{2\pi}{N}\right)$	$= a_{N-1}\delta\left(\omega - (N-1)\frac{2\pi}{N}\right)$
1	0	N	$a_0\delta(\omega - 2\pi)$	$= a_N\delta\left(\omega - (N)\frac{2\pi}{N}\right)$
1	1	$N+1$	$a_1\delta\left(\omega - 2\pi - \frac{2\pi}{N}\right)$	$= a_{N+1}\delta\left(\omega - (N+1)\frac{2\pi}{N}\right)$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1	$N-1$	$2N-1$	$a_{N-1}\delta\left(\omega - 2\pi - (N-1)\frac{2\pi}{N}\right)$	$= a_{2N-1}\delta\left(\omega - (2N-1)\frac{2\pi}{N}\right)$
2	0	$2N$	$a_0\delta(\omega - 2(2\pi))$	$= a_{2N}\delta\left(\omega - (2N)\frac{2\pi}{N}\right)$
2	1	$2N+1$	$a_1\delta\left(\omega - 4\pi - \frac{2\pi}{N}\right)$	$= a_{2N+1}\delta\left(\omega - (2N+1)\frac{2\pi}{N}\right)$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

زوج فوریه‌ی سیگنال متناوب:

$$\sum_{k=<N>} a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n} \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_m \delta\left(\omega - m\frac{2\pi}{N}\right)$$

مثال ۲: تبدیل فوریه‌ی تعمیم‌یافته‌ی سیگنال متناوب

تبدیل فوریه‌ی سیگنال $x[n]=\cos\left(\frac{2\pi}{5}n\right)$ را تعیین نموده و رسم کنید.

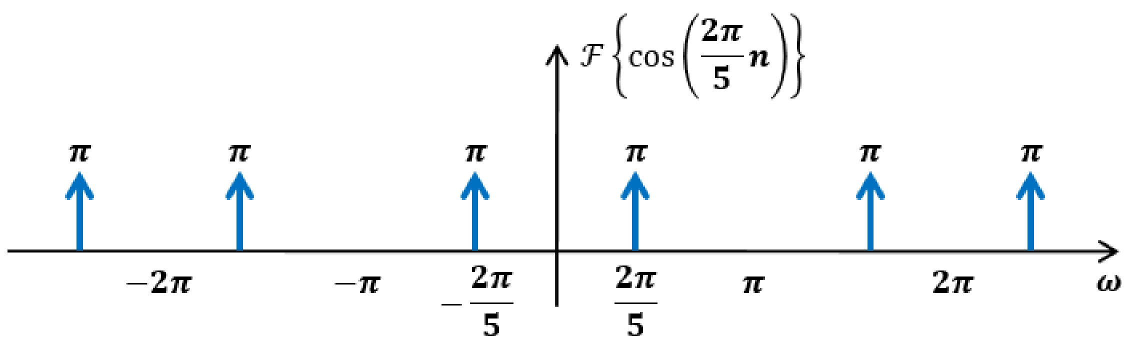
حل:

$$x[n]=\frac{1}{2}\left(e^{j\frac{2\pi}{5}n}+e^{-j\frac{2\pi}{5}n}\right)$$

$$e^{j\frac{2\pi}{5}n}\xleftrightarrow{\mathcal{F}}\sum_{l=-\infty}^{+\infty}2\pi\delta\left(\omega-2\pi l-\frac{2\pi}{5}\right)$$

$$e^{-j\frac{2\pi}{5}n}\xleftrightarrow{\mathcal{F}}\sum_{l=-\infty}^{+\infty}2\pi\delta\left(\omega-2\pi l+\frac{2\pi}{5}\right)$$

$$\Rightarrow\cos\left(\frac{2\pi}{5}n\right)\xleftrightarrow{\mathcal{F}}\sum_{l=-\infty}^{+\infty}\pi\left[\delta\left(\omega-2\pi l-\frac{2\pi}{5}\right)+\delta\left(\omega-2\pi l+\frac{2\pi}{5}\right)\right]$$



مثال ۳: تبدیل فوریه‌ی تعمیم‌یافته‌ی سیگنال متناوب

تبدیل فوریه‌ی تعمیم‌یافته‌ی سیگنال زمان- گسسته‌ی متناوب زیر را به دست آورید.

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta[n-kN]$$

حل:

$$a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=<N>} x[n]e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} \delta[n]e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\delta[n] = \frac{1}{N}$$

$$\Rightarrow x[n] = \sum_{n=<N>} a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n} = \sum_{n=<N>} \frac{1}{N} e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$$

$$\Rightarrow X(j\omega) = \sum_{k=<N>} \frac{1}{N} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} 2\pi\delta\left(\omega - 2\pi l - k\frac{2\pi}{N}\right)$$

$$\Rightarrow X(j\omega) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{2\pi}{N}\delta\left(\omega - m\frac{2\pi}{N}\right)$$

فهرست مطالب

- معرفی تبدیل فوریه‌ی زمان- گسسته
- تبدیل فوریه‌ی تعمیم‌یافته‌ی سیگنال‌های متناوب
- ویژگی‌های تبدیل فوریه‌ی زمان- گسسته
- مثال‌های مروری
- مثال‌های نرم‌افزاری
- تمرین‌های تئوری
- تمرین‌های نرم‌افزاری

ویژگی‌های تبدیل فوریه گسسته

- ویژگی متناوب بودن،
- ویژگی خطی بودن،
- ویژگی جابجایی زمانی،
- ویژگی جابجایی فرکانسی،
- ویژگی مزدوج و تقارن‌های مزدوج،
- ویژگی تفاضل و انباره،
- ویژگی وارون زمانی،
- ویژگی گسترش زمانی،
- ویژگی مشتق‌گیری در حوزه‌ی فرکانس،
- رابطه‌ی پارسوال،
- ویژگی کانولوشن و
- ویژگی ضرب

ویژگی متناوب بودن

$$X\left(e^{j\omega}\right) = X\left(e^{j(\omega+2k\pi)}\right)$$

مثال ۴: اثبات ویژگی متناوب بودن

ویژگی متناوب بودن تبدیل فوریه زمان- گسسته (با دوره‌ی تناوب 2π) را اثبات کنید.

حل:

$$X\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[n]e^{-j\omega n}$$

$$\Longrightarrow X\left(e^{j(\omega+2k\pi)}\right)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[n]e^{-j(\omega+2k\pi)n}$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[n]e^{-j\omega n}e^{-j2k\pi n}$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[n]e^{-j\omega n}$$

$$=X\left(e^{j\omega}\right)$$

ویژگی خطی بودن

$$\begin{cases} x_1[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X_1(e^{j\omega}) \\ x_2[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X_2(e^{j\omega}) \end{cases} \Rightarrow \quad \alpha x_1[n] + \beta x_2[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \alpha X_1(e^{j\omega}) + \beta X_2(e^{j\omega})$$

ویژگی جابجایی زمانی

$$x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X\left(e^{j\omega}\right) \quad \Rightarrow \quad x[n-n_0] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} e^{-j\omega n_0} X\left(e^{j\omega}\right)$$

مثال ۵: ویژگی جابجایی زمانی

تبدیل فوریه‌ی سیگنال $x[n] = u[n+1] - u[n-2]$ را به دست آورید.

حل:

$$x[n] = u[n+1] - u[n-2] = \delta[n+1] + \delta[n] + \delta[n-1]$$

$$\delta[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} 1 \qquad \Rightarrow \delta[n+1] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} e^{j\omega}$$

$$\Rightarrow \delta[n-1] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} e^{-j\omega}$$

$$\Rightarrow \delta[n+1] + \delta[n] + \delta[n-1] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} e^{j\omega} + 1 + e^{-j\omega}$$

$$\Rightarrow X(e^{j\omega}) = e^{j\omega} + 1 + e^{-j\omega}$$

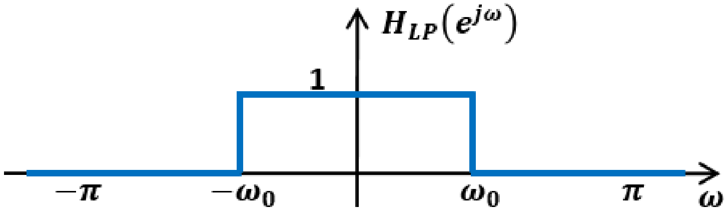
$$\Rightarrow X(e^{j\omega}) = 1 + 2\cos(\omega)$$

ویژگی جابجایی فرکانسی

$$x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X\left(e^{j\omega}\right) \quad \Rightarrow \quad e^{+j\omega_0 n}\, x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X\left(e^{j(\omega-\omega_0)}\right)$$

مثال ۶: ویژگی جابجایی فرکانسی

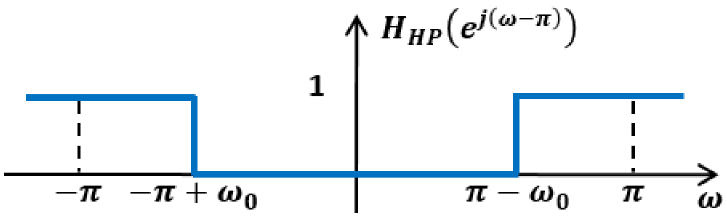
$H_{LP}(e^{j\omega})$ داده شده در شکل زیر، پاسخ فرکانسی یک فیلتر پایین‌گذر است.



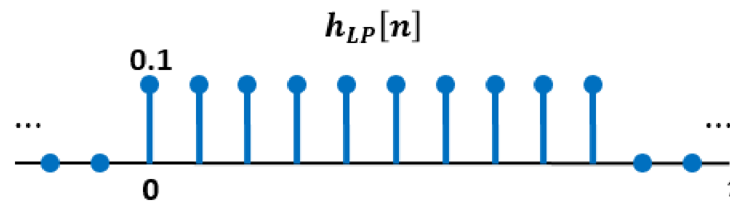
الف: $H_{LP}(e^{j(\omega-\pi)})$ را رسم کنید. این پاسخ فرکانسی مربوط به چه فیلتری است؟

ب: پاسخ ضربه‌ی این فیلتر را بر حسب $h_{LP}[n]$ به دست آورید. نتیجه را تحلیل کنید.

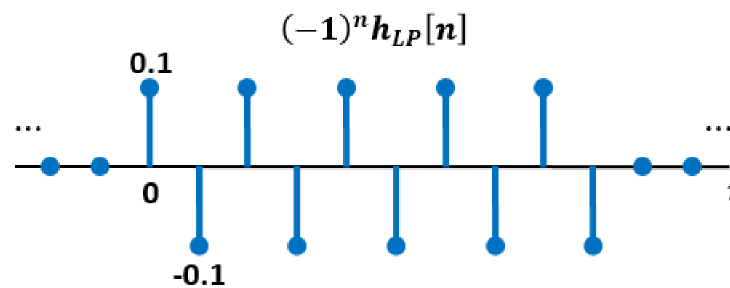
حل الف:



حل ب:



$$\mathcal{F}^{-1}\{H_{LP}(e^{j(\omega-\pi)})\} = e^{j\pi n}h_{LP}[n] = (-1)^n h_{LP}[n]$$



$$e^{j\pi n} = (e^{j\pi})^n = (\cos\pi + j\sin\pi)^n = (-1)^n$$

ویژگی مزدوج و تقارن‌های مزدوج

$$x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(e^{j\omega}) \quad \Longrightarrow \quad x^*[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X^*(e^{-j\omega})$$

«تقارن‌های مزدوج»:

$$x[n]: real \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} Re\{X(e^{j\omega})\}: Even \\ Im\{X(e^{j\omega})\}: Odd \end{cases}$$

$$x[n]: real \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} |X(e^{j\omega})|: Even \\ \measuredangle X(e^{j\omega}): Odd \end{cases}$$

$$x[n]: real \;\&\; even \quad \Longrightarrow \quad X(e^{j\omega}): real \;\&\; even$$

$$x[n]: real \;\&\; odd \quad \Longrightarrow \quad X(e^{j\omega}): purely\ imaginary \;\&\; odd$$

نکته:

سیگنال حقیقی $x[n]$ با تبدیل فوریه $X(e^{j\omega})$ را در نظر بگیرید. همان‌طور که می‌دانید می‌توان $x[n]$ را به بخش‌های زوج و فرد تجزیه کرد. از سوی دیگر، $X(e^{j\omega})$ را نیز که مقداری مختلط است می‌توان با بخش‌های حقیقی و موهومی محض بازنمایی کرد. بخش زوج $x[n]$ با توجه به حقیقی بودن سیگنال، حقیقی و زوج است بنابراین تبدیل فوریه‌ی آن بایستی حقیقی و زوج باشد. بخش فرد $x[n]$ نیز حقیقی و فرد است بنابراین تبدیل فوریه آن بایستی موهومی محض و فرد باشد. بنابراین، اگر سیگنال حقیقی باشد تبدیل فوریه‌ی بخش زوج آن برابر بخش حقیقی تبدیل فوریه‌ی سیگنال است که خود تقارن زوج دارد. تبدیل فوریه‌ی بخش فرد سیگنال نیز برابر j در بخش موهومی تبدیل فوریه‌ی سیگنال است که خود تقارن فرد دارد. بیان دیگر،

$$x[n]: real \implies \begin{cases} Even\{x[n]\} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} Re\{X(e^{j\omega})\}: even \\ Odd\{x[n]\} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} j\, Im\{X(e^{j\omega})\}: odd \end{cases} \qquad (۱۸-۵)$$

ویژگی تفاضل و انباره

$$x[n] \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(e^{j\omega}) \quad \Rightarrow \quad x[n]-x[n-1] \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} (1-e^{-j\omega})X(e^{j\omega})$$

$$x[n] \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(e^{j\omega}) \quad \Rightarrow \sum_{m=-\infty}^{n} x[m] \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1-e^{-j\omega}}X(e^{j\omega}) + \pi X(e^{j0}) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta[\omega-2\pi k]$$

مثال ۷: ویژگی انباره

تبدیل فوریه‌ی تعمیم‌یافته‌ی پله واحد را به دست آورید.

حل:

$$\delta[n] \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} 1$$

$$u[n] = \sum_{m=-\infty}^{n} \delta[m] \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1-e^{-j\omega}} + \pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - 2\pi k)$$

$$\Rightarrow u[n] \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1-e^{-j\omega}} + \pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - 2\pi k)$$

ویژگی وارون زمانی

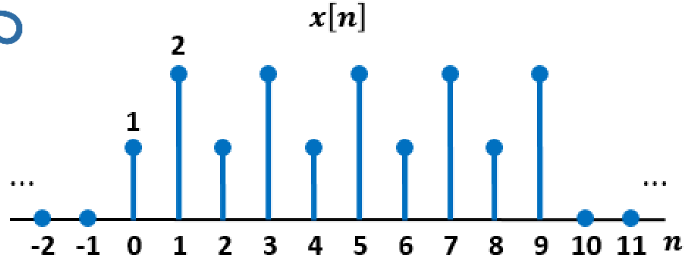
$$x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(e^{j\omega}) \quad \Rightarrow \quad x[-n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(e^{-j\omega})$$

ویژگی گسترش زمانی

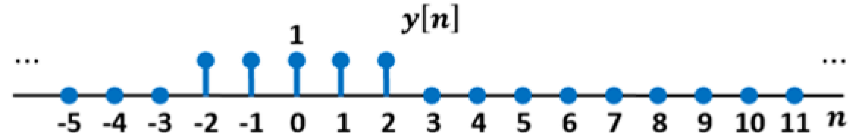
$$x[n] \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(e^{j\omega}) \quad \Longrightarrow \quad x_k[n] = \begin{cases} x\left[\dfrac{n}{k}\right] & \text{اگر } n \text{ ضریبی از } k \text{ باشد} \\ 0 & \text{اگر } n \text{ ضریبی از } k \text{ نباشد} \end{cases} \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(e^{jk\omega})$$

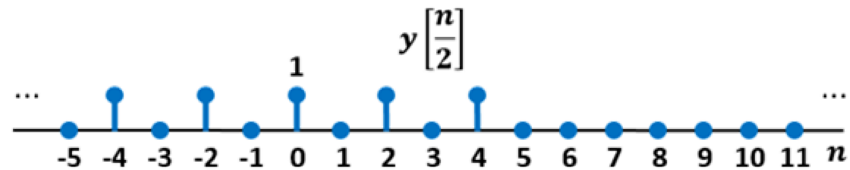
مثال ۸: ویژگی گسترش زمانی

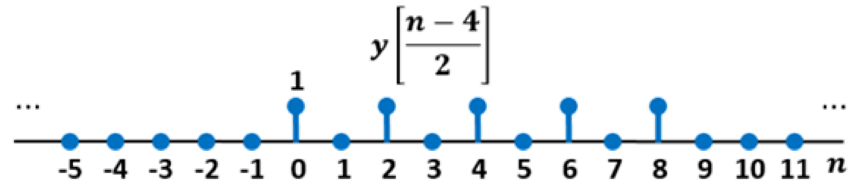
تبدیل فوریه‌ی سیگنال $x[n]$ شکل زیر را به دست آورید.

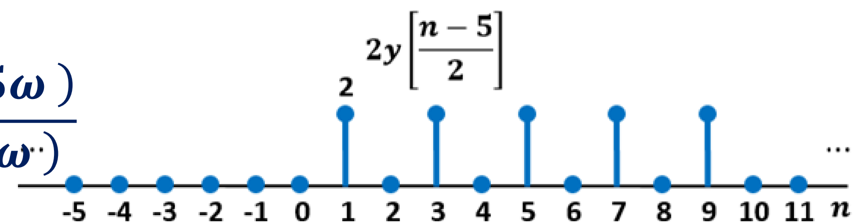


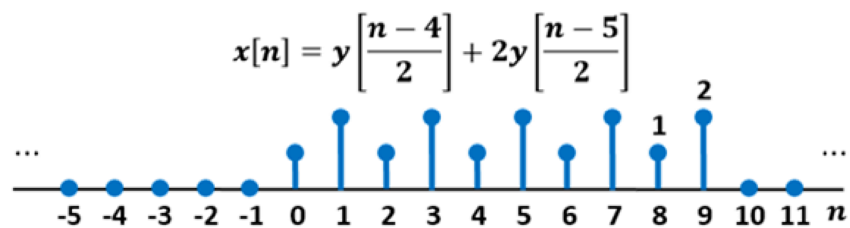
حل:











$$y[n] = \begin{cases} 1 & |n| \le 2 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

$$x[n] = y\left[\frac{n-4}{2}\right] + 2y\left[\frac{n-5}{2}\right]$$

$$\begin{cases} 1 & |n| < N \\ 0 & otherwise \end{cases} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{\sin\left((2N+1)\frac{\omega}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}$$

$$\Rightarrow y[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{\sin\left(5\frac{\omega}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} \Rightarrow y\left[\frac{n}{2}\right] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{\sin(5\omega)}{\sin(\omega)}$$

$$\Rightarrow y\left[\frac{n-4}{2}\right] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} e^{-j4\omega}\frac{\sin(5\omega)}{\sin(\omega)}$$

$$\Rightarrow y\left[\frac{n-5}{2}\right] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} e^{-j5\omega}\frac{\sin(5\omega)}{\sin(\omega)}$$

$$\Rightarrow x[n] = y\left[\frac{n-4}{2}\right] + 2y\left[\frac{n-5}{2}\right] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} e^{-j4\omega}\left(1+2e^{-j\omega}\right)\frac{\sin(5\omega)}{\sin(\omega)}$$

ویژگی مشتق‌گیری در حوزه‌ی فرکانس

$$x[n] \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X\left(e^{j\omega}\right) \quad \Rightarrow \quad (-jn)x[n] \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \frac{d}{d\omega}X\left(e^{j\omega}\right)$$

مثال ۹: ویژگی مشتق‌گیری در حوزه‌ی فرکانس

$X(e^{j\omega})$ داده شده، تبدیل فوریه‌ی چه سیگنالی است؟

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{(1-\alpha e^{-j\omega})^2}$$

حل:

$$\alpha^n u[n] \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1-\alpha e^{-j\omega}}$$

$$(-jn)\alpha^n u[n] \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \frac{d}{d\omega}\left(\frac{1}{1-\alpha e^{-j\omega}}\right) = \frac{-j\alpha e^{-j\omega}}{(1-\alpha e^{-j\omega})^2}$$

$$n\alpha^{n-1} u[n] \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \frac{e^{-j\omega}}{(1-\alpha e^{-j\omega})^2}$$

$$(n+1)\alpha^n u[n+1] \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{(1-\alpha e^{-j\omega})^2}$$

$$\Longrightarrow \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{(1-\alpha e^{-j\omega})^2}\right\} = (n+1)\alpha^n u[n+1] = (n+1)\alpha^n u[n]$$

رابطه‌ی پارسوال

$$f[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} F(e^{j\omega})$$
$$g[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} G(e^{j\omega})$$
$$\Longrightarrow \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f[n]g^*[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{<2\pi>} F(e^{j\omega})G^*(e^{j\omega})d\omega$$

در حالت خاص، اگر $f[n] = g[n] = x[n]$ باشد داریم:

$$x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(e^{j\omega}) \quad \Longrightarrow \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{<2\pi>} \left|X(e^{j\omega})\right|^2 d\omega$$

ویژگی کانولوشن

$$x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(e^{j\omega})$$
$$h[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} H(e^{j\omega})$$
$$\Longrightarrow \quad x[n] * h[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(e^{j\omega}) \cdot H(e^{j\omega})$$

ویژگی ضرب

$$x_1[n] \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X_1(e^{j\omega})$$
$$x_2[n] \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X_2(e^{j\omega})$$

$$\Longrightarrow \quad x_1[n]\cdot x_2[n] \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{2\pi}\int_{<2\pi>} X_1(e^{j\theta})X_2(e^{j(\omega-\theta)})d\theta$$

مثال ۱۰: اثبات ویژگی ضرب

ویژگی ضرب تبدیل فوریه‌ی زمان- گسسته را اثبات کنید.

$$x_1[n]\cdot x_2[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2\pi}\int_{<2\pi>} X_1(e^{j\theta})X_2(e^{j(\omega-\theta)})d\theta$$

حل:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{<2\pi>} X_1(e^{j\theta})X_2(e^{j(\omega-\theta)})d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{<2\pi>} X_1(e^{j\theta})\left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_2[n]e^{-j(\omega-\theta)n}\right]d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{<2\pi>} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_1(e^{j\theta})x_2[n]e^{-j\omega n}e^{j\theta n}\,d\theta$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{<2\pi>} X_1(e^{j\theta})x_2[n]e^{-j\omega n}e^{j\theta n}d\theta$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_2[n]e^{-j\omega n}\,\frac{1}{2\pi}\int_{<2\pi>} X_1(e^{j\theta})e^{j\theta n}d\theta$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_2[n]\cdot x_1[n]e^{-j\omega n} = \mathcal{F}\{x_1[n]\cdot x_2[n]\}$$

فهرست مطالب

گفت ما را هفت وادی در ره است　　چون گذشتی هفت وادی، درگه است

وانیامد در جهان زین راه کس　　نیست از فرسنگ آن آگاه کس

چون نیامد باز کس زین راه دور　　چون دهندت آگهی ای ناصبور؟

چون شدند آن جایگه گم سر به سر　　کی خبر بازت دهد ای بی خبر؟

هست وادی طلب آغاز کار　　وادی عشق است از آن پس، بی کنار

پس سیم وادی است آن معرفت　　پس چهارم وادی استغنا صفت

هست پنجم وادی توحید پاک　　پس ششم وادی حیرت صعبناک

هفتمین وادی فقر است و فنا　　بعد از این روی روش نبود تو را

در کشش افتی روش گم گرددت　　گر بود یک قطره قلزم گرددت

عطار نیشابوری