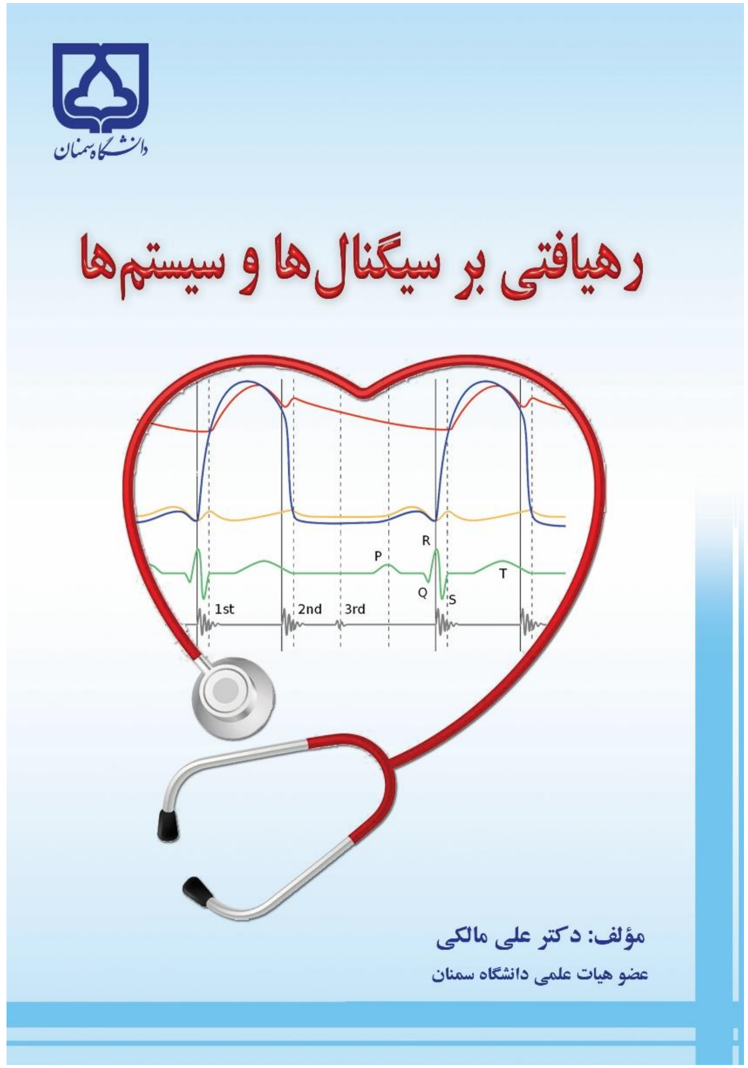
سیگنال‌ها و سیستم‌ها

مبحث هفتم

تبدیل Z

دکتر علی مالکی

http://maleki.semnan.ac.ir


دانشگاه سمنان
رهیافتی بر سیگنال‌ها و سیستم‌ها
P
R
T
Q
S
1st
2nd
3rd
مؤلف: دکتر علی مالکی
عضو هیات علمی دانشگاه سمنان

اهداف فصل

پس از مطالعه‌ی این فصل قادر خواهید بود:

حوزه‌ی مختلط $\mathcal{Z}$ و چگونگی مهاجرت از حوزه‌ی زمان به حوزه‌ی $\mathcal{Z}$ را بشناسید.

با نقاط ضعف و قوت تبدیل $\mathcal{Z}$ در مقایسه با تبدیل فوریه‌ی زمان- گسسته آشنا شوید.

زوج تبدیل $\mathcal{Z}$ سیگنال‌های پرکاربرد را به دست آورده و به کار گیرید.

مفهوم ناحیه‌ی همگرایی تبدیل $\mathcal{Z}$ را توصیف کرده و ویژگی‌های ناحیه‌ی همگرایی را برشمارید.

ویژگی‌های تبدیل $\mathcal{Z}$ را بشناسید و از آنها برای تعیین تبدیل $\mathcal{Z}$ و وارون تبدیل استفاده کنید.

از ابزار تبدیل $\mathcal{Z}$ برای تجزیه و تحلیل سیستم‌ها و ارزیابی ویژگی‌های آنها بهره گیرید.

از تبدیل $\mathcal{Z}$ یک‌طرفه برای تحلیل سیستم‌های توصیف شده با معادله دیفرنس خطی با ضرایب ثابت با شرط‌های اولیه‌ی غیرصفر استفاده کنید.

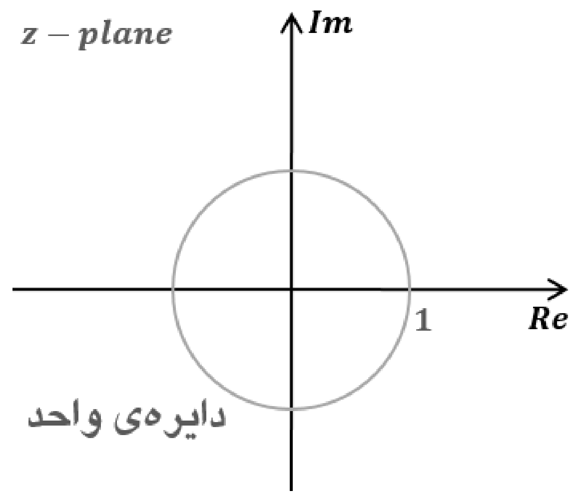
دکتر علی مالکی

فهرست مطالب

معرفی تبدیل $\mathcal{Z}$

$$x[n] \xleftrightarrow{z} X(z)$$

$$X(z) \triangleq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, z^{-n}$$



$$X(e^{j\omega}) = X(z)\Big|_{z\,=\,e^{j\omega}}$$

نکته: وجه تسمیه‌ی «دوطرفه» در نام تبدیل $\mathcal{Z}$ دوطرفه

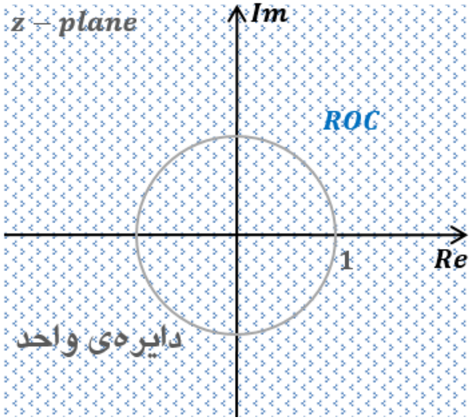
علت اطلاق اصطلاح «دوطرفه» برای این نوع تبدیل $\mathcal{Z}$، محاسبه‌ی زیگما از $-\infty$ تا $+\infty$ در تعریف آن است. در تعریف تبدیل $\mathcal{Z}$ یک‌طرفه، محدوده‌ی زیگما از صفر تا بی‌نهایت است.

مثال ۱: تبدیل $\mathcal{Z}$ سیگنال‌های پرکاربرد

تبدیل $\mathcal{Z}$ سیگنال‌های پرکاربرد زیر را محاسبه کنید. برای هر مورد، محل قطب‌ها و صفرهای عبارت تبدیل $\mathcal{Z}$ را محاسبه نموده و به همراه ناحیه‌ی همگرایی در صفحه‌ی z نشان دهید.

الف: $\delta[n]$ ب: $u[n]$ ج: $\alpha^n u[n]$

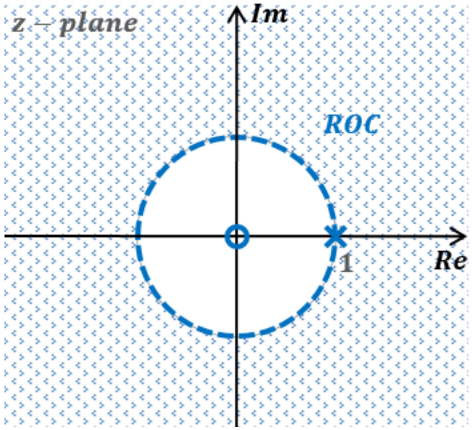
د: $-\alpha^n u[-n-1]$ هـ: $r^n \cos(\Omega_0 n)\, u[n]$ و: $r^n \sin(\Omega_0 n) u[n]$



حل الف:

$$\mathcal{Z}\{\delta[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta[n]\, z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta[n] = 1$$

$$\Rightarrow \delta[n] \xleftrightarrow{z} 1 \quad ROC: entire\ \ z-plane$$



حل ب:

$$\mathcal{Z}\{u[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u[n]\, z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(z^{-1}\right)^n$$

$$= \frac{1}{1-z^{-1}} \quad ROC: \left|z^{-1}\right| < 1 \qquad = \frac{z}{z-1}$$

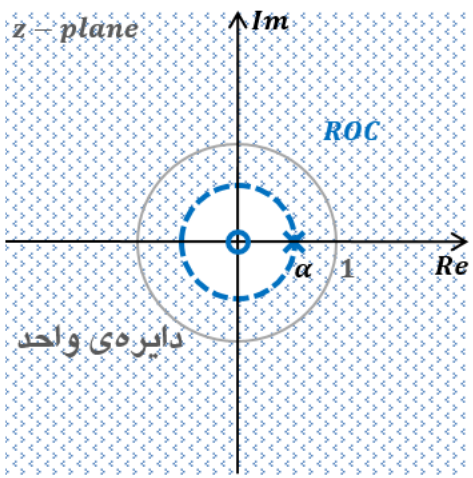
$$\Rightarrow u[n] \xleftrightarrow{z} \frac{1}{1-z^{-1}} \quad ROC: |z| > 1$$

حل ج:

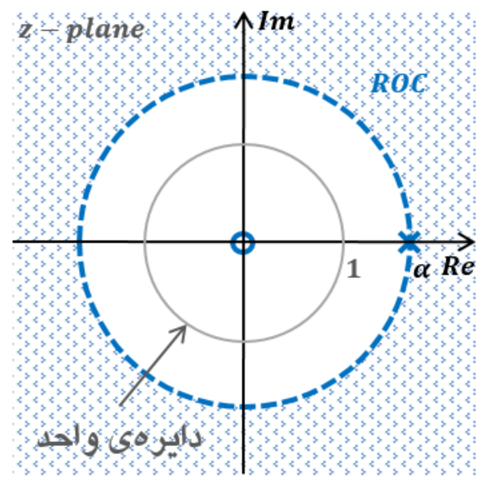
$$\mathcal{Z}\{\alpha^n u[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha^n u[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\alpha z^{-1}\right)^n = \frac{1}{1-\alpha z^{-1}} \quad ROC: \left|\alpha\, z^{-1}\right| < 1 \quad = \frac{z}{z-\alpha}$$

$$\Longrightarrow \alpha^n u[n] \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} \frac{1}{1-\alpha z^{-1}} \qquad ROC:\ |z| > |\alpha|$$

$|\alpha| < 1$



$|\alpha| > 1$



حل د:

$$\mathcal{Z}\{-\alpha^n u[-n-1]\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} -\alpha^n u[-n-1] z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} -(\alpha^{-1}z)^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} -(\alpha^{-1}z)^{n}$$

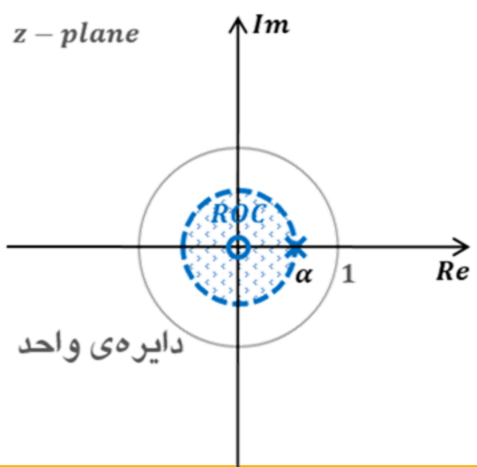
$$= \frac{-\alpha^{-1}z}{1-\alpha^{-1}z} \quad ROC: |\alpha^{-1} z| < 1$$

$$= \frac{1}{1-\alpha z^{-1}} \quad ROC: |z| < |\alpha|$$

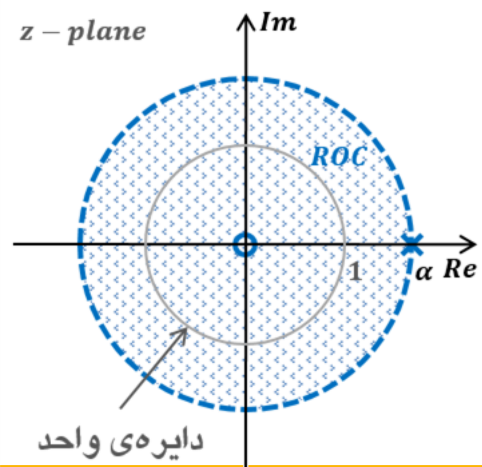
$$= \frac{z}{z-\alpha}$$

$$\Longrightarrow \; -\alpha^n u[-n-1] \overset{z}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1-\alpha z^{-1}} \quad ROC: |z| < |\alpha|$$

$|\alpha| < 1$



$|\alpha| > 1$



حل ه:

$$\mathcal{Z}\{r^n\cos(\Omega_0 n)\,u[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} r^n\cos(\Omega_0 n)\,u[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} r^n\cdot\frac{1}{2}\left(e^{j\Omega_0 n}+e^{-j\Omega_0 n}\right)z^{-n}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(re^{j\Omega_0}z^{-1}\right)^n + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(re^{-j\Omega_0}z^{-1}\right)^n$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-re^{j\Omega_0}z^{-1}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-re^{-j\Omega_0}z^{-1}} \qquad ROC: |z| > |r|$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1-re^{-j\Omega_0}z^{-1}+1-re^{j\Omega_0}z^{-1}}{(1-re^{j\Omega_0}z^{-1})(1-re^{-j\Omega_0}z^{-1})}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{2-r\left(e^{j\Omega_0}+e^{-j\Omega_0}\right)z^{-1}}{(1-re^{j\Omega_0}z^{-1})(1-re^{-j\Omega_0}z^{-1})}$$

$$= \frac{1-r\cos(\Omega_0)\,z^{-1}}{(1-re^{j\Omega_0}z^{-1})(1-re^{-j\Omega_0}z^{-1})}$$

$$= \frac{1-r\cos(\Omega_0)\,z^{-1}}{1-2r\cos(\Omega_0)\,z^{-1}+r^2z^{-2}}$$

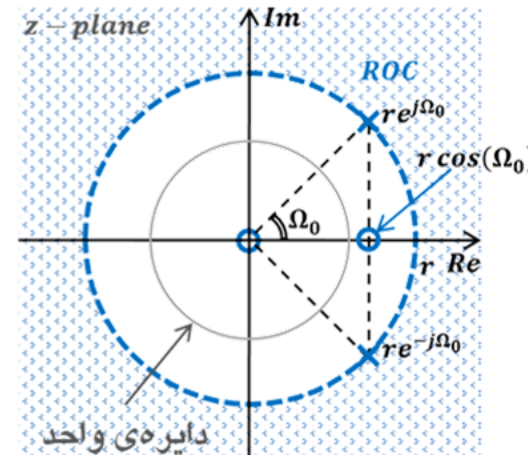
$$= \frac{z(z-r\cos(\Omega_0))}{(z-re^{j\Omega_0})(z-re^{-j\Omega_0})}$$

$z_1 = 0 \qquad z_2 = r\cos(\Omega_0)$

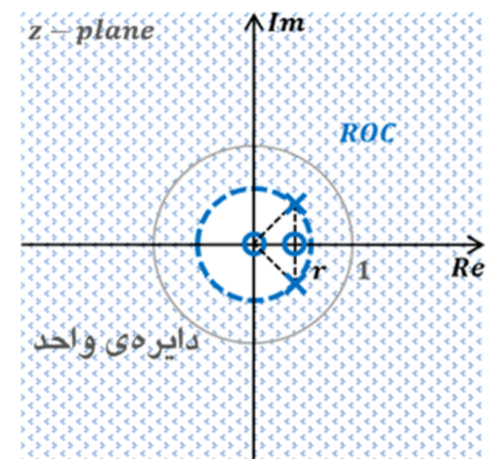
$p_1 = re^{j\Omega_0} \qquad p_2 = re^{-j\Omega_0}$

$$\Longrightarrow r^n\cos(\Omega_0 n)\,u[n] \overset{z}{\longleftrightarrow} \frac{1-r\cos(\Omega_0)\,z^{-1}}{1-2r\cos(\Omega_0)\,z^{-1}+r^2z^{-2}} \qquad ROC: |z| > |r|$$

$|r| > 1$



$|r| < 1$



حل و:

$$\mathcal{Z}\{r^n \sin(\Omega_0 n)\, u[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} r^n \sin(\Omega_0 n)\, u[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} r^n \cdot \frac{1}{2j}\left(e^{j\Omega_0 n} - e^{-j\Omega_0 n}\right) z^{-n}$$

$$= \frac{1}{2j}\sum_{n=0}^{\infty}\left(re^{j\Omega_0}z^{-1}\right)^n - \frac{1}{2j}\sum_{n=0}^{\infty}\left(re^{-j\Omega_0}z^{-1}\right)^n$$

$$= \frac{1}{2j}\cdot\frac{1}{1-re^{j\Omega_0}z^{-1}} - \frac{1}{2j}\cdot\frac{1}{1-re^{-j\Omega_0}z^{-1}} \qquad ROC: |z| > |r|$$

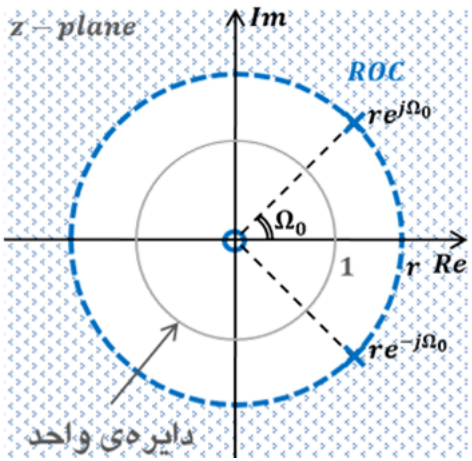
$$= \frac{1}{2j}\cdot\frac{1-re^{-j\Omega_0}z^{-1} - 1 + re^{j\Omega_0}z^{-1}}{(1-re^{j\Omega_0}z^{-1})(1-re^{-j\Omega_0}z^{-1})}$$

$$= \frac{r\sin(\Omega_0)\, z^{-1}}{(1-re^{j\Omega_0}z^{-1})(1-re^{-j\Omega_0}z^{-1})}$$

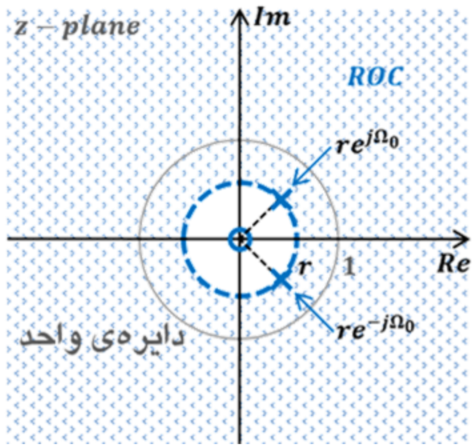
$$= \frac{r\sin(\Omega_0)\, z^{-1}}{1-2r\cos(\Omega_0)\, z^{-1} + r^2 z^{-2}}$$

$$= \frac{r\sin(\Omega_0)\, z}{(z-re^{j\Omega_0})(z-re^{-j\Omega_0})} \qquad z_1 = 0 \qquad p_1 = re^{j\Omega_0} \quad p_2 = re^{-j\Omega_0}$$

$|r| > 1$



$|r| < 1$



$$\Longrightarrow r^n \sin(\Omega_0 n)\, u[n] \overset{z}{\longleftrightarrow} \frac{r\sin(\Omega_0)\, z^{-1}}{1-2r\cos(\Omega_0)\, z^{-1} + r^2 z^{-2}} \qquad ROC: |z| > |r|$$

با وارسی تبدیل z سیگنال‌های پرکاربرد مثال ۱،

- ❖ آیا ارتباطی بین محل قطب‌ها و صفرها و مرز ناحیه‌ی همگرایی دیده می‌شود؟
- ❖ آیا ارتباطی بین دست‌چپی/ دست‌راستی بودن سیگنال‌های یک‌سویه و دست‌چپی/ دست‌راستی بودن ناحیه‌ی همگرایی دیده می‌شود؟
- ❖ آیا ارتباطی بین دوره‌ی زمانی سیگنال و گستره‌ی ناحیه‌ی همگرایی تبدیل z آن دیده می‌شود؟
- ❖ آیا مرز ناحیه‌ی همگرایی الگوی مشخصی دارد؟ این الگو از کجا نشات می‌گیرد؟

مثال ۲: ارزیابی وجود تبدیل فوریه

برای کدام یک از سیگنال‌های مثال ۱ می‌توان تبدیل فوریه نوشت؟

$$X(e^{j\omega}) = X(z)\Big|_{z=e^{j\omega}}$$

الف : $\delta[n] \overset{z}{\longleftrightarrow} 1 \quad ROC: entire\ \ z-plane$

تبدیل فوریه دارد.

ب : $u[n] \overset{z}{\longleftrightarrow} \dfrac{1}{1-z^{-1}} \quad ROC: |z|>1$

تبدیل فوریه ندارد.

ج : $\alpha^n u[n] \overset{z}{\longleftrightarrow} \dfrac{1}{1-\alpha z^{-1}} \quad ROC: |z|>|\alpha|$

برای $|\alpha|<1$ تبدیل فوریه دارد.

د : $-\alpha^n u[-n-1] \overset{z}{\longleftrightarrow} \dfrac{1}{1-\alpha z^{-1}} \quad ROC: |z|<|\alpha|$

برای $|\alpha|>1$ تبدیل فوریه دارد.

ه : $r^n\cos(\Omega_0 n)\,u[n] \overset{z}{\longleftrightarrow} \dfrac{1-r\cos(\Omega_0)\,z^{-1}}{1-2r\cos(\Omega_0)\,z^{-1}+r^2z^{-2}} \quad ROC: |z|>|r|$

برای $|r|<1$ تبدیل فوریه دارد.

و : $r^n\sin(\Omega_0 n)\,u[n] \overset{z}{\longleftrightarrow} \dfrac{r\sin(\Omega_0)\,z^{-1}}{1-2r\cos(\Omega_0)\,z^{-1}+r^2z^{-2}} \quad ROC: |z|>|r|$

برای $|r|<1$ تبدیل فوریه دارد.

فهرست مطالب

«ویژگی‌های ناحیه‌ی همگرایی»:

۱- ناحیه همگرایی حلقه‌ای به مرکز مبدا صفحه‌ی z می‌باشد.

۲- ناحیه‌ی همگرایی شامل قطب‌های عبارت تبدیل $\mathcal{Z}$ نیست.

۳- اگر سیگنال در دوره‌ی زمانی محدودی مقدار غیرصفر داشته باشد ناحیه‌ی همگرایی آن کل صفحه‌ی z خواهد بود ولی ممکن است شامل $z = 0$ یا $z = \infty$ نباشد.

۴- اگر سیگنال دست‌راستی باشد ناحیه‌ی همگرایی تبدیل $\mathcal{Z}$ آن نیز دست‌راستی خواهد بود.

۵- اگر سیگنال دست‌چپی باشد ناحیه‌ی همگرایی تبدیل $\mathcal{Z}$ آن نیز دست‌چپی خواهد بود.

مثال ۳: ویژگی‌های ناحیه‌ی همگرایی

با محاسبه‌ی تبدیل $\mathcal{Z}$ سیگنال‌های زیر، ویژگی ۳ از ویژگی‌های ناحیه‌ی همگرایی را وارسی کنید.

الف: $\delta[n]$ ب: $\delta[n-1]$ ج: $\delta[n+1]$

حل:

$$\mathcal{Z}\{\delta[n]\} = 1 \quad ROC: entire\ z - plane$$

$$\mathcal{Z}\{\delta[n-1]\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta[n-1] z^{-n} = z^{-1} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta[n]$$

$$= z^{-1} \quad ROC: entire\ z - plane\ except\ z = 0$$

$$\mathcal{Z}\{\delta[n+1]\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta[n+1] z^{-n} = z \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta[n+1]$$

$$= z \quad ROC: entire\ z - plane\ except\ z = \infty$$

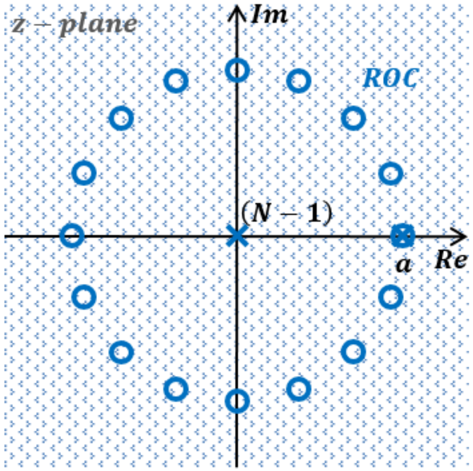
مثال ۴: ویژگی‌های ناحیه‌ی همگرایی

تبدیل z سیگنال زیر را به دست آورید. محل قطب‌ها و صفرهای عبارت تبدیل z را به همراه ناحیه‌ی همگرایی در صفحه‌ی z نمایش دهید.

$$x[n] = \begin{cases} a^n & 0 \le n \le N-1 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

حل:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} \left(az^{-1}\right)^n = \frac{1-\left(az^{-1}\right)^N}{1-az^{-1}} = \frac{z^N - a^N}{z^{N-1}(z-a)}$$



$$X(z) = \frac{1-\left(az^{-1}\right)^N}{1-az^{-1}} \quad ROC: entire\ z-plane\ except\ z=0$$

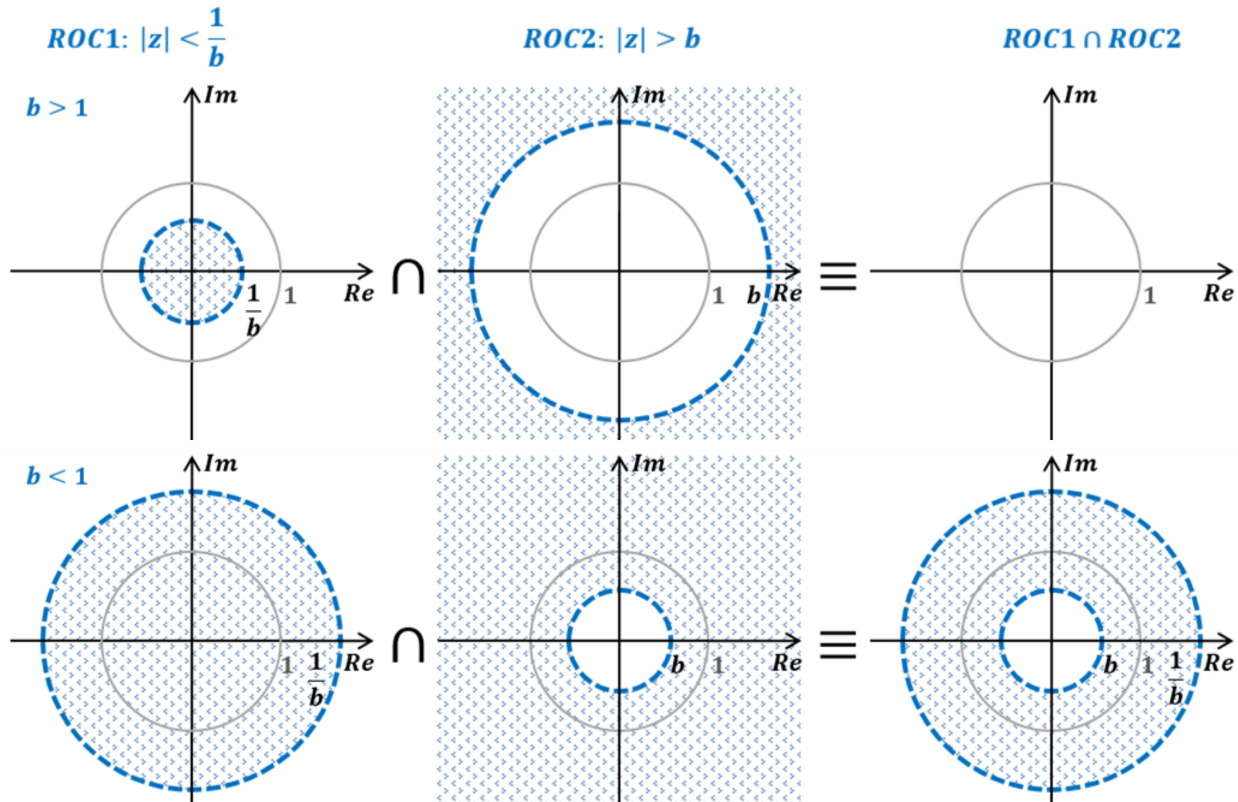
مثال ۵:

تبدیل z سیگنال $b>0$ $\quad x[n]=b^{|n|}$ را به دست آورید. محل قطب‌ها و صفرهای عبارت تبدیل z را به همراه ناحیه‌ی همگرایی در صفحه‌ی z نمایش دهید.

حل:

$$\mathcal{Z}\{b^{|n|}\}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} b^{|n|}z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{-1} b^{-n}z^{-n}+\sum_{n=0}^{\infty} b^{n}z^{-n}=\sum_{n=1}^{\infty}(bz)^n+\sum_{n=0}^{\infty}\left(bz^{-1}\right)^n$$

$$=\frac{bz}{1-bz}+\frac{1}{1-bz^{-1}}$$ با شرط‌های همگرایی $|bz|<1$ و $\left|bz^{-1}\right|<1$:



مثال ۵:

تبدیل $\mathcal{Z}$ سیگنال $b>0 \quad x[n]=b^{|n|}$ را به دست آورید. محل قطب‌ها و صفرهای عبارت تبدیل $\mathcal{Z}$ را به همراه ناحیه‌ی همگرایی در صفحه‌ی z نمایش دهید.

حل:

$$\mathcal{Z}\{b^{|n|}\}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} b^{|n|}z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{-1} b^{-n}z^{-n}+\sum_{n=0}^{\infty} b^{n}z^{-n}=\sum_{n=1}^{\infty}(bz)^n+\sum_{n=0}^{\infty}(bz^{-1})^n$$

$$=\frac{bz}{1-bz}+\frac{1}{1-bz^{-1}}$$

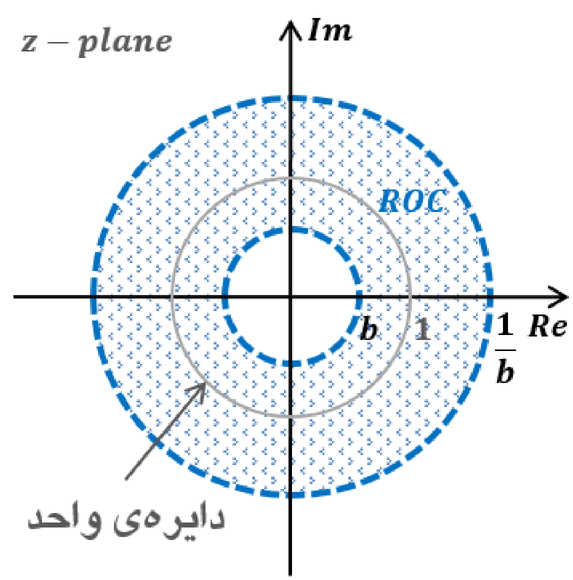
با شرط‌های همگرایی $|bz|<1$ و $|bz^{-1}|<1$:

اگر $0<b<1$ باشد با ناحیه‌ی همگرایی $b<|z|<\frac{1}{b}$:

$$\Rightarrow \mathcal{Z}\{b^{|n|}\}=\frac{-z}{z-\frac{1}{b}}+\frac{z}{z-b}$$

$$=\frac{-z^2+bz+z^2-\frac{1}{b}z}{\left(z-\frac{1}{b}\right)(z-b)}$$

$$=\frac{\left(b-\frac{1}{b}\right)z}{\left(z-\frac{1}{b}\right)(z-b)}$$



فهرست مطالب

وارون تبدیل $\mathcal{Z}$:

$$x[n]=\frac{1}{2\pi j}\oint X(z)z^{n-1}dz$$

به واسطه‌ی پیچیدگی‌های محاسباتی این انتگرال کانتور، اغلب ترجیح می‌دهیم از روشی دیگر برای تعیین وارون تبدیل $\mathcal{Z}$ بهره گیریم.

«دیگر روش‌های تعیین وارون تبدیل $\mathcal{Z}$»:

❖ بسط کسرهای جزئی

❖ بسط سری توانی (روش تقسیم‌های متوالی یا استفاده از بسط‌های متعارف)

❖ استفاده از ویژگی‌های تبدیل $\mathcal{Z}$

مثال ۶: به دست آوردن رابطه‌ی وارون تبدیل $\mathcal{Z}$

با استفاده از رابطه‌ی تبدیل $\mathcal{Z}$ و زوج تبدیل فوریه‌ی زمان- گسسته، رابطه‌ی وارون تبدیل $\mathcal{Z}$ را به دست آورید.

حل:

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[n]z^{-n}$$

$$\Longrightarrow X(re^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[n](re^{j\omega})^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(x[n]r^{-n})e^{-j\omega n}\quad\Longrightarrow x[n]r^{-n}\overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow}X(re^{j\omega})$$

$$\Longrightarrow x[n]r^{-n}=\frac{1}{2\pi}\int_{<2\pi>}X(re^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega\quad\Longrightarrow x[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{<2\pi>}X(re^{j\omega})\,(re^{j\omega})^{n}d\omega$$

تغییر متغیر $re^{j\omega}=z$:

$$\frac{dz}{d\omega}=jre^{j\omega}=jz$$

$$d\omega=\frac{1}{j}z^{-1}dz$$

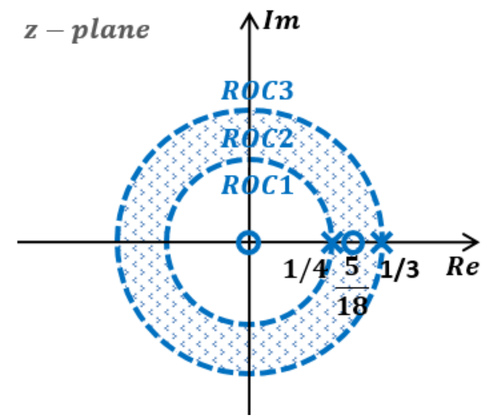
$$\Longrightarrow x[n]=\frac{1}{2\pi j}\oint X(z)z^{n-1}dz$$

مثال ۷: وارون تبدیل Z به روش بسط کسرهای جزئی

برای $X(z)$ داده شده، وارون تبدیل Z را به ازای هر یک از ROCهای ممکن به روش بسط کسرهای جزئی بیابید.

$$X(z)=\frac{3-\frac{5}{6}z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)}$$

حل:



$$X(z)=\frac{3z\left(z-\frac{5}{18}\right)}{\left(z-\frac{1}{4}\right)\left(z-\frac{1}{3}\right)}\Longrightarrow X(z)=\frac{A}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}+\frac{B}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}$$

$$A=\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)X(z)\Big|_{z^{-1}=4}=\frac{3-\frac{5}{6}z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)}\Bigg|_{z^{-1}=4}=1$$

$$B=\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)X(z)\Big|_{z^{-1}=3}=\frac{3-\frac{5}{6}z^{-1}}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}\Bigg|_{z^{-1}=3}=2\Longrightarrow X(z)=\frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}+\frac{2}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}$$

برای ناحیه‌ی همگرایی $|z|<\frac{1}{4}$:

$$x[n]=-\left(\frac{1}{4}\right)^n u[-n-1]-2\left(\frac{1}{3}\right)^n u[-n-1]$$

برای ناحیه‌ی همگرایی $\frac{1}{4}<|z|<\frac{1}{3}$:

$$x[n]=\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]-2\left(\frac{1}{3}\right)^n u[-n-1]$$

برای ناحیه‌ی همگرایی $|z|>\frac{1}{3}$:

$$x[n]=\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]+2\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$$

مثال ۸: وارون تبدیل $\mathcal{Z}$به روش بسط سری توانی

وارون تبدیل $\mathcal{Z}$ را برای $0 < |z| < \infty \quad X(z) = 4z^2 + 2 + 3z^{-1}$ ، به روش بسط سری توانی به دست آورید.

حل:

$$X(z) = 4\, z^2 + 2 + 3\, z^{-1}$$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] z^{-n} = \cdots + x[-2]\, z^2 + x[-1]\, z + x[0] + x[1]\, z^{-1} + x[2]\, z^{-2} + \cdots$$

$$x[n] = \begin{cases} 4 & n = -2 \\ 2 & n = 0 \\ 3 & n = 1 \\ 0 & others \end{cases} \qquad \Longrightarrow x[n] = 4\delta[n+2] + 2\delta[n] + 3\delta[n-1]$$

نکته:

در محاسبه‌ی وارون تبدیل Z ، برای دستیابی به بسط سری توانی به روش تقسیم متوالی، لازم است پیش از شروع روند تقسیم، عبارت‌های صورت و مخرج را به نحو مناسب مرتب کنیم. اگر ناحیه‌ی همگرایی سیگنال دست‌راستی است لازم است صورت و مخرج $X(z)$ را برحسب توانهای صعودی z^{-1} مرتب کنیم ولی چنانچه ناحیه‌ی همگرایی سیگنال دست‌چپی است لازم است صورت و مخرج $X(z)$ را برحسب توانهای نزولی z^{-1} مرتب نماییم. پس از مطالعه‌ی مثال ۹ باید بتوانید در مورد علت این قاعده توضیح دهید!

مثال ۹: وارون تبدیل Z به روش بسط سری توانی– روش تقسیم متوالی

وارون تبدیل Z هر یک از $X(z)$های داده شده را به روش بسط سری توانی- روش تقسیم متوالی به دست آورید.

$$\text{الف)}\ X(z) = \frac{1}{1-\alpha z^{-1}} \qquad |z| > |\alpha|$$

$$\text{ب)}\ X(z) = \frac{1}{1-\alpha z^{-1}} \qquad |z| < |\alpha|$$

حل الف:

$$\begin{array}{l|l} 1 & 1-az^{-1} \\ \cline{2-2} \underline{-(1-az^{-1})} & 1 + az^{-1} + a^2z^{-2} + a^3z^{-3} + \cdots \\ \quad az^{-1} & \\ \quad \underline{-(az^{-1}-a^2z^{-2})} & \\ \qquad a^2z^{-2} & \\ \qquad \underline{-(a^2\,z^{-2}-a^3z^{-3})} & \\ \qquad\qquad a^3z^{-3} & \end{array}$$

توجه:

برای سیگنال دست راستی، عبارت‌های صورت و مخرج به صورت توان‌های نزولی z (یا توان‌های صعودی z^{-1}) مرتب می‌شوند.

$$\Rightarrow X(z) = \frac{1}{1+\alpha z^{-1}} = 1 + \alpha z^{-1} + \alpha^2 z^{-2} + \alpha^3 z^{-3} + \cdots$$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]z^{-n} = \cdots + x[-2]z^2 + x[-1]z + x[0] + x[1]z^{-1} + x[2]z^{-2} + x[3]z^{-3} + \cdots$$

$$\Rightarrow x[n] = \begin{cases} \alpha^n & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow x[n] = \alpha^n u[n]$$

حل ب:

$$
\begin{array}{l|l}
1 & -az^{-1}+1 \\
\underline{-\left(1-a^{-1}z\right)} & \overline{-a^{-1}z \;-a^{-2}z^{2} \;-a^{-3}z^{3} \;+\cdots} \\
\quad a^{-1}z & \\
\quad \underline{-\left(a^{-1}z-a^{-2}z^{2}\right)} & \\
\qquad a^{-2}z^{2} & \\
\qquad \underline{-\left(a^{-2}z^{2}-a^{-3}z^{3}\right)} & \\
\qquad\quad a^{-3}z^{3} &
\end{array}
$$

توجه:

برای سیگنال دست چپی، عبارت‌های صورت و مخرج به صورت توان‌های صعودی z (یا توان‌های نزولی z^{-1}) مرتب می‌شوند.

$$\Longrightarrow X(z)=\frac{1}{1-az^{-1}}=-a^{-1}z-a^{-2}z^{2}-a^{-2}z^{2}-a^{-2}z^{2}-\cdots$$

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[n]z^{-n}=\cdots+x[-2]z^{2}+x[-1]z+x[0]+x[1]z^{-1}+x[2]z^{-2}+x[3]z^{-3}+\cdots$$

$$\Longrightarrow x[n]=\begin{cases}-a^{n} & n\le -1\\ 0 & n\ge 0\end{cases}\qquad \Longrightarrow x[n]=-a^{n}u[-n-1]$$

مثال ۱۰: وارون تبدیل $\mathcal{Z}$ به روش بسط سری توانی– بسط‌های متعارف

وارون تبدیل $\mathcal{Z}$ عبارت $|z| > |a|$,$X(z) = \log\left(1 + az^{-1}\right)$ را به روش بسط سری توانی به دست آورید. راهنمایی: از بسط سری توانی متعارف زیر بهره گیرید.

$$\log(1+v) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-(-v)^n}{n}$$

حل:

$$\log\left(1 + az^{-1}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-\left(-az^{-1}\right)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-(-a)^n}{n} z^{-n}$$

$$\Rightarrow \quad x[n] = -\frac{1}{n}(-a)^n u[n-1]$$

فهرست مطالب

- معرفی تبدیل z
- ویژگی‌های ناحیه‌ی همگرایی
- وارون تبدیل z
- ارزیابی هندسی تبدیل فوریه به کمک نمودار قطب- صفر
- ویژگی‌های تبدیل z
- تجزیه و تحلیل سیستم‌های LTI در حوزه‌ی z
- نمایش نمودار بلوکی
- تبدیل z یک‌طرفه
- مثال‌های مروری
- مثال‌های نرم‌افزاری
- تمرین‌های تئوری
- تمرین‌های نرم‌افزاری

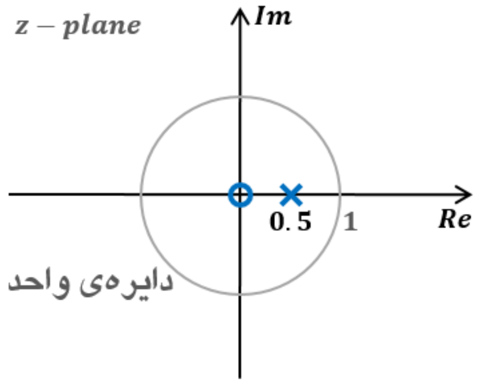
$$\left|X\left(e^{j\omega}\right)\right| = \frac{\text{حاصلضرب طول بردارهای صفر}}{\text{حاصلضرب طول بردارهای قطب}}$$

$$\measuredangle X\left(e^{j\omega}\right) = \left(\text{مجموع زاویه‌ی بردارهای صفر}\right) - \left(\text{مجموع زاویه‌ی بردارهای قطب}\right)$$

مثال ۱۱: ارزیابی هندسی تبدیل فوریه

نمودار قطب–صفر تابع سیستم داده شده است.

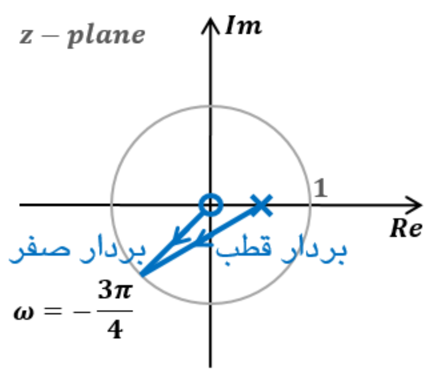
اندازه و فاز پاسخ فرکانسی آن را تعیین نمایید.

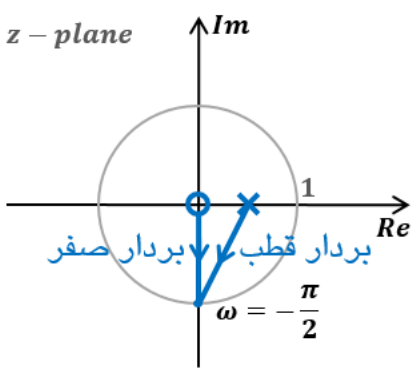


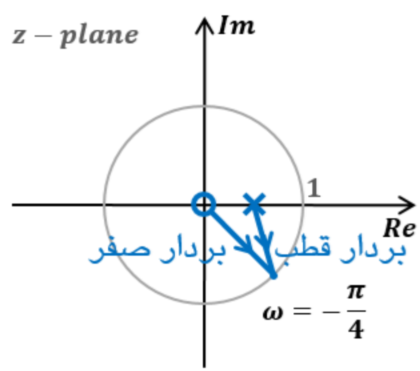
حل:

$$\left|X\left(e^{j\omega}\right)\right| = \frac{\text{طول بردار صفر}}{\text{طول بردار قطب}}$$

$$\measuredangle X\left(e^{j\omega}\right) = \left(\text{زاویه‌ی بردار صفر}\right) - \left(\text{زاویه‌ی بردار قطب}\right)$$

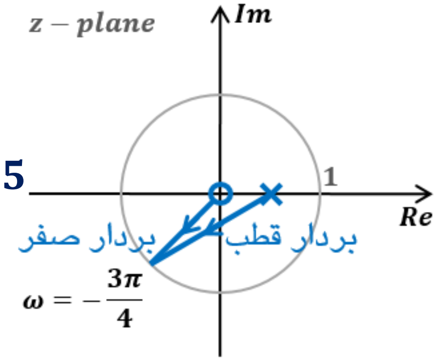


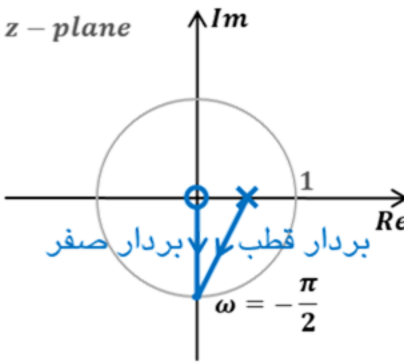




$$\omega = -\pi \qquad H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1.5} = 0.667$$

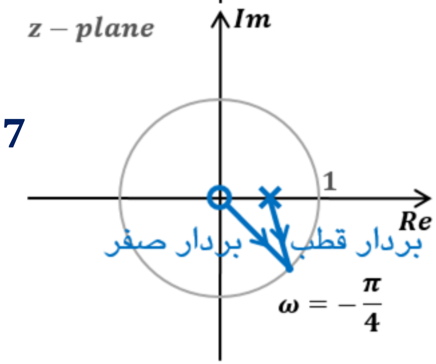
$$\omega = -\frac{3\pi}{4} \qquad H(e^{j\omega}) = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}} = 0.715$$





$$\omega = -\frac{\pi}{2} \qquad H(e^{j\omega}) = \frac{1}{\sqrt{(0.5)^2 + 1}} = 0.894$$

$$\omega = -\frac{\pi}{4} \qquad H(e^{j\omega}) = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}} = 1.357$$

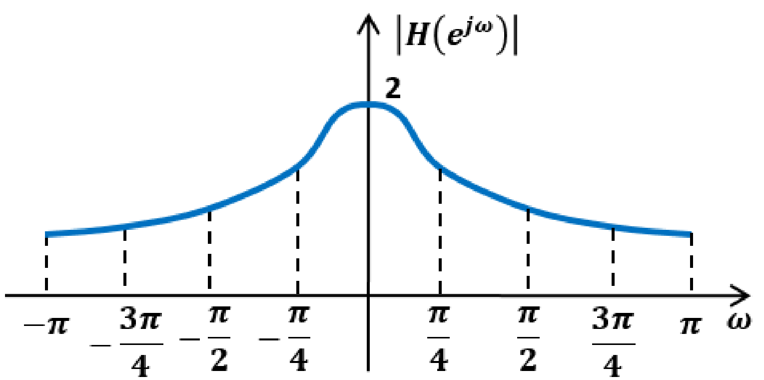


$$\omega = 0 \qquad H(e^{j\omega}) = \frac{1}{0.5} = 2$$

$$\omega = \frac{\pi}{4} \qquad H(e^{j\omega}) = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}} = 1.357$$

$$\omega = \frac{\pi}{2} \qquad H(e^{j\omega}) = \frac{1}{\sqrt{(0.5)^2 + 1}} = 0.894$$

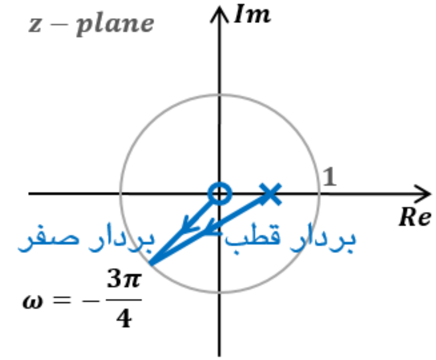
$$\omega = \frac{3\pi}{4} \qquad H(e^{j\omega}) = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}} = 0.715$$



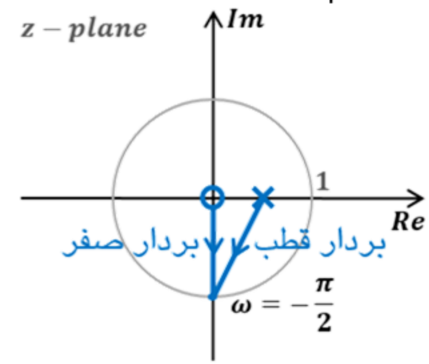
$$\omega = -\pi \qquad H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1.5} = 0.667$$

$$\omega = -\pi \qquad \measuredangle H(e^{j\omega}) = (-\pi) - (-\pi) = 0$$

$$\omega = -\frac{3\pi}{4} \qquad \measuredangle H(e^{j\omega}) = \left(-\frac{3\pi}{4}\right) - \left(-\pi + \tan^{-1}\left(\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}}\right)\right) = 0.081\pi$$



$$\omega = -\frac{\pi}{2} \qquad \measuredangle H(e^{j\omega}) = -\frac{\pi}{2} - \left(-\pi + \tan^{-1}\left(\frac{1}{\frac{1}{2}}\right)\right) = 0.148\pi$$

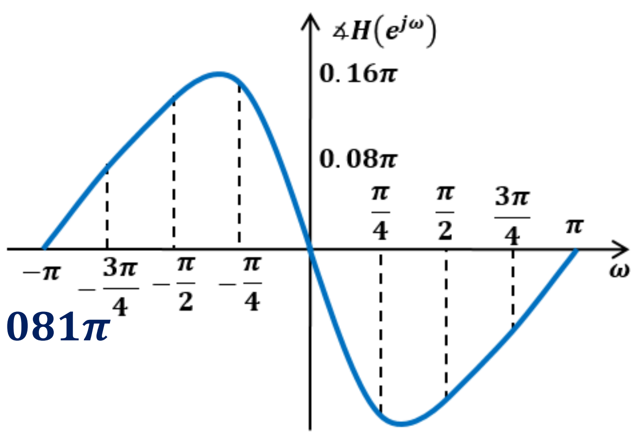


$$\omega = -\frac{\pi}{4} \qquad \measuredangle H(e^{j\omega}) = -\frac{\pi}{4} - \left(-\tan^{-1}\left(\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}}\right)\right) = 0.159\pi$$

$$\omega = 0 \qquad \measuredangle H(e^{j\omega}) = 0 - 0 = 0$$

$$\omega = \frac{\pi}{4} \qquad \measuredangle H(e^{j\omega}) = \frac{\pi}{4} - \tan^{-1}\left(\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}}\right) = -0.159\pi$$

$$\omega = \frac{\pi}{2} \qquad \measuredangle H(e^{j\omega}) = \frac{\pi}{2} - \left(-\pi - \tan^{-1}\left(\frac{1}{\frac{1}{2}}\right)\right) = -0.148\pi$$



$$\omega = \frac{3\pi}{4} \qquad \measuredangle H(e^{j\omega}) = \frac{3\pi}{4} - \left(\pi + \tan^{-1}\left(\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}}\right)\right) = -0.081\pi$$

$$\omega = \pi \qquad \measuredangle H(e^{j\omega}) = \pi - \pi = 0$$

نکته: اثر تقارن آرایش قطب‌ها و صفرها بر اندازه و فاز تبدیل فوریه

دقت کنید که اندازه و فاز تبدیل فوریه‌ی مثال ۱۱ به ترتیب دارای تقارن زوج و فرد می‌باشند. اگر از ابتدا از این تقارن‌ها اطلاع داشتیم نیمی از محاسبات (مثلا برای $\omega = -\pi$ تا صفر) کفایت می‌کرد و با استفاده از تقارن‌ها، نیمه‌ی دیگر را تکمیل می‌کردیم. به نظر شما آیا می‌توان این تقارن‌ها را به ویژگی‌ای در ترسیمه‌ی قطب- صفر نسبت داد؟

راهنمایی می‌کنم! آیا می‌توان این تقارن‌ها را به تقارن آرایش قطب‌ها و صفرها نسبت به محور حقیقی صفحه‌ی z نسبت داد؟ به نوبه‌ی خود، آیا می‌توان تقارن آرایش قطب‌ها و صفرها نسبت به محور حقیقی صفحه‌ی z را به ویژگی‌ای از سیگنال در حوزه‌ی زمان نسبت داد؟ برای راهنمایی، ویژگی مزدوج و تقارن‌های آن را در بخش بعدی ببینید.

نکته: اثر وجود قطب یا صفری در نزدیکی دایره‌ی واحد

- اگر نمودار قطب- صفر دارای صفری روی دایره‌ی واحد باشد در ωی متناظر با آن صفر، بردار صفری با طول صفر خواهیم داشت. در نتیجه، اندازه‌ی تبدیل فوریه در ωی متناظر با صفر روی دایره‌ی واحد، صفر می‌شود.
- اگر نمودار قطب- صفر دارای قطبی روی دایره‌ی واحد باشد در ωی متناظر با آن قطب، بردار قطبی با طول صفر خواهیم داشت. در نتیجه، اندازه‌ی تبدیل فوریه در ωی متناظر با قطب روی دایره‌ی واحد، بی‌نهایت می‌شود.
- اگر نمودار قطب- صفر دارای صفری در نزدیکی دایره‌ی واحد باشد در ωی متناظر با آن صفر، بردار صفری با طول بسیار کوچک خواهیم داشت. در نتیجه، اندازه‌ی تبدیل فوریه در ωی متناظر با صفر نزدیک دایره‌ی واحد، کمینه‌ی محلی خواهد داشت.
- اگر نمودار قطب- صفر دارای قطبی در نزدیکی دایره‌ی واحد باشد در ωی متناظر با آن قطب، بردار قطبی با طول بسیار کوچک خواهیم داشت. در نتیجه، اندازه‌ی تبدیل فوریه در ωی متناظر با قطب نزدیک دایره‌ی واحد، بیشینه‌ی محلی خواهد داشت.

بر این اساس، آیا بیشینه‌ی اندازه‌ی تبدیل فوریه در مثال ۱۱ در $\omega = 0$ را می‌توان تفسیر کرد؟

فهرست مطالب

ویژگی‌های تبدیل z

- ویژگی خطی بودن
- ویژگی جابجایی زمانی
- ویژگی مقیاس در حوزه‌ی z
- ویژگی معکوس زمانی
- ویژگی گسترش زمانی
- ویژگی مزدوج و تقارن‌های آن
- ویژگی کانولوشن
- ویژگی مشتق‌گیری در حوزه‌ی z
- و قضیه‌ی مقدار اولیه

ویژگی خطی بودن

$$x_1[n] \overset{z}{\longleftrightarrow} X_1(z) \quad ROC: R_1$$

$$x_2[n] \overset{z}{\longleftrightarrow} X_2(z) \quad ROC: R_2$$

$$\Longrightarrow \alpha x_1[n] + \beta x_2[n] \overset{z}{\longleftrightarrow} \alpha X_1(z) + \beta X_2(z) \quad ROC: containing\ R_1 \cap R_2$$

مثال ۱۲: ویژگی خطی بودن

$X_1(z)$ و $X_2(z)$ که به ترتیب نشانگر تبدیل $\mathcal{Z}$ سیگنال‌های $x_1[n]$ و $x_2[n]$ می‌باشند داده شده است. با استفاده از ویژگی خطی بودن، تبدیل $\mathcal{Z}$ سیگنال $x_1[n] - x_2[n]$ را به دست آورده و ناحیه‌ی همگرایی آن را وارسی کنید.

$$X_1(z) = \frac{1}{1-\alpha z^{-1}} \quad ROC: |z| > |\alpha|$$

$$X_2(z) = \frac{\alpha z^{-1}}{1-\alpha z^{-1}} \quad ROC: |z| > |\alpha|$$

حل:

$$\mathcal{Z}\{x_1[n] - x_2[n]\} = X_1(z) - X_2(z) = \frac{1}{1-\alpha z^{-1}} - \frac{\alpha z^{-1}}{1-\alpha z^{-1}} = \frac{1-\alpha z^{-1}}{1-\alpha z^{-1}} = 1$$

ویژگی جابجایی زمانی

$$x[n] \xleftrightarrow{z} X(z) \quad ROC:\ R \qquad \Longrightarrow x[n-n_0] \xleftrightarrow{z} z^{-n_0}X(z) \quad ROC: R$$

مثال ۱۳: ویژگی جابجایی زمانی

سیگنال $x[n]=\delta[n-1]$ را در نظر بگیرید. تبدیل Z سیگنال‌های $x[n]$ و $x[n+2]$ را به دست آورید. جابجایی زمانی چه تاثیری روی ناحیه‌ی همگرایی سیگنال $x[n]$ داشته است؟

حل:

$$\delta[n] \xleftrightarrow{z} 1 \quad ROC: entire\ z-plane$$

$$x[n]=\delta[n-1] \xleftrightarrow{z} z^{-1} \quad ROC: entire\ z-plane\ except\ z=0$$

$$x[n+2]=\delta[n+1] \xleftrightarrow{z} z \quad ROC: entire\ z-plane\ except\ z=\infty$$

ویژگی مقیاس در حوزه‌ی Z

$$x[n] \xleftrightarrow{z} X(z) \quad ROC: R \quad \Longrightarrow \quad (z_0)^n\, x[n] \xleftrightarrow{z} X\left(\frac{z}{z_0}\right) \quad ROC: |z_0|R$$

$$e^{j\omega_0 n}\, x[n] \xleftrightarrow{z} X\left(e^{-j\omega_0} z\right) \quad ROC: R$$

ویژگی وارون زمانی

$$x[n] \xleftrightarrow{z} X(z) \quad ROC:\ R \qquad \Rightarrow \quad x[-n] \xleftrightarrow{z} X\left(\frac{1}{z}\right) \quad ROC: \frac{1}{R}$$

ویژگی گسترش زمانی

$$x_k[n] = \begin{cases} x[n/k] & \text{اگر } n \text{ ضریبی از } k \text{ باشد} \\ 0 & \text{اگر } n \text{ ضریبی از } k \text{ نباشد} \end{cases}$$

$$x[n] \xleftrightarrow{z} X(z) \quad ROC: R \quad \Longrightarrow \quad x_k[n] \xleftrightarrow{z} X(z^k) \quad ROC: R^{\frac{1}{k}}$$

ویژگی مزدوج و تقارن‌های آن

$$x[n] \overset{z}{\longleftrightarrow} X(z) \quad ROC: R \qquad \Longrightarrow \quad x^*[n] \overset{z}{\longleftrightarrow} X^*(z^*) \quad ROC: R$$

«تقارن‌های مزدوج»:

$$If \;\; x[n]: real \quad \Longrightarrow \quad x[n] = x^*[n] \quad \Longrightarrow \quad X(z) = X^*(z^*) \quad \Longrightarrow \quad X^*(z) = X(z^*)$$

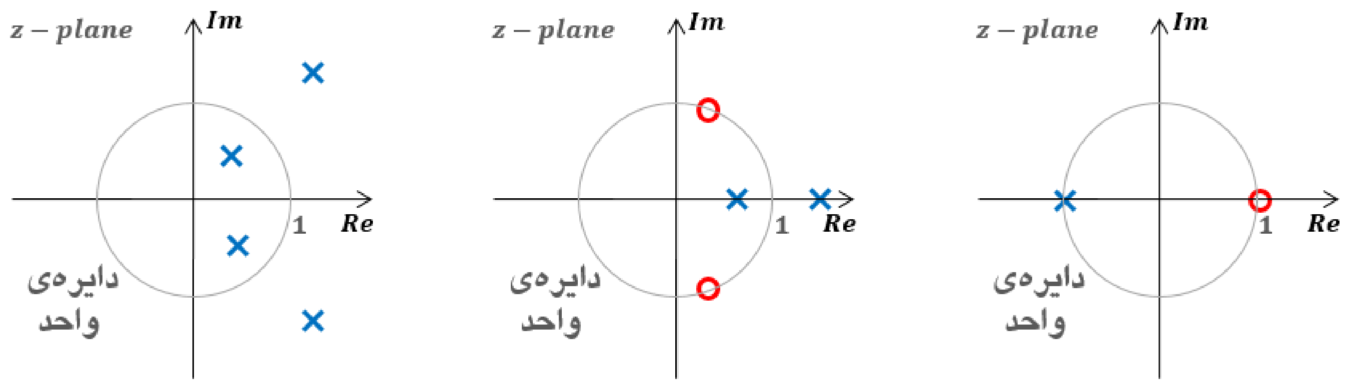
$$If \;\; x[n]: even \quad \Longrightarrow \quad x[n] = x[-n] \quad \Longrightarrow \quad X(z) = X\left(\frac{1}{z}\right)$$

$$If \;\; x[n]: odd \quad \Longrightarrow \quad x[n] = -x[-n] \quad \Longrightarrow \quad X(z) = -X\left(\frac{1}{z}\right)$$

نکته: تقارن‌های نمودار قطب- صفر

اگر سیگنال حقیقی باشد نمودار قطب- صفر تبدیل Z آن نسبت به محور حقیقی در صفحه‌ی z تقارن خواهد داشت. به بیان دیگر، قطب‌ها و صفرها یا حقیقی هستند یا جفت‌های مزدوج مختلط.

اگر سیگنال «حقیقی و زوج» یا «حقیقی و فرد» باشد نمودار قطب- صفر تبدیل Z آن نسبت به محور حقیقی و دایره‌ی واحد تقارن خواهد داشت. به عبارت دیگر، قطب‌ها و صفرهای $X(z)$، چهارگانه‌های متقارن نسبت به دایره‌ی واحد و محور حقیقی صفحه‌ی z هستند، دوگانه‌های (جفت‌های) حقیقی متقارن نسبت به دایره‌ی واحد هستند، دوگانه‌های (جفت‌های) مزدوج مختلط روی دایره‌ی واحد هستند یا یگانه‌هایی در $z = 1$ یا $z = -1$ می‌باشند.



ویژگی کانولوشن

$$x_1[n] \xleftrightarrow{z} X_1(z) \quad ROC: R_1$$

$$x_2[n] \xleftrightarrow{z} X_2(z) \quad ROC: R_2$$

$$\Rightarrow \; x_1[n] * x_2[n] \xleftrightarrow{z} X_1(z) \cdot X_2(z) \quad ROC: containing\ R_1 \cap R_2$$

دکتر علی مالکی

ویژگی مشتق‌گیری در حوزه‌ی $\mathcal{Z}$

$$x[n] \xleftrightarrow{z} X(z) \quad ROC: R \qquad \Rightarrow \quad n\,x[n] \xleftrightarrow{z} -z\,\frac{d}{dz}X(z) \quad ROC: R$$

مثال ۱۴: ویژگی مشتق‌گیری در حوزه‌ی z

با استفاده از ویژگی مشتق‌گیری در حوزه‌ی z ، سیگنالی را بیابید که تبدیل z آن برابر با عبارت $X(z)$ $= \log\left(1+az^{-1}\right) \quad |z|>|a|$ است.

حل:

$$x[n] \xleftrightarrow{z} \log\left(1+az^{-1}\right) \qquad ROC\colon\ |z|>|a|$$

$$n\,x[n] \xleftrightarrow{z} -z\frac{d}{dz}\left\{\log\left(1+az^{-1}\right)\right\} = -z\cdot\frac{-az^{-2}}{1+az^{-1}} = \frac{az^{-1}}{1+az^{-1}} \qquad ROC\colon |z|>|a|$$

$$(-a)^n\,u[n] \xleftrightarrow{z} \frac{1}{1-(-a)z^{-1}} \qquad ROC\colon\ |z|>|a|$$

$$(-a)^{n-1}\,u[n-1] \xleftrightarrow{z} \frac{z^{-1}}{1+az^{-1}} \qquad ROC\colon |z|>|a|$$

$$-(-a)^n u[n-1] \xleftrightarrow{z} \frac{az^{-1}}{1+az^{-1}} \qquad ROC\colon |z|>|a|$$

$$\Longrightarrow\ n\,x[n] = -(-a)^n\,u[n-1]$$

$$\Longrightarrow\ x[n] = -\frac{1}{n}(-a)^n\,u[n-1]$$

مثال ۱۵: ویژگی مشتق‌گیری در حوزه‌ی $\mathcal{Z}$

وارون تبدیل $\mathcal{Z}$ سیگنال زیر را به دست آورید.

$$X(z)=\frac{\alpha z^{-1}}{(1-\alpha z^{-1})^2}\qquad ROC:|z|>|\alpha|$$

حل:

$$\alpha^n u[n]\overset{z}{\longleftrightarrow}\frac{1}{1-\alpha z^{-1}}\qquad ROC:\ |z|>|\alpha|$$

$$n\,\alpha^n\,u[n]\overset{z}{\longleftrightarrow}-z\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{1-\alpha z^{-1}}\right)=-z\frac{-\alpha z^{-2}}{(1-\alpha z^{-1})^2}=\frac{\alpha z^{-1}}{(1-\alpha z^{-1})^2}\qquad ROC:|z|>|\alpha|$$

$$\Longrightarrow\ n\,\alpha^n\,u[n]\overset{z}{\longleftrightarrow}\frac{\alpha z^{-1}}{(1-\alpha z^{-1})^2}\qquad ROC:\ |z|>|\alpha|$$

$$\Longrightarrow\ x[n]=n\,\alpha^n\,u[n]$$

قضیه‌ی مقدار اولیه

اگر $x[n]$ برای $n < 0$ برابر صفر باشد:

$$x[0] = \lim_{z \to \infty} X(z)$$

مثال ۱۶: اثبات قضیه‌ی مقدار اولیه

قضیه‌ی مقدار اولیه‌ی تبدیل $\mathcal{Z}$ را اثبات کنید.

حل:

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]z^{-n}$$

$$=\cdots+x[-3]z^{3}+x[-2]z^{2}+x[-1]z+x[0]+x[1]z^{-1}+x[2]z^{-2}+x[3]z^{-3}+\cdots$$

شرط قضیه: $x[n]=0$ برای $n<0$:

$$=x[0]+x[1]z^{-1}+x[2]z^{-2}+x[3]z^{-3}+\cdots$$

$$\Longrightarrow \lim_{z\to\infty} X(z)=\lim_{z\to\infty}\left(x[0]+x[1]z^{-1}+x[2]z^{-2}+x[3]z^{-3}+\cdots\right)=x[0]$$

فهرست مطالب

در حوزه‌ی زمان

$$x[n] \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow y[n]$$

$$y[n] = x[n] * h[n]$$

در حوزه‌ی z

$$X(z) \longrightarrow \boxed{H(z)} \longrightarrow Y(z)$$

$$Y(z) = X(z) \cdot H(z)$$

$$h[n] \overset{z}{\longleftrightarrow} H(z)$$

$$z_0^n \longrightarrow \boxed{H(z)} \longrightarrow H(z)\Big|_{z=z_0} \cdot z_0^n$$

تابع ویژه — تابع سیستم — مقدار ویژه — تابع ویژه

بررسی ویژگی‌های سیستم‌ها در حوزه‌ی z

- شرط لازم و کافی برای علی بودن سیستم آن است که ناحیه‌ی همگرایی تابع سیستم دست‌راستی بوده و بی‌نهایت را در برگیرد.
- برای سیستمی با تابع سیستم rational ، شرط لازم و کافی برای علی بودن سیستم آن است که ناحیه‌ی همگرایی تابع سیستم دست‌راستی بوده و درجه‌ی صورت از درجه‌ی مخرج بزرگ‌تر نباشد (وقتی برحسب z نوشته می‌شود).
- شرط لازم و کافی برای پایداری سیستم آن است که ناحیه‌ی همگرایی تابع سیستم شامل دایره‌ی واحد باشد.
- شرط لازم و کافی برای پایداری یک سیستم علی آن است که تمام قطب‌های تابع سیستم درون دایره‌ی واحد باشند. در مباحثی نظیر کنترل خطی سیستم‌ها که علی بودن پیش‌فرض است پایداری سیستم بر اساس محل قطب‌های تابع سیستم ارزیابی می‌گردد.

مثال ۱۷: ویژگی علی بودن سیستم توصیف شده با تابع سیستم

علی بودن سیستم‌های توصیف شده با تابع سیستم زیر را بررسی کنید.

الف) $H(z) = \dfrac{z^3 - 2z^2 + z}{z^2 + \frac{1}{4}z + \frac{1}{8}}$

ب) $H(z) = \dfrac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \dfrac{1}{1 - 2z^{-1}} \qquad |z| > 2$

حل الف: سیستم غیرعلی است.

حل ب: علی است.

$$H(z) = \frac{z}{z - \frac{1}{2}} + \frac{z}{z - 2} = \frac{z^2 - 2z + z^2 - \frac{1}{2}z}{\left(z - \frac{1}{2}\right)(z - 2)} = \frac{2z^2 - \frac{5}{2}z}{\left(z - \frac{1}{2}\right)(z - 2)}$$

مثال ۱۸: ویژگی‌های علی بودن و پایداری

عبارت تابع سیستم یک سیستم LTI داده شده است. پاسخ ضربه‌ی سیستم را چنان بیابید که

الف: سیستم پایدار باشد. ب: سیستم علی باشد.

ج: سیستم ضدعلی باشد.

$$H(z)=\frac{2z^2-\frac{5}{2}z}{z^2-\frac{5}{2}z+1}$$

حل:

$$H(z)=\frac{2z\left(z-\frac{5}{4}\right)}{(z-2)\left(z-\frac{1}{2}\right)}$$

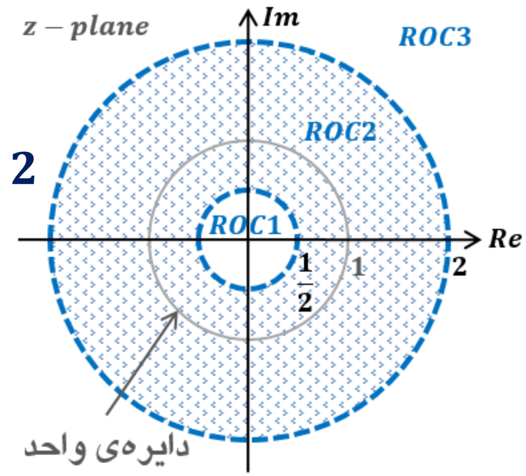
$z_1=0 \quad z_2=\frac{5}{4}$

$p_1=\frac{1}{2} \quad p_2=2$

$ROC1: |z|<\frac{1}{2}$

$ROC2: \frac{1}{2}<|z|<2$

$ROC3: |z|>2$



$$H(z)=\frac{2\left(1-\frac{5}{4}z^{-1}\right)}{(1-2z^{-1})\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)}=\frac{1}{1-2z^{-1}}+\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$$

حل الف:

$ROC2: \frac{1}{2}<|z|<2 \quad \Rightarrow h[n]=-(2)^n\,u[-n-1]+\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$

حل ب:

$ROC3: |z|>2 \quad \Rightarrow h[n]=(2)^n u[n]+\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$

حل ج:

$ROC1: |z|<\frac{1}{2} \quad \Rightarrow h[n]=-(2)^n u[-n-1]-\left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1]$

فهرست مطالب

نمایش نمودار بلوکی

$$H(z)=\frac{b_0+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}+b_3z^{-3}+\cdots}{1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}+a_3z^{-3}+\cdots}$$

$$H(z)=\frac{b_0+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}}{1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}}$$

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}\quad\Longrightarrow\quad\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{b_0+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}}{1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}}\quad\Longrightarrow\quad Y(z)=\frac{b_0+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}}{1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}}X(z)$$

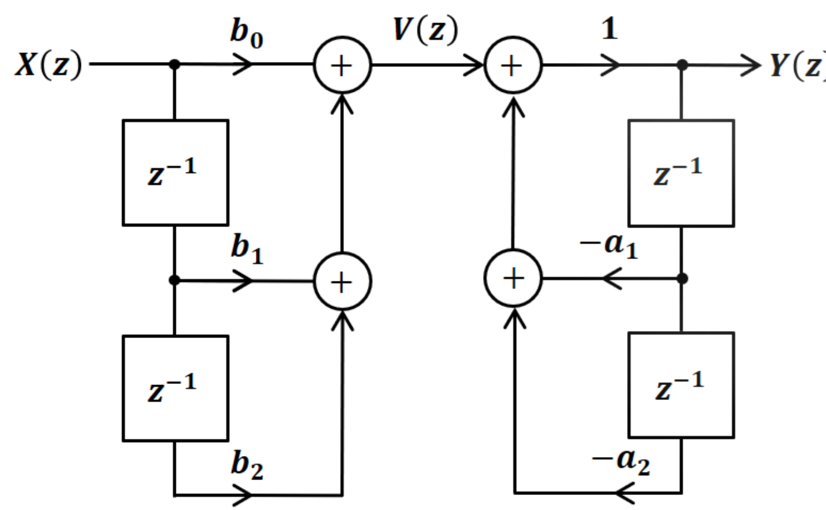
فرم مستقیم I :

$$V(z)=\left(b_0+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}\right)X(z)$$

$$Y(z)=\frac{V(z)}{1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}}$$

$$V(z)=b_0X(z)+b_1z^{-1}X(z)+b_2z^{-2}X(z)$$

$$Y(z)=V(z)-a_1z^{-1}Y(z)-a_2z^{-2}Y(z)$$



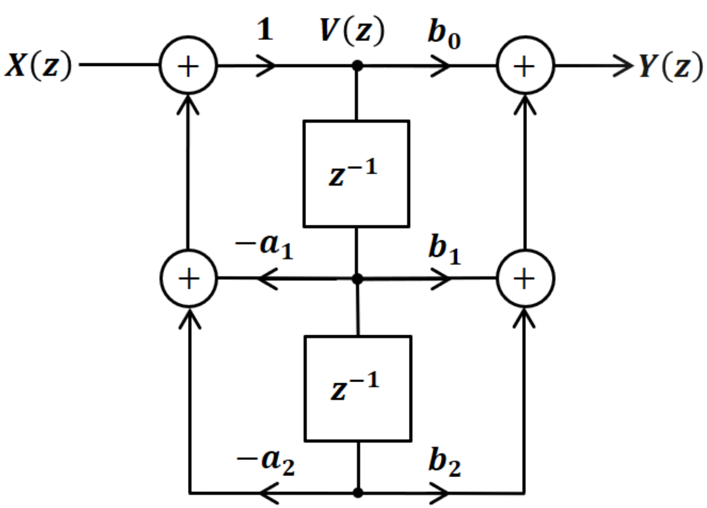
فرم مستقیم II :

$$V(z)=\frac{X(z)}{1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}}$$

$$Y(z)=\left(b_0+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}\right)V(z)$$

$$V(z)=X(z)-a_1z^{-1}V(z)-a_2z^{-2}V(z)$$

$$Y(z)=b_0V(z)+b_1z^{-1}V(z)+b_2z^{-2}V(z)$$



مثال ۱۹: نمایش نمودار بلوکی

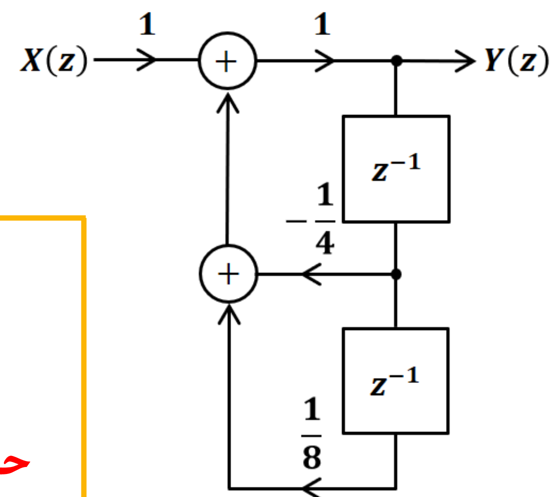
نمایش نمودار بلوکی سیستمی با تابع سیستم مرتبه دوم داده شده را به فرم‌های زیر رسم کنید.

الف: فرم مستقیم　　ب: فرم سری　　ج: فرم موازی

$$H(z)=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)}$$

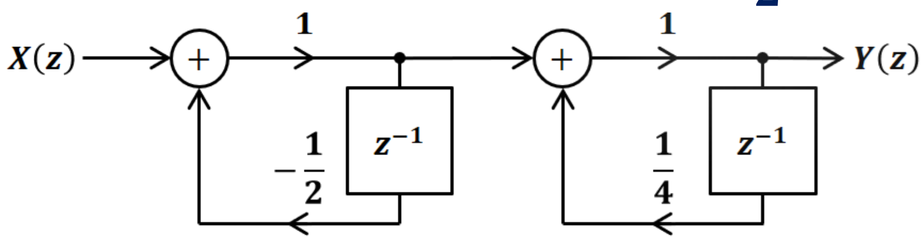
حل الف:

$$H(z)=\frac{1}{1+\frac{1}{4}z^{-1}-\frac{1}{8}z^{-2}}$$

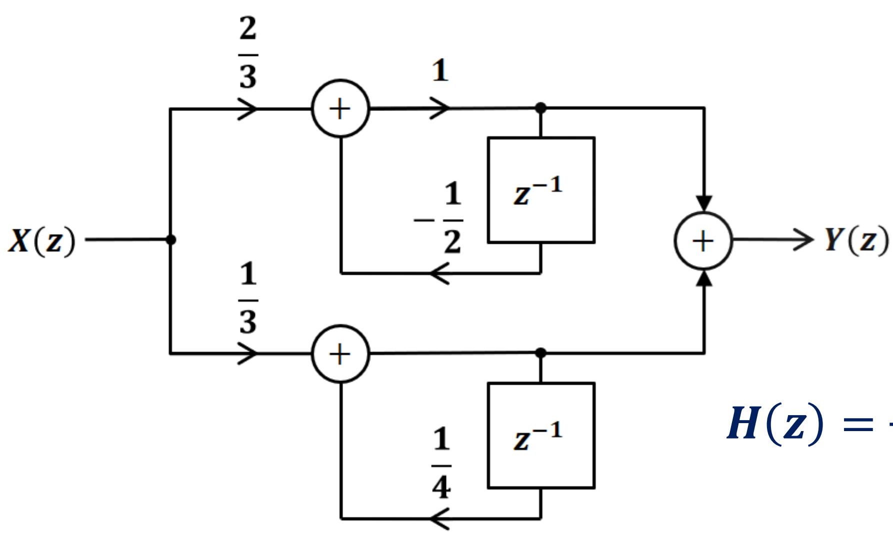


حل ب:

$$H(z)=\frac{1}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}$$



حل ج:



$$H(z)=\frac{\frac{2}{3}}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}+\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}$$

فهرست مطالب

تبدیل z یک‌طرفه

$$x[n] \xleftrightarrow{UZT} \mathcal{X}(z)$$

$$\mathcal{X}(z) \triangleq \sum_{n=0}^{\infty} x[n] z^{-n}$$

مثال ۲۰: محاسبه‌ی تبدیل $\mathcal{Z}$ یک‌طرفه سیگنال تاخیر یافته

تبدیل $\mathcal{Z}$ یک‌طرفه‌ی سیگنال‌های $x[n-1]$ و $x[n-2]$ را برحسب تبدیل $\mathcal{Z}$ یک‌طرفه‌ی $x[n]$ به دست آورید.

حل:

$$UZT\{x[n-1]\} = \sum_{n=0}^{\infty} x[n-1]z^{-n} = z^{-1}\sum_{n=1}^{\infty} x[n-1]z^{-(n-1)} + x[-1]$$

$$= z^{-1}\sum_{m=0}^{\infty} x[m]z^{-m} + x[-1] = z^{-1}\mathcal{X}(z) + x[-1]$$

$$\Rightarrow \quad x[n-1] \xleftrightarrow{UZT} z^{-1}\mathcal{X}(z) + x[-1]$$

$$\Rightarrow \quad x[n-2] \xleftrightarrow{UZT} z^{-2}\mathcal{X}(z) + z^{-1}x[-1] + x[-2]$$

مثال ۲۱:

سیستمی را در نظر بگیرید که رابطه‌ی ورودی- خروجی آن با معادله‌ی تفاضلی زیر توصیف شده است.

$$y[n-1]+2y[n]=x[n]$$

الف: اگر $y[-1]=2$ باشد پاسخ ورودی صفر این سیستم را تعیین کنید.

ب: پاسخ حالت صفر سیستم را به ورودی $x[n]=\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$ تعیین نمایید.

ج: اگر $x[n]=\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$ و $y[-1]=2$ باشد پاسخ سیستم را برای $n\geq 0$ به دست آورید.

حل الف:

$$z^{-1}\mathcal{Y}(z)+y[-1]+2\mathcal{Y}(z)=0 \Rightarrow \mathcal{Y}(z)=\frac{-y[-1]}{2+z^{-1}}=\frac{-2}{2+z^{-1}}=\frac{-1}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}$$

$$\Rightarrow y[n]=-\left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

حل ب:

$$y[n-1]+2y[n]=x[n] \Rightarrow Y(z)=\frac{X(z)}{2+z^{-1}}=\frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}X(z)$$

$$x[n]=\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] \Rightarrow X(z)=\frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}} \qquad \Rightarrow Y(z)=\frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}$$

$$\Rightarrow Y(z)=\frac{\frac{1}{2}}{\left(1+\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)} \Rightarrow Y(z)=\frac{\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}+\frac{\frac{1}{6}}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}$$

$$\Rightarrow y[n]=\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n]+\frac{1}{6}\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$$

حل ج:

$$y[n]=-\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n]+\frac{1}{6}\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$$

دکتر علی مالکی

فهرست مطالب

- معرفی تبدیل z
- ویژگی‌های ناحیه‌ی همگرایی
- وارون تبدیل z
- ارزیابی هندسی تبدیل فوریه به کمک نمودار قطب- صفر
- ویژگی‌های تبدیل z
- تجزیه و تحلیل سیستم‌های LTI در حوزه‌ی z
- نمایش نمودار بلوکی
- تبدیل z یک‌طرفه
- مثال‌های مروری
- مثال‌های نرم‌افزاری
- تمرین‌های تئوری
- تمرین‌های نرم‌افزاری

گفت ما را هفت وادی در ره است
چون گذشتی هفت وادی، درگه است

وانیامد در جهان زین راه کس
نیست از فرسنگ آن آگاه کس

چون نیامد باز کس زین راه دور
چون دهندت آگهی ای ناصبور؟

چون شدند آن جایگه گم سر به سر
کی خبر بازت دهد ای بی خبر؟

هست وادی طلب آغاز کار
وادی عشق است از آن پس، بی کنار

پس سیم وادی است آن معرفت
پس چهارم وادی استغنا صفت

هست پنجم وادی توحید پاک
پس ششم وادی حیرت صعبناک

هفتمین وادی فقر است و فنا
بعد از این روی روش نبود تو را

در کشش افتی روش گم گرددت
گر بود یک قطره قلزم گرددت

عطار نیشابوری