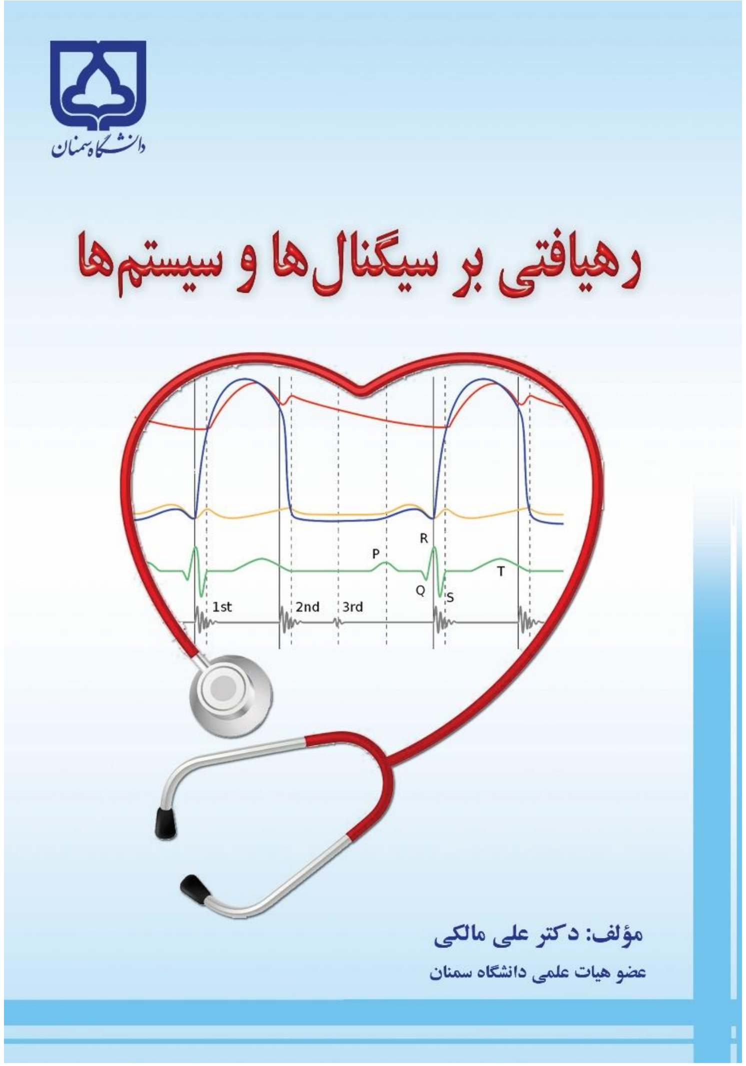
سیگنال‌ها و سیستم‌ها

مبحث ششم

تبدیل لاپلاس

دکتر علی مالکی

http://maleki.semnan.ac.ir


دانشگاه سمنان
رهیافتی بر سیگنال‌ها و سیستم‌ها
P
R
T
Q
S
1st
2nd
3rd
مؤلف: دکتر علی مالکی
عضو هیات علمی دانشگاه سمنان

اهداف فصل

پس از مطالعه‌ی این فصل، قادر خواهید بود:

با تبدیل لاپلاس دوطرفه کار کنید؛

تبدیل لاپلاس را با تبدیل فوریه‌ی زمان- پیوسته (با ذکر نقاط ضعف و قوت هر کدام) مقایسه کنید ؛

تبدیل لاپلاس سیگنال‌های پرکاربرد را به دست آورده و به کار گیرد؛

مفهوم ناحیه‌ی همگرایی تبدیل لاپلاس را توصیف کرده و ویژگی‌های ناحیه‌ی همگرایی را ذکر کنید؛

با نمودار قطب- صفر تبدیل لاپلاس و به روش هندسی، اندازه و فاز تبدیل فوریه را تعیین کنید ؛

ویژگی‌های تبدیل لاپلاس را بشناسید و از آنها برای محاسبه‌ی ساده‌تر تبدیل لاپلاس و وارون تبدیل لاپلاس استفاده کنید؛

از ابزار تبدیل لاپلاس برای تجزیه و تحلیل سیستم‌ها در حوزه‌ی s استفاده نموده و در مورد ویژگی‌های سیستم‌ها نظر دهید؛

از تبدیل لاپلاس یک‌طرفه برای بررسی سیستم‌های توصیف شده با معادله دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت با شرط‌های اولیه‌ی غیرصفر استفاده کنید؛

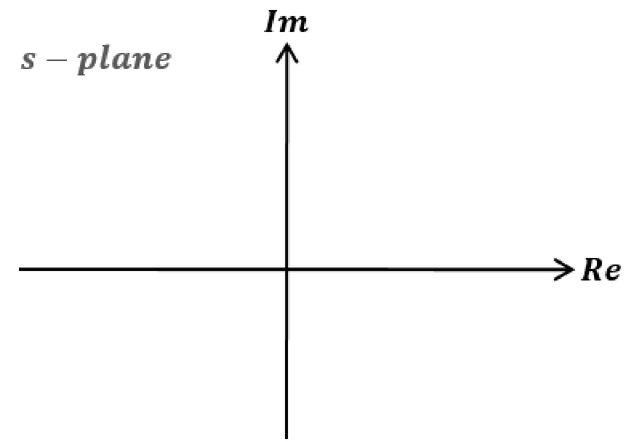
فهرست مطالب

- معرفی تبدیل لاپلاس
- ویژگی‌های ناحیه‌ی همگرایی
- وارون تبدیل لاپلاس
- ارزیابی هندسی تبدیل فوریه به کمک نمودار قطب- صفر
- ویژگی‌های تبدیل لاپلاس
- بررسی ویژگی‌های سیستم‌ها در حوزه‌ی لاپلاس
- تبدیل لاپلاس یک‌طرفه
- مثال‌های مروری
- مثال‌های نرم‌افزاری
- تمرین‌های تئوری
- تمرین‌های نرم‌افزاری

معرفی تبدیل لاپلاس:

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st}dt$$

$$X(j\omega) = X(s)\Big|_{s\,=\,j\omega}$$



نکته:

علت اطلاق اصطلاح دوطرفه برای این نوع تبدیل لاپلاس، انجام انتگرال‌گیری از $-\infty$ تا $+\infty$ طبق تعریف آن است. همان‌طور که می‌دانید محدوده‌ی انتگرال‌گیری در تعریف تبدیل لاپلاس یک‌طرفه، از صفر تا بی‌نهایت است.

مثال ۱: تبدیل لاپلاس سیگنال‌های پرکاربرد

تبدیل لاپلاس سیگنال‌های پرکاربرد زیر را محاسبه نمایید. برای هر مورد، محل قطب‌ها و صفرها در صفحه‌ی s و همچنین ناحیه‌ی همگرایی را مشخص کنید.

الف: $\delta(t)$ ب: $u(t)$ ج: $e^{-\alpha t}u(t)$ د: $-e^{-\alpha t}u(-t)$

ه: $e^{-\beta|t|}$ و: $\cos(\omega_0 t)\,u(t)$ ز: $\sin(\omega_0 t)\,u(t)$

حل الف:

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)e^{-st}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1$$

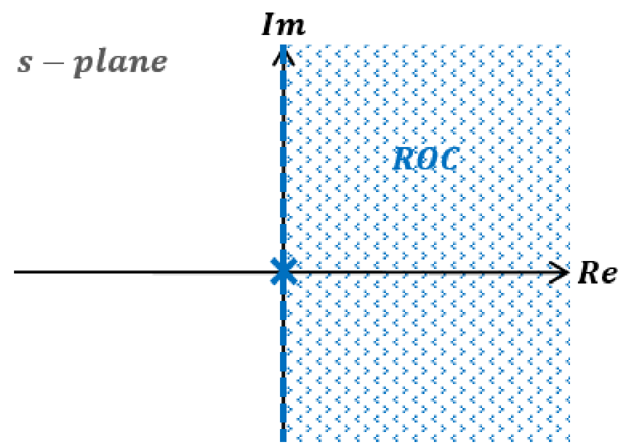
$$\Rightarrow \delta(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} 1 \qquad ROC: entire\ \ s-plane$$

حل ب:

$$\mathcal{L}\{u(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t)e^{-st}dt = \int_{0}^{+\infty} e^{-st}dt$$

$$= \frac{-1}{s}e^{-st}\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s} \qquad ROC:\ Re\{s\} > 0$$

$$\Rightarrow u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s} \qquad ROC: Re\{s\} > 0$$

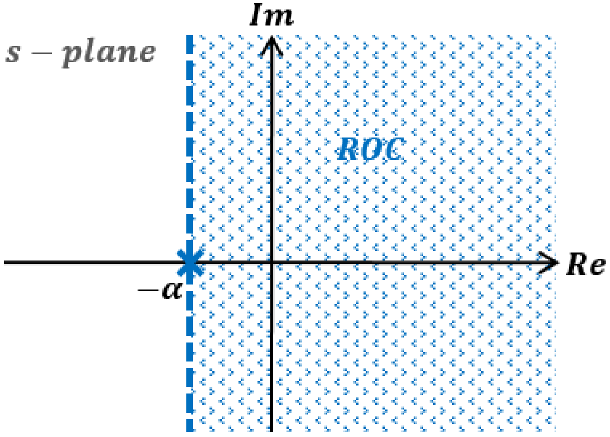


حل ج:

$$\mathcal{L}\{e^{-\alpha t}u(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha t}u(t)e^{-st}dt = \int_{0}^{+\infty} e^{-(s+\alpha)t}dt$$

$$= -\frac{1}{s+\alpha}e^{-(s+\alpha)t}\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s+\alpha}$$

$$Re\{s+\alpha\} > 0$$



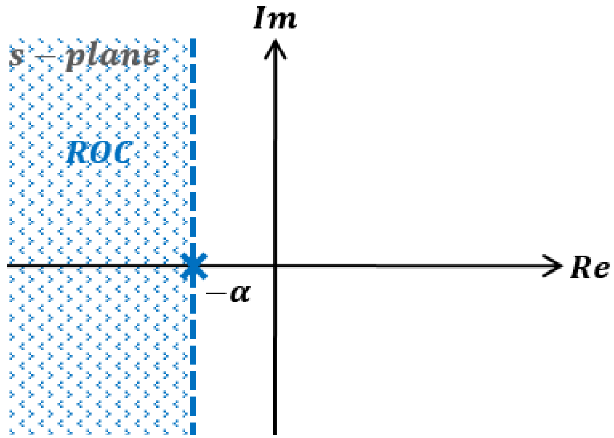
$$\Longrightarrow e^{-\alpha t}u(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{s+\alpha} \qquad ROC: Re\{s\} > -\alpha$$

حل د:

$$\mathcal{L}\{-e^{-\alpha t}u(-t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} -e^{-\alpha t}u(-t)e^{-st}dt = \int_{-\infty}^{0} -e^{-(s+\alpha)t}dt$$

$$= -\frac{-1}{s+\alpha}e^{-(s+\alpha)t}\Big|_{-\infty}^{0}$$

$$= \frac{1}{s+\alpha} \qquad Re\{s+\alpha\} < 0$$



$$\Longrightarrow -e^{-\alpha t}u(-t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{s+\alpha} \qquad ROC: Re\{s\} < -\alpha$$

نکته:

نکته‌ی قابل تامل از مقایسه‌ی تبدیل لاپلاس سیگنال‌های $e^{-\alpha t}u(t)$ و $-e^{-\alpha t}u(-t)$ آن است که عبارت تبدیل لاپلاس یکسان به دست آمده و تفاوت در ناحیه‌ی همگرایی آنها است. این نکته موید آن است که صِرف عبارت برای توصیف تبدیل لاپلاس ناکافی است و لازم است به ناحیه‌ی همگرایی نیز اشاره گردد.

حل ه:

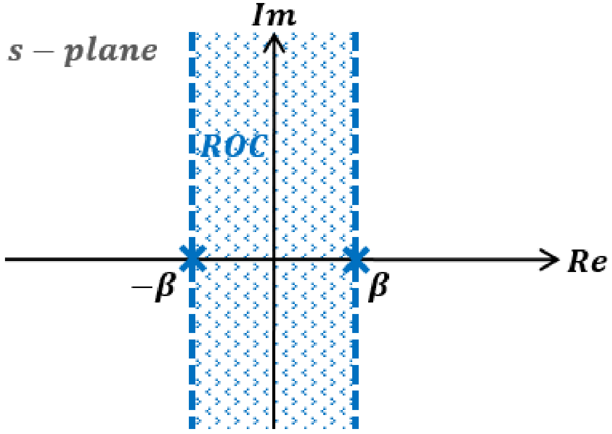
$$\mathcal{L}\{e^{-\beta|t|}\} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta|t|} e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{0} e^{+\beta t} e^{-st} dt + \int_{0}^{\infty} e^{-\beta t} e^{-st} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{0} e^{-(s-\beta)t} dt + \int_{0}^{\infty} e^{-(s+\beta)t} dt$$

$$= \frac{-1}{s-\beta} e^{-(s-\beta)t} \Big|_{-\infty}^{0} + \frac{-1}{s+\beta} e^{-(s+\beta)t} \Big|_{0}^{\infty}$$

$$= \frac{-1}{s-\beta} + \frac{1}{s+\beta} = \frac{-2\beta}{s^2-\beta^2}$$

$Re\{s-\beta\} < 0$ و $Re\{s+\beta\} > 0$



$$\Longrightarrow e^{-\beta|t|}, \beta > 0 \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{-2\beta}{s^2-\beta^2} \qquad ROC: -\beta < Re\{s\} < \beta$$

حل و:

$$\mathcal{L}\{\cos(\omega_0 t)\,u(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(\omega_0 t)\,u(t) e^{-st} dt$$

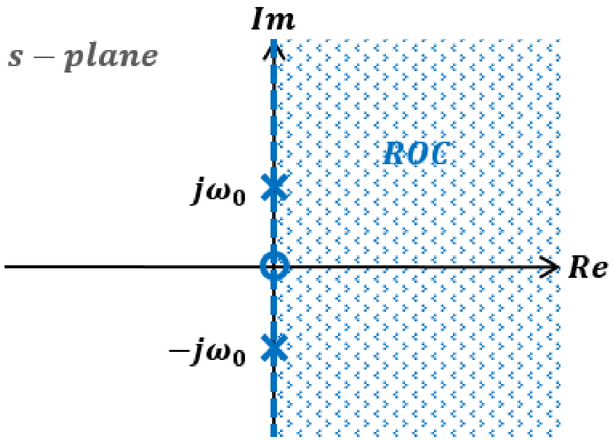
$$= \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{2}\left(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}\right) e^{-st} dt \quad = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{-(s-j\omega_0)t} dt + \frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{-(s+j\omega_0)t} dt$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{-1}{s-j\omega_0} e^{-(s-j\omega_0)t}\Big|_0^{\infty} + \frac{1}{2}\cdot\frac{-1}{s+j\omega_0} e^{-(s+j\omega_0)t}\Big|_0^{\infty}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s-j\omega_0} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s+j\omega_0}$$

$Re\{s - j\omega_0\} > 0$ و $Re\{s + j\omega_0\} > 0$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{s + j\omega_0 + s - j\omega_0}{(s-j\omega_0)(s+j\omega_0)} = \frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$$



$$\Longrightarrow \cos(\omega_0 t)\,u(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \frac{s}{s^2 + \omega_0^2} \qquad ROC: Re\{s\} > 0$$

حل ز:

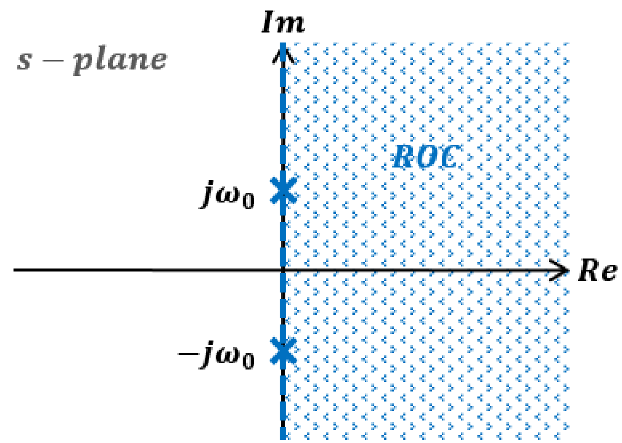
$$\mathcal{L}\{\sin(\omega_0 t)\,u(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(\omega_0 t)\,u(t) e^{-st} dt = \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{2j}\left(e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}\right) e^{-st} dt$$

$$= \frac{1}{2j}\int_0^{\infty} e^{-(s-j\omega_0)t} dt - \frac{1}{2j}\int_0^{\infty} e^{-(s+j\omega_0)t} dt$$

$$= \frac{1}{2j}\cdot\frac{-1}{s-j\omega_0} e^{-(s-j\omega_0)t}\Big|_0^{\infty} - \frac{1}{2j}\cdot\frac{-1}{s+j\omega_0} e^{-(s+j\omega_0)t}\Big|_0^{\infty}$$

$$= \frac{1}{2j}\cdot\frac{1}{s-j\omega_0} - \frac{1}{2j}\cdot\frac{1}{s+j\omega_0}$$

$Re\{s-j\omega_0\} > 0$ و $Re\{s+j\omega_0\} > 0$



$$= \frac{1}{2j}\cdot\frac{s+j\omega_0 - s + j\omega_0}{(s-j\omega_0)(s+j\omega_0)} = \frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$$

$$\Longrightarrow \sin(\omega_0 t)\,u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2} \qquad ROC: Re\{s\} > 0$$

مثال ۲: ارزیابی وجود تبدیل فوریه

برای کدام یک از سیگنال‌های مثال ۱ می‌توان تبدیل فوریه نوشت؟

الف : $\delta(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} 1 \quad ROC: entire\ \ s-plane$

حل الف: تبدیل فوریه دارد.

ب : $u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s} \quad ROC: Re\{s\} > 0$

حل ب: تبدیل فوریه ندارد.

ج : $e^{-\alpha t}\, u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s+\alpha} \quad ROC: Re\{s\} > -\alpha$

حل ج: برای $\alpha > 0$ تبدیل فوریه دارد.

د : $-e^{-\alpha t}\, u(-t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s+\alpha} \quad ROC: Re\{s\} < -\alpha$

حل د: برای $\alpha < 0$ تبدیل فوریه دارد.

ه : $e^{-\beta|t|}, \beta > 0 \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{-2\beta}{s^2-\beta^2} \quad ROC: -\beta < Re\{s\} < \beta$

حل ه : تبدیل فوریه دارد.

و : $\cos(\omega_0 t)\, u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{s}{s^2+\omega_0^2} \quad ROC: Re\{s\} > 0$

حل و: تبدیل فوریه ندارد.

ز : $\sin(\omega_0 t)\, u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2} \quad ROC: Re\{s\} > 0$

حل ز: تبدیل فوریه ندارد.

فهرست مطالب

- معرفی تبدیل لاپلاس
- ویژگی‌های ناحیه‌ی همگرایی
- وارون تبدیل لاپلاس
- ارزیابی هندسی تبدیل فوریه به کمک نمودار قطب- صفر
- ویژگی‌های تبدیل لاپلاس
- بررسی ویژگی‌های سیستم‌ها در حوزه‌ی لاپلاس
- تبدیل لاپلاس یک‌طرفه
- مثال‌های مروری
- مثال‌های نرم‌افزاری
- تمرین‌های تئوری
- تمرین‌های نرم‌افزاری

«ویژگی‌های ناحیه‌ی همگرایی»:

۱- ناحیه‌ی همگرایی نوارهایی موازی محور $j\omega$ است.

۲- برای عبارت‌های rational ، ناحیه‌ی همگرایی قطب‌ها را شامل نمی‌شود.

۳- اگر $x(t)$ در یک فاصله‌ی زمانی محدود مقدار داشته باشد و مطلق انتگرال‌پذیر باشد ناحیه‌ی همگرایی آن کل صفحه‌ی s خواهد بود.

۴- اگر سیگنال دست‌راستی باشد ناحیه‌ی همگرایی تبدیل لاپلاس آن نیز دست‌راستی خواهد بود.

۵- اگر سیگنال دست‌چپی باشد ناحیه‌ی همگرایی تبدیل لاپلاس آن نیز دست‌چپی خواهد بود.

مثال ۳: ویژگی‌های ناحیه‌ی همگرایی

تبدیل لاپلاس سیگنال $x(t) = e^{-\alpha t}\big(u(t) - u(t-T)\big)$ را به دست آورید و ناحیه‌ی همگرایی آن را تعیین کنید. آیا ROC به دست آمده با محل قطب‌ها و صفرهای $X(s)$ سازگاری دارد؟

حل:

$$X(s) = \int_0^T e^{-\alpha t} e^{-st} dt = \int_0^T e^{-(s+\alpha)t} dt = -\frac{1}{s+\alpha} e^{-(s+\alpha)t}\Big|_0^T = \frac{1 - e^{-(s+\alpha)T}}{s+\alpha}$$

$$\Longrightarrow e^{-\alpha t}\big(u(t) - u(t-T)\big) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \frac{1 - e^{-(s+\alpha)T}}{s+\alpha} \qquad ROC: entire \quad s-plane$$

$$\lim_{s\to -\alpha} X(s) = \lim_{s\to -\alpha} \frac{\frac{d}{ds}\left(1 - e^{-(s+\alpha)T}\right)}{\frac{d}{ds}(s+\alpha)} = \lim_{s\to -\alpha} T e^{-(s+\alpha)T} = T$$

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots$$

$$\Longrightarrow e^{-(s+\alpha)T} = 1 - \frac{1}{1!}(s+\alpha)T + \frac{1}{2!}(s+\alpha)^2T^2 - \frac{1}{3!}(s+\alpha)^3\,T^3 + \cdots$$

$$\Longrightarrow 1 - e^{-(s+\alpha)T} = \frac{1}{1!}(s+\alpha)T - \frac{1}{2!}(s+\alpha)^2T^2 + \frac{1}{3!}(s+\alpha)^3\,T^3 - \cdots$$

$$= (s+\alpha)T\left\{\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!}(s+\alpha)T + \frac{1}{3!}(s+\alpha)^2T^2 - \cdots\right\}$$

$$\Longrightarrow \frac{1 - e^{-(s+\alpha)T}}{s+\alpha}$$

$$= T\left\{\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!}(s+\alpha)T + \frac{1}{3!}(s+\alpha)^2T^2 - \cdots\right\}$$

فهرست مطالب

- معرفی تبدیل لاپلاس
- ویژگی‌های ناحیه‌ی همگرایی
- وارون تبدیل لاپلاس
- ارزیابی هندسی تبدیل فوریه به کمک نمودار قطب- صفر
- ویژگی‌های تبدیل لاپلاس
- بررسی ویژگی‌های سیستم‌ها در حوزه‌ی لاپلاس
- تبدیل لاپلاس یک‌طرفه
- مثال‌های مروری
- مثال‌های نرم‌افزاری
- تمرین‌های تئوری
- تمرین‌های نرم‌افزاری

وارون تبدیل لاپلاس:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s)e^{st}ds$$

مثال ۴: به دست آوردن رابطه‌ی وارون تبدیل لاپلاس

با استفاده از رابطه‌ی تبدیل لاپلاس و زوج تبدیل فوریه‌ی زمان- پیوسته، رابطه‌ی وارون تبدیل لاپلاس را به دست آورید.

حل:

$$X(s)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-st}dt$$

$$X(\sigma+j\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-(\sigma+j\omega)t}dt=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(x(t)e^{-\sigma t}\right)e^{-j\omega t}dt$$

$$\Rightarrow x(t)e^{-\sigma t}\overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow}X(\sigma+j\omega)$$

$$x(t)e^{-\sigma t}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}X(\sigma+j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}X(\sigma+j\omega)e^{(\sigma+j\omega)t}d\omega$$

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty}X(s)e^{st}\left(\frac{1}{j}ds\right)$$

$$\boxed{\Rightarrow x(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty}X(s)e^{st}ds}$$

مثال ۵: محاسبه‌ی غیرمستقیم وارون تبدیل لاپلاس

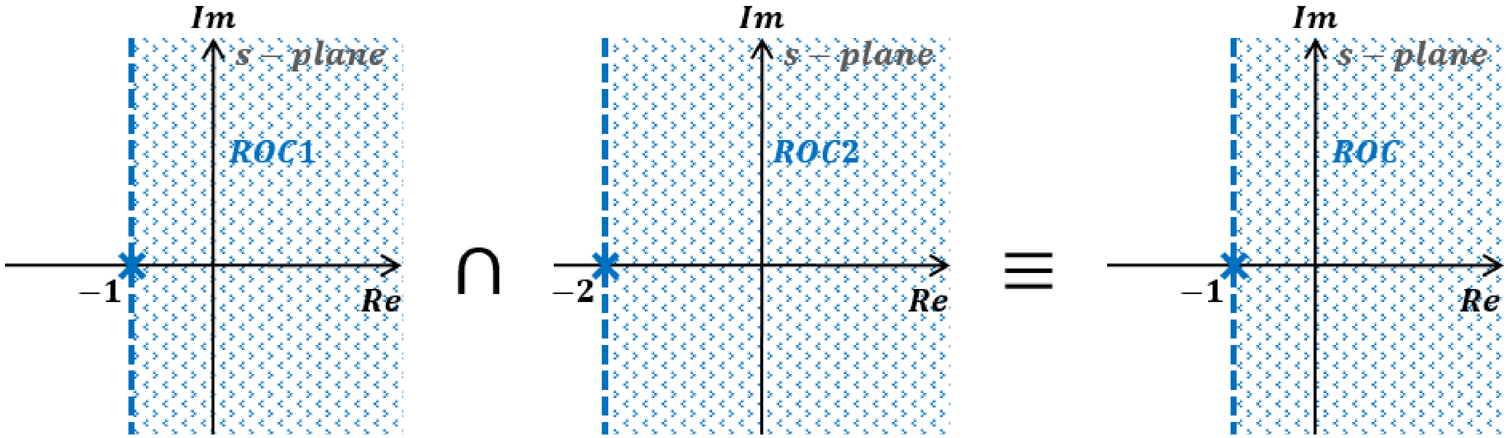
وارون تبدیل لاپلاس $X(s)$ داده شده را برای هر یک از ناحیه‌های همگرایی زیر تعیین نمایید.

الف: $Re\{s\} > -1$ ب: $-2 < Re\{s\} < -1$ ج: $Re\{s\} < -2$

حل:

$$X(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} \qquad X(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{-1}{s+2}$$

حل الف:



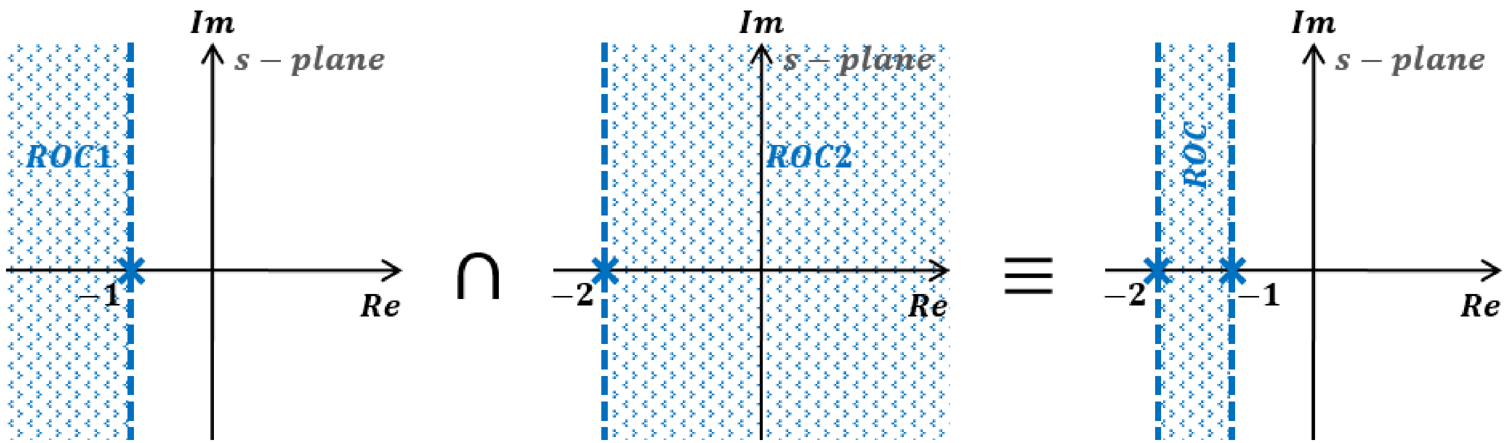
$$e^{-t}u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s+1} \qquad ROC: Re\{s\} > -1$$

$$e^{-2t}u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s+2} \qquad ROC: Re\{s\} > -2$$

$$\Longrightarrow x(t) = e^{-t}u(t) - e^{-2t}u(t)$$

$$X(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} \qquad X(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{-1}{s+2}$$

حل ب:



$$-e^{-t}u(-t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s+1} \qquad ROC: Re\{s\} < -1$$

$$e^{-2t}u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s+2} \qquad ROC: Re\{s\} > -2$$

$$\Rightarrow\ x(t) = -e^{-t}u(-t) - e^{-2t}u(t)$$

حل ج:

$$-e^{-t}u(-t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s+1} \qquad ROC: Re\{s\} < -1$$

$$-e^{-2t}u(-t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s+2} \qquad ROC: Re\{s\} < -2$$

$$\Rightarrow\ x(t) = -e^{-t}u(-t) + e^{-2t}u(-t)$$

فهرست مطالب

- معرفی تبدیل لاپلاس
- ویژگی‌های ناحیه‌ی همگرایی
- وارون تبدیل لاپلاس
- ارزیابی هندسی تبدیل فوریه به کمک نمودار قطب- صفر
- ویژگی‌های تبدیل لاپلاس
- بررسی ویژگی‌های سیستم‌ها در حوزه‌ی لاپلاس
- تبدیل لاپلاس یک‌طرفه
- مثال‌های مروری
- مثال‌های نرم‌افزاری
- تمرین‌های تئوری
- تمرین‌های نرم‌افزاری

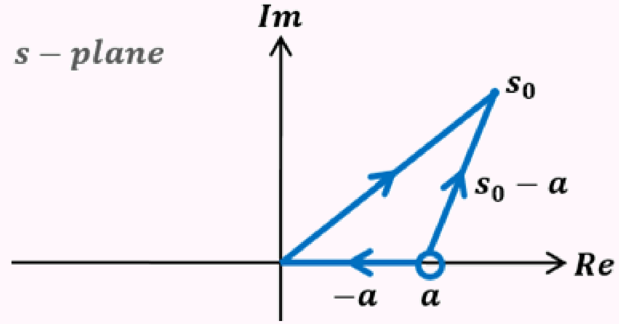
$$X(s) = s - a \qquad X(s_0) = s_0 - a$$

در حالت ساده:

فقط یک صفر

$|X(s_0)| =$ طول بردار صفر

$\measuredangle X(s_0) =$ زاویه‌ی بردار صفر



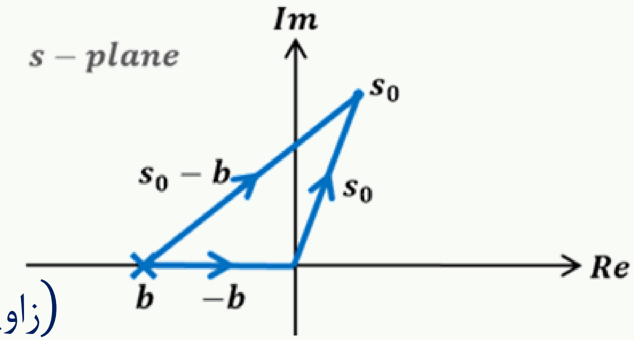
$$X(s) = \frac{1}{s-b} \qquad X(s_0) = \frac{1}{s_0 - a}$$

در حالت ساده:

فقط یک قطب

$|X(s_0)| = \dfrac{1}{\text{طول بردار قطب}}$

$\measuredangle X(s_0) = -(\text{زاویه‌ی بردار قطب})$



در حالت کلی:

$$|X(s_0)| = \frac{\text{حاصل‌ضرب طول بردارهای صفر}}{\text{حاصل‌ضرب طول بردارهای قطب}}$$

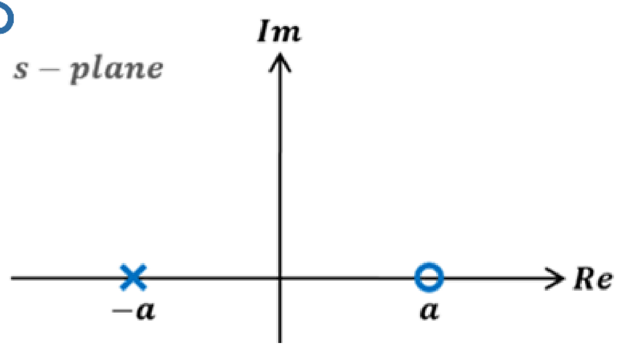
$$\measuredangle X(s_0) = (\text{مجموع زاویه‌ی بردارهای صفر}) - (\text{مجموع زاویه‌ی بردارهای قطب})$$

ارزیابی هندسی تبدیل فوریه:

$$|X(j\omega)| = \frac{\text{حاصل‌ضرب طول بردارهای صفر}}{\text{حاصل‌ضرب طول بردارهای قطب}}$$

$$\measuredangle X(j\omega) = (\text{مجموع زاویه‌ی بردارهای صفر}) - (\text{مجموع زاویه‌ی بردارهای قطب})$$

مثال ۶: ارزیابی هندسی تبدیل فوریه



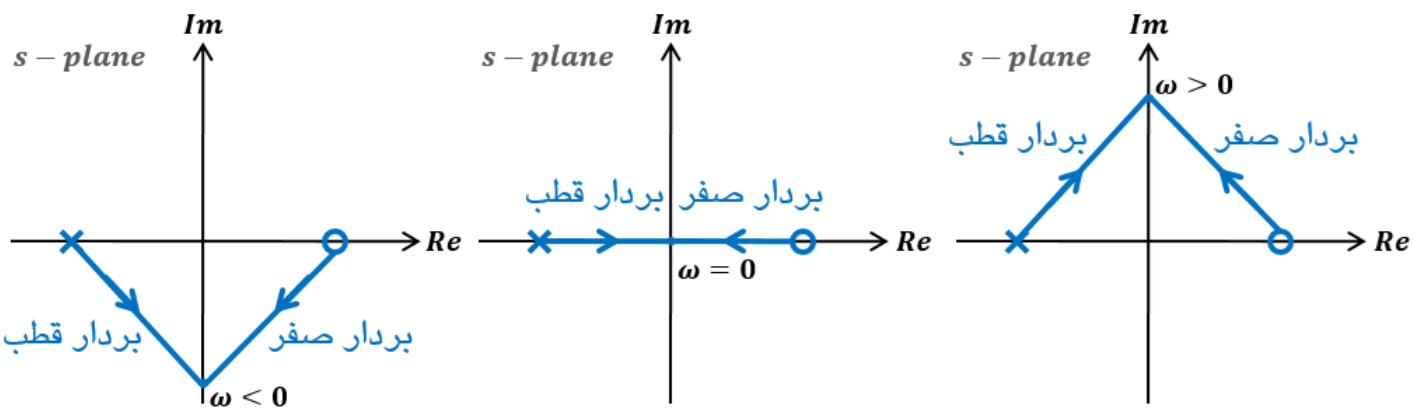
نمودار قطب– صفر یک سیستم تمام‌گذر داده شده است.

الف: اندازه و فاز تبدیل فوریه‌ی آن را ارزیابی نموده و رسم کنید.

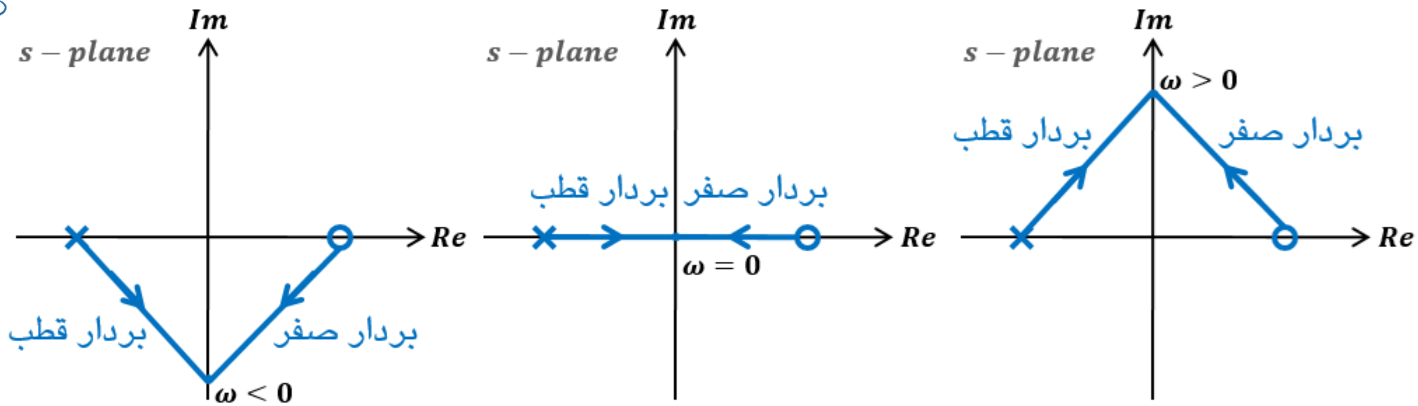
ب: چرا این فیلتر را تمام‌گذر گویند و به نظر شما، چنین فیلتری چه کاربردی می‌تواند داشته باشد؟

حل الف:

$$|H(j\omega)| = \frac{\text{طول بردار صفر}}{\text{طول بردار قطب}}$$



$$\Longrightarrow \ |H(j\omega)| = 1$$



$$\measuredangle H(j\omega) = (\text{زاویه‌ی بردار صفر}) - (\text{زاویه‌ی بردار قطب})$$

$$\omega \to -\infty: \quad \measuredangle H(j\omega) = \left(-\left(\frac{\pi}{2}+\varepsilon\right)\right) - \left(-\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)\right) = -2\varepsilon$$

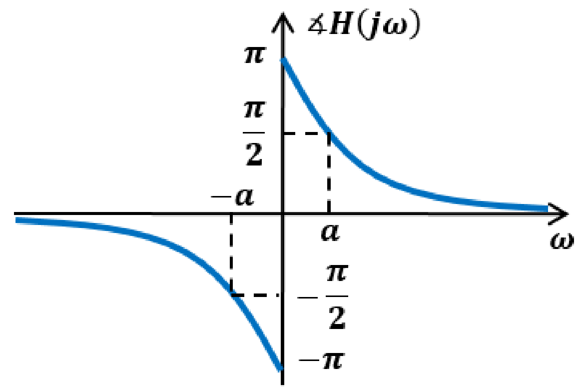
$$\omega \to -a: \quad \measuredangle H(j\omega) = \left(-\frac{3\pi}{4}\right) - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\pi}{2}$$

$$\omega \to 0^-: \quad \measuredangle H(j\omega) = (-\pi) - (0) = -\pi$$

$$\omega \to 0^+: \quad \measuredangle H(j\omega) = (\pi) - (0) = \pi$$

$$\omega \to a: \quad \measuredangle H(j\omega) = \left(\frac{3\pi}{4}\right) - \left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}$$

$$\omega \to +\infty: \quad \measuredangle H(j\omega) = \left(\frac{\pi}{2}+\varepsilon\right) - \left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right) = 2\varepsilon$$



حل ب: فاز آن غیرصفر بوده و می‌تواند برای دستکاری یا اصلاح فاز مورد استفاده قرار گیرد.

فهرست مطالب

ویژگی‌های تبدیل لاپلاس

- ویژگی خطی بودن،
- ویژگی جابجایی زمانی،
- ویژگی جابجایی در حوزه‌ی s ،
- ویژگی مقیاس زمانی،
- ویژگی مزدوج،
- ویژگی کانولوشن،
- ویژگی مشتق‌گیری در حوزه‌ی زمان،
- ویژگی مشتق‌گیری در حوزه‌ی s،
- ویژگی انتگرال‌گیری در حوزه‌ی زمان،
- قضیه‌ی مقدار اولیه و قضیه‌ی مقدار نهایی

ویژگی خطی بودن

$$\begin{cases} x_1(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} X_1(s) & ROC: R_1 \\ x_2(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} X_2(s) & ROC: R_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \alpha x_1(t) + \beta x_2(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \alpha X_1(s) + \beta X_2(s) \qquad ROC: containing\ R_1 \cap R_1$$

مثال ۷: ویژگی خطی بودن

سیگنال $x(t) = x_1(t) - x_2(t)$ را در نظر بگیرید. تبدیل لاپلاس $x_1(t)$ و $x_2(t)$ داده شده است. تبدیل لاپلاس $x(t)$ را به دست آورده و ناحیه‌ی همگرایی آن را وارسی کنید.

$$X_1(s) = \frac{1}{s+1} \qquad ROC: Re\{s\} > -1$$

$$X_2(s) = \frac{1}{(s+2)(s+1)} \qquad ROC: Re\{s\} > -1$$

حل:

$$X(s) = X_1(s) - X_2(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{s+2-1}{(s+1)(s+2)} = \frac{1}{s+2}$$

ویژگی جابجایی زمانی

$$x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X(s) \quad ROC: R \qquad \Rightarrow x(t-t_0) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} e^{-t_0 s}X(s) \quad ROC: R$$

ویژگی جابجایی در حوزه‌ی s

$x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X(s) \quad ROC: R \qquad \Rightarrow \quad e^{s_0 t}x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X(s-s_0) \quad ROC: R + Re\{s_0\}$

ویژگی مقیاس زمانی

$$x(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} X(s) \quad ROC: R \qquad \Rightarrow x(at) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{|a|} X\left(\frac{s}{a}\right) \quad ROC: \frac{R}{a}$$

در حالت خاص، برای $a = -1$:

$$x(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} X(s) \quad ROC: R \qquad \Rightarrow x(-t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} X(-s) \quad ROC: -R$$

نکته:

با بهره‌گیری از ویژگی وارون زمانی، به سادگی می‌توان تقارن‌هایی را در عبارت تبدیل لاپلاس و نمودار قطب- صفر آن برای سیگنال‌های دارای تقارن زوج یا فرد به صورت زیر مطرح کرد:

- اگر $x(t)$ دارای تقارن زوج باشد (یعنی $x(t) = x(-t)$)، آنگاه $X(s)$ نیز دارای تقارن زوج $\big(X(s) = X(-s)\big)$ و ناحیه‌ی همگرایی دوطرفه خواهد بود.
- اگر $x(t)$ دارای تقارن فرد باشد (یعنی $x(t) = -x(-t)$)، آنگاه $X(s)$ نیز دارای تقارن فرد $\big(X(s) = -X(-s)\big)$ و ناحیه‌ی همگرایی دوطرفه خواهد بود.
- اگر $x(t)$ دارای تقارن زوج یا فرد باشد نمودار قطب- صفر $X(s)$ نسبت به مبدا صفحه‌ی s متقارن خواهد بود. علت را توجیه کنید!

دکتر علی مالکی

ویژگی مزدوج

$$x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X(s) \quad ROC: R \qquad \Rightarrow x^*(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X^*(s^*) \quad ROC: R$$

نکته:

اگر $x(t)$ حقیقی باشد قطب‌ها و صفرهای $X(s)$ یا حقیقی‌اند یا جفت‌های مزدوج مختلط. به عبارت دیگر، چنانچه $x(t)$ حقیقی باشد نمودار قطب- صفر $X(s)$ نسبت به محور $Re\{s\}$ یا σ متقارن خواهد بود. برای وارسی این نکته دقت کنید که اگر $x(t)$ حقیقی باشد $x(t)=x^*(t)$ است و طبق ویژگی مزدوج تبدیل لاپلاس داریم $X(s)=X^*(s^*)$. برای بررسی مفهوم تساوی $X(s)=X^*(s^*)$، یک $X(s)$ ساده شامل دو قطب و دو صفر به صورت زیر در نظر بگیرید.

$$X(s)=\frac{(s-a)(s-b)}{(s-c)(s-d)} \quad\Rightarrow\quad X^*(s)=\frac{(s^*-a^*)(s^*-b^*)}{(s^*-c^*)(s^*-d^*)} \quad\Rightarrow\quad X^*(s^*)=\frac{(s-a^*)(s-b^*)}{(s-c^*)(s-d^*)}$$

$$X(s)=X^*(s^*) \quad\Rightarrow\quad \frac{(s-a)(s-b)}{(s-c)(s-d)}=\frac{(s-a^*)(s-b^*)}{(s-c^*)(s-d^*)}$$

این تساوی در صورتی برقرار است که یکی از شرایط زیر برقرار باشد. این شرایط بیانگر آن است که قطب‌ها و صفرهای $X(s)$ یا حقیقی‌اند یا جفت‌های مزدوج مختلط می‌باشند.

$$\begin{cases} a=a^* \\ b=b^* \\ c=c^* \\ d=d^* \end{cases} \quad or \quad \begin{cases} a=a^* \\ b=b^* \\ c=d^* \\ d=c^* \end{cases} \quad or \quad \begin{cases} a=b^* \\ b=a^* \\ c=c^* \\ d=d^* \end{cases} \quad or \quad \begin{cases} a=b^* \\ b=a^* \\ c=d^* \\ d=c^* \end{cases}$$

ویژگی کانولوشن

$$x_1(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X_1(s) \qquad ROC: R_1$$

$$x_2(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X_2(s) \qquad ROC: R_2$$

$$\Longrightarrow x_1(t) * x_2(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X_1(s) \cdot X_2(s) \qquad ROC: containing\ R_1 \cap R_2$$

مثال ۸: ویژگی کانولوشن

با فرض $x(t) = x_1(t) * x_2(t)$ ، تبدیل لاپلاس $x(t)$ یعنی $X(s)$ را برای $X_1(s)$ و $X_2(s)$ داده شده به دست آورید.

$$X_1(s) = \frac{s+1}{s+2} \qquad ROC: Re\{s\} > -2$$

$$X_2(s) = \frac{s+2}{s+1} \qquad ROC: Re\{s\} > -1$$

حل:

$$x(t) = x_1(t) * x_2(t)$$

$$\Rightarrow X(s) = X_1(s) \cdot X_2(s)$$

$$\Rightarrow X(s) = \frac{s+1}{s+2} \cdot \frac{s+2}{s+1} = 1$$

ناحیه‌ی همگرایی آن کل صفحه‌ی s است.

ویژگی مشتق‌گیری در حوزه‌ی زمان

$$x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X(s) \quad ROC: R \qquad \Rightarrow \frac{dx(t)}{dt} \xleftrightarrow{\mathcal{L}} sX(s) \quad ROC: containing\ R$$

مثال ۹: ویژگی مشتق‌گیری در حوزه‌ی زمان

با استفاده از تبدیل لاپلاس سیگنال پله واحد و ویژگی مشتق‌گیری زمانی، تبدیل لاپلاس ضربه واحد را به دست آورید. اثر مشتق‌گیری زمانی این سیگنال بر ناحیه‌ی همگرایی تبدیل لاپلاس آن چیست؟

حل:

$$u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s} \qquad ROC:\ Re\{s\} > 0$$

$$\frac{d}{dt}u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} s \cdot \frac{1}{s} \qquad ROC: containing\ Re\{s\} > 0$$

$$\Rightarrow \delta(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} 1 \qquad ROC: entire\ \ s - plane$$

ویژگی مشتق‌گیری در حوزه‌ی s

$$x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X(s) \quad ROC:\ R \qquad \Rightarrow \quad -tx(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{d}{ds}X(s) \quad ROC: R$$

مثال ۱۰: ویژگی مشتق‌گیری در حوزه‌ی s

تبدیل لاپلاس سیگنال $x(t) = te^{-\alpha t}u(t)$ را به دست آورید.

حل:

$$e^{-\alpha t}u(t) \stackrel{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{s+\alpha} \quad ROC: \ Re\{s\} > -\alpha$$

$$(-t)e^{-\alpha t}u(t) \stackrel{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s+\alpha}\right) \quad ROC: Re\{s\} > -\alpha$$

$$te^{-\alpha t}u(t) \stackrel{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{(s+\alpha)^2} \quad ROC: \ Re\{s\} > -\alpha$$

ویژگی انتگرال‌گیری در حوزه‌ی زمان

$$x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X(s) \quad ROC:\ R$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s}X(s) \quad ROC: containing\ \{R \cap Re\{s\} > 0\}$$

مثال ۱۱: اثبات ویژگی انتگرال‌گیری زمانی

ویژگی انتگرال‌گیری در حوزه‌ی زمان را برای تبدیل لاپلاس اثبات کنید.

حل:

$$x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X(s) \quad ROC:\ R$$

$$u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s} \quad ROC:\ Re\{s\} > 0$$

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau = x(t) * u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s}X(s) \quad ROC: containing\ \{R \cap Re\{s\} > 0\}$$

قضیه‌ی مقدار اولیه و قضیه‌ی مقدار نهایی

$$x(0^+) = \lim_{s\to\infty} sX(s)$$

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{s\to 0} sX(s)$$

فهرست مطالب

شرط علی بودن

حوزه‌ی زمان

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t)$$

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

حوزه‌ی لاپلاس

$$X(s) \longrightarrow \boxed{H(s)} \longrightarrow Y(s)$$

$$Y(s) = X(s) \cdot H(s)$$

- شرط لازم برای علی بودن سیستم آن است که ناحیه‌ی همگرایی تابع سیستم دست‌راستی باشد.
- برای سیستمی با تابع سیستم rational ، شرط لازم و کافی برای علی بودن سیستم آن است که ناحیه‌ی همگرایی تابع سیستم دست‌راستی باشد.

- شرط لازم برای ضدعلی بودن سیستم آن است که ناحیه‌ی همگرایی تابع سیستم دست‌چپی باشد.
- برای سیستمی با تابع سیستم rational ، شرط لازم و کافی برای ضدعلی بودن سیستم آن است که ناحیه‌ی همگرایی تابع سیستم دست‌چپی باشد.

شرط پایداری

حوزه‌ی لاپلاس

$$X(s) \longrightarrow \boxed{H(s)} \longrightarrow Y(s)$$

$$Y(s) = X(s) \cdot H(s)$$

حوزه‌ی زمان

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t)$$

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

❖ شرط لازم و کافی برای پایداری سیستم آن است که ناحیه‌ی همگرایی تابع سیستم شامل محور $j\omega$ باشد.

❖ شرط لازم و کافی برای پایداری یک سیستم علی آن است که تمام قطب‌های تابع سیستم در سمت چپ محور $j\omega$ باشند.

واضح است که ناحیه‌ی همگرایی تابع سیستم یک سیستم علی دست‌راستی است و چنانچه تمام قطب‌های تابع سیستم در سمت چپ محور $j\omega$ باشند ناحیه‌ی همگرایی شامل محور $j\omega$ خواهد بود. در مباحثی نظیر کنترل خطی که علی بودن، پیش‌فرض است پایداری سیستم بر اساس محل قطب‌های سیستم ارزیابی می‌گردد.

مثال ۱۲: وارسی شرط ویژگی علی بودن در حوزه‌ی لاپلاس

$H_1(s)$ و $H_2(s)$ تابع سیستم دو سیستم LTI داده شده است که به ترتیب rational و irrational می‌باشند. ناحیه‌ی همگرایی هر دو دست‌راستی است. با محاسبه‌ی پاسخ ضربه‌ی دو سیستم و وارسی علی بودن به کمک پاسخ ضربه، کفایت شرط دست‌راستی بودن ناحیه‌ی همگرایی تابع سیستم rational برای علی بودن سیستم را تحلیل و توجیه کنید.

$$H_1(s) = \frac{1}{s+1} \quad ROC: Re\{s\} > -1$$

$$H_2(s) = \frac{e^s}{s+1} \quad ROC: Re\{s\} > -1$$

حل:

سیستم اول، علی است. $h_1(t) = e^{-t}u(t)$

سیستم دوم، غیرعلی است. $h_2(t) = e^{-(t+1)}u(t+1)$

مثال ۱۳: ویژگی‌های سیستم در حوزه‌ی لاپلاس

یک سیستم LTI با عبارت تابع سیستم $H(s)$ داده شده است.

$$H(s) = \frac{3s-3}{(s+1)(s-2)}$$

پاسخ ضربه‌ی سیستم را چنان تعیین کنید که سیستم،

الف: علی باشد.   ب: پایدار باشد.   ج: ضد علی باشد.

حل:

$$H(s) = \frac{2}{s+1} + \frac{1}{s-2}$$

حل الف)

$$H(s) = \frac{2}{s+1} + \frac{1}{s-2} \quad ROC: Re\{s\} > 2$$

$$\Longrightarrow h(t) = 2e^{-t}u(t) + e^{+2t}u(t)$$

حل ب)

$$H(s) = \frac{2}{s+1} + \frac{1}{s-2} \quad ROC: -1 < Re\{s\} < 2$$

$$\Longrightarrow h(t) = 2e^{-t}u(t) - e^{2t}u(-t)$$

حل ج)

$$H(s) = \frac{2}{s+1} + \frac{1}{s-2} \quad ROC: Re\{s\} < -1$$

$$\Longrightarrow h(t) = -2e^{-t}u(-t) - e^{2t}u(-t)$$

فهرست مطالب

- معرفی تبدیل لاپلاس
- ویژگی‌های ناحیه‌ی همگرایی
- وارون تبدیل لاپلاس
- ارزیابی هندسی تبدیل فوریه به کمک نمودار قطب- صفر
- ویژگی‌های تبدیل لاپلاس
- بررسی ویژگی‌های سیستم‌ها در حوزه‌ی لاپلاس
- تبدیل لاپلاس یک‌طرفه
- مثال‌های مروری
- مثال‌های نرم‌افزاری
- تمرین‌های تئوری
- تمرین‌های نرم‌افزاری

تعریف تبدیل لاپلاس یک طرفه

«تبدیل لاپلاس یک‌طرفه»:

$$x(t) \xleftrightarrow{\text{ULT}} X(s)$$

$$X(s) \triangleq \int_{0^-}^{\infty} x(t) e^{-st} dt$$

نکته: کاربرد تبدیل لاپلاس یک طرفه

تبدیل لاپلاس یک‌طرفه برای تجزیه و تحلیل آن دسته از سیستم‌های توصیف شده با معادله دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت که دارای شرط اولیه‌ی غیرصفر هستند کاربرد دارد.

مثال ۱۴: تبدیل لاپلاس یک‌طرفه

تبدیل لاپلاس دوطرفه و تبدیل لاپلاس یک‌طرفه‌ی سیگنال زیر را به دست آورید.

$$x(t) = e^{-\alpha(t+1)}u(t+1)$$

حل:

$$e^{-\alpha t}u(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{s+\alpha} \quad ROC:\ Re\{s\} > -\alpha$$

$$\Rightarrow e^{-\alpha(t+1)}\,u(t+1) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \frac{e^{s}}{s+\alpha} \quad ROC:\ Re\{s\} > -\alpha$$

$$ULT\{e^{-\alpha(t+1)}u(t+1)\} = \int_{0^-}^{\infty} e^{-\alpha(t+1)}u(t+1)e^{-st}dt$$

$$= \int_{0^-}^{\infty} e^{-\alpha(t+1)}e^{-st}dt$$

$$= \int_{0^-}^{\infty} e^{-\alpha}e^{-(s+\alpha)t}dt$$

$$= e^{-\alpha}\cdot\frac{-1}{s+\alpha}e^{-(s+\alpha)t}\Big|_{0^-}^{\infty}$$

$$= \frac{e^{-\alpha}}{s+\alpha}$$

$$\Rightarrow e^{-\alpha(t+1)}u(t+1) \overset{\text{ULT}}{\longleftrightarrow} \frac{e^{-\alpha}}{s+\alpha}$$

مثال ۱۵: ویژگی مشتق‌گیری تبدیل لاپلاس یک‌طرفه

اگر $\mathcal{X}(s)$ تبدیل لاپلاس یک‌طرفه‌ی سیگنال $x(t)$ باشد آنگاه تبدیل لاپلاس $dx(t)/dt$ را به دست آورید.

حل:

$$ULT\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} = \int_{0^-}^{\infty} \frac{dx(t)}{dt} e^{-st} dt = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st} dx(t)$$

$$= x(t)e^{-st}\Big|_{0^-}^{\infty} - \int_{0^-}^{\infty} x(t)(-s)e^{-st}dt$$

$$= s\int_{0^-}^{\infty} x(t)e^{-st}dt - x(0^-) = s\mathcal{X}(s) - x(0^-)$$

$$\Rightarrow \frac{dx(t)}{dt} \xleftrightarrow{\text{ULT}} s\mathcal{X}(s) - x(0^-)$$

$$\Rightarrow \frac{d^2}{dt^2}x(t) \xleftrightarrow{\text{ULT}} s^2\mathcal{X}(s) - sx(0^-) - x'(0^-)$$

مثال ۱۶: سیستم توصیف شده با معادله دیفرانسیل

سیستم توصیف شده با معادله دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت زیر را در نظر بگیرید.

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+3\frac{dy(t)}{dt}+2y(t)=x(t)$$

الف: با فرض سکون اولیه برای سیستم، پاسخ این سیستم را به ورودی $x(t)=\alpha u(t)$ به دست آورید.

ب: با فرض شرایط اولیه‌ی $y(0^-)=\beta$ و $y'(0^-)=\gamma$، پاسخ این سیستم را به ورودی $x(t)=\alpha u(t)$ به دست آورید.

حل الف:

$$s^2Y(s)+3sY(s)+2Y(s)=X(s)$$

$$\Rightarrow H(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{1}{s^2+3s+2}=\frac{1}{(s+2)(s+1)}\qquad ROC: Re\{s\}>-1$$

$$X(s)=\frac{\alpha}{s}\qquad ROC: Re\{s\}>0$$

$$\Rightarrow Y(s)=X(s)\cdot H(s)=\frac{\alpha}{s(s+1)(s+2)}\qquad ROC: Re\{s\}>0$$

$$\Rightarrow Y(s)=\frac{\frac{\alpha}{2}}{s}+\frac{-\alpha}{s+1}+\frac{\frac{\alpha}{2}}{s+2}\qquad ROC: Re\{s\}>0$$

$$\Rightarrow y(t)=\frac{\alpha}{2}u(t)-\alpha e^{-t}u(t)+\frac{\alpha}{2}e^{-2t}u(t)$$

مثال ۱۶: سیستم توصیف شده با معادله دیفرانسیل

سیستم توصیف شده با معادله دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت زیر را در نظر بگیرید.

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+3\frac{dy(t)}{dt}+2y(t)=x(t)$$

الف: با فرض سکون اولیه برای سیستم، پاسخ این سیستم را به ورودی $x(t)=\alpha u(t)$ به دست آورید.

ب: با فرض شرایط اولیه‌ی $y(0^-)=\beta$ و $y'(0^-)=\gamma$، پاسخ این سیستم را به ورودی $x(t)=\alpha u(t)$ به دست آورید.

حل ب:

$$s^2\mathcal{Y}(s)-sy(0^-)-y'(0^-)+3s\mathcal{Y}(s)-3y(0^-)+2\mathcal{Y}(s)=\mathcal{X}(s)$$

$$\Rightarrow (s^2+3s+2)\mathcal{Y}(s)+(-s-3)\beta-\gamma=\frac{\alpha}{s}$$

$$\Rightarrow \mathcal{Y}(s)=\frac{\alpha}{s(s+1)(s+2)}+\frac{(s+3)\beta+\gamma}{(s+1)(s+2)}$$

$$\Rightarrow \mathcal{Y}(s)=\left(\frac{\frac{\alpha}{2}}{s}+\frac{-\alpha}{s+1}+\frac{\frac{\alpha}{2}}{s+2}\right)+\left(\frac{2\beta+\gamma}{s+1}+\frac{-(\beta+\gamma)}{s+2}\right)$$

$$\Rightarrow y(t)=\left(\frac{\alpha}{2}u(t)-\alpha e^{-t}u(t)+\frac{\alpha}{2}e^{-2t}u(t)\right)+\left((2\beta+\gamma)e^{-t}u(t)-(\beta+\gamma)e^{-2t}u(t)\right)$$

فهرست مطالب

گفت ما را هفت وادی در ره است   چون گذشتی هفت وادی، درگه است

وانیامد در جهان زین راه کس   نیست از فرسنگ آن آگاه کس

چون نیامد باز کس زین راه دور   چون دهندت آگهی ای ناصبور؟

چون شدند آن جایگه گم سر به سر   کی خبر بازت دهد ای بی خبر؟

هست وادی طلب آغاز کار   وادی عشق است از آن پس، بی کنار

پس سیم وادی است آن معرفت   پس چهارم وادی استغنا صفت

هست پنجم وادی توحید پاک   پس ششم وادی حیرت صعبناک

هفتمین وادی فقر است و فنا   بعد از این روی روش نبود تو را

در کشش افتی روش گم گرددت   گر بود یک قطره قلزم گرددت

عطار نیشابوری