پردازش سیگنال‌های بیولوژیکی

Dr. Maleki

http://sun.semnan.ac.ir/~maleki/Lectures/BSP

مبحث چهارم

پردازش سیگنال دیجیتال

فهرست مطالب

- معرفی مفاهیم پردازش سیگنال دیجیتال
- نمونه‌برداری
- کوانتیزه کردن
- تبدیل Z

عناوین این بخش:

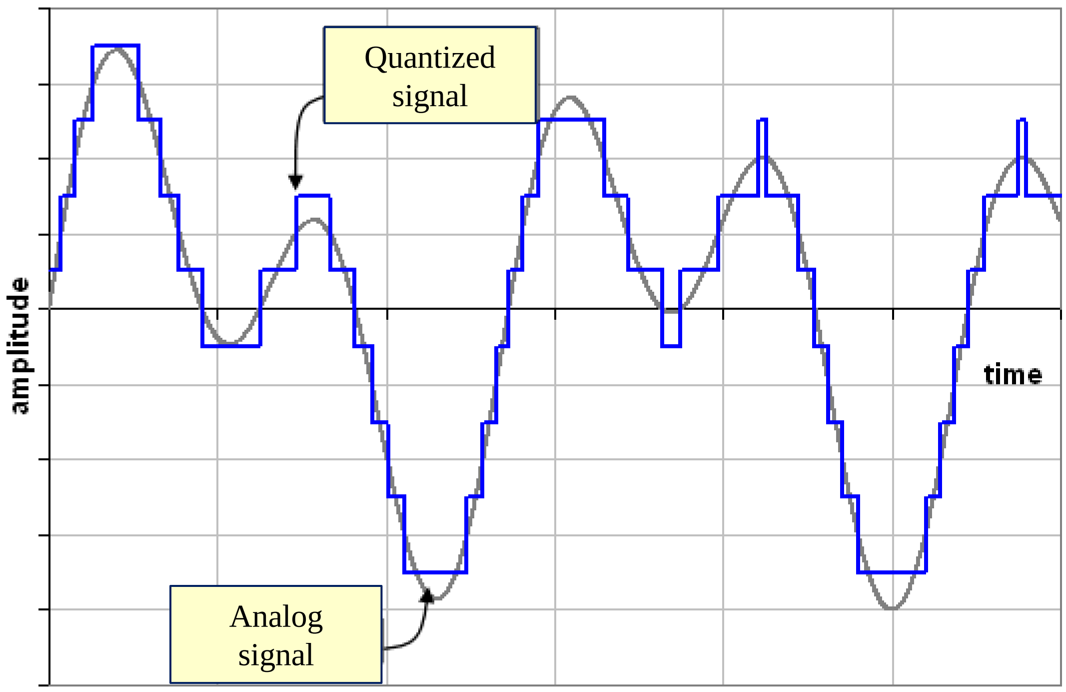
- یادآوری مفاهیم
  - سیگنال آنالوگ و سیگنال کوانتیزه شده
  - سیگنال زمان گسسته و سیگنال دیجیتال
  - پردازش آنالوگ و پردازش دیجیتال
- پردازش دیجیتال سیگنال‌های آنالوگ

سیگنال آنالوگ (analog signal)

سیگنال آنالوگ به سیگنالی گفته می‌شود که در دامنه و زمان پیوسته است.

سیگنال کوانتیزه شده (quantized signal)

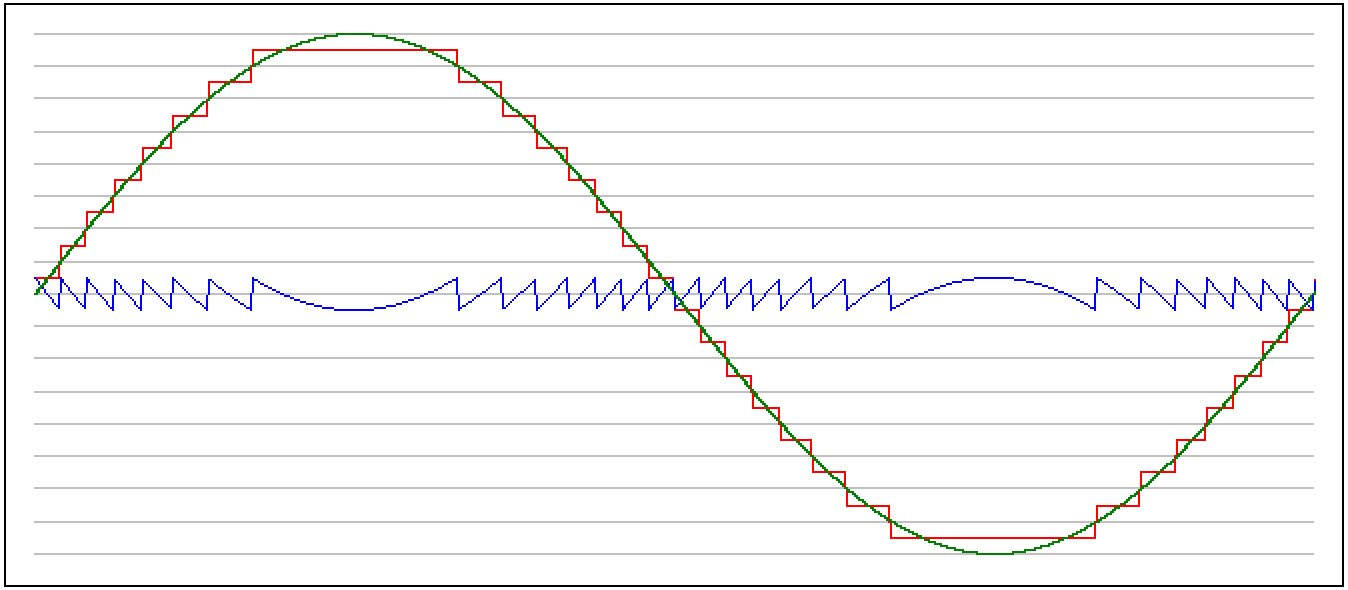
سیگنال کوانتیزه شده به سیگنالی گفته می‌شود که در زمان پیوسته ولی در دامنه گسسته است.



بنابراین **سیگنال کوانتیزه شده** یک سیگنال زمان-پیوسته است.

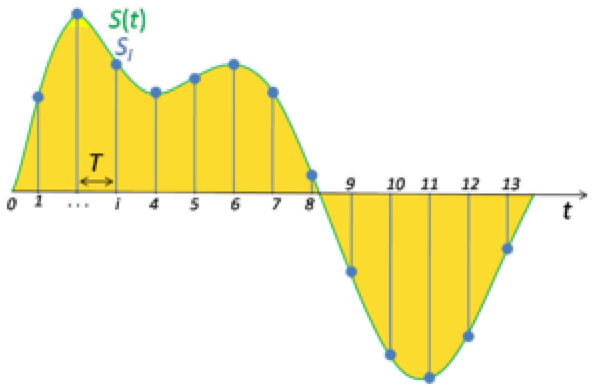
نویز کوانتیزه کردن (quantization noise)

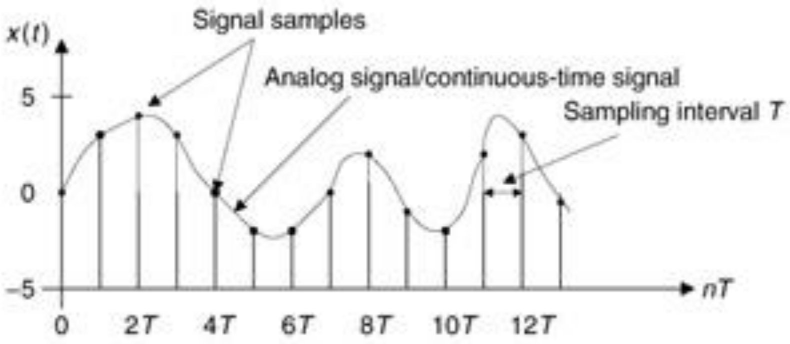
نویز کوانتیزه کردن به اختلاف بین سیگنال آنالوگ و سیگنال کوانتیزه شده‌ی متناظر گفته می‌شود.



سیگنال زمان گسسته (discrete-time signal)

سیگنال زمان گسسته به سیگنالی گفته می‌شود که در زمان گسسته است ولی در دامنه می‌تواند پیوسته باشد.

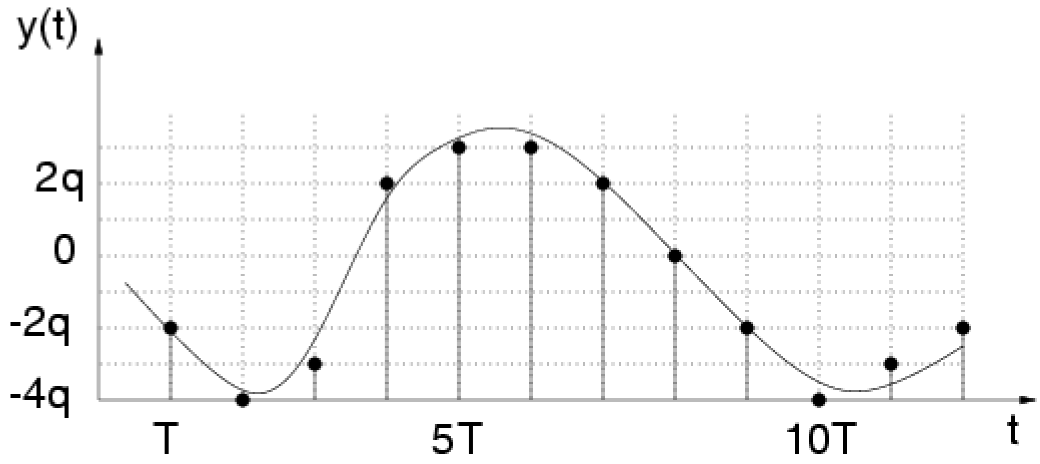




به گسسته‌سازی زمانی (**time-discretization**) سیگنال در اصطلاح **نمونه‌برداری (sampling)** گفته می‌شود.

سیگنال دیجیتال (digital signal)

سیگنال دیجیتال به سیگنالی گفته می‌شود که در زمان و دامنه گسسته است.



بنابراین می‌توان سیگنال دیجیتال را نوع خاصی از سیگنال زمان–گسسته دانست.

پردازش آنالوگ (analog processing)

پردازش آنالوگ با استفاده از قطعات الکترونیک آنالوگ نظیر ترانزیستور، تقویت‌کننده‌ی عملیاتی و ... انجام می‌گردد.

پردازش دیجیتال (digital processing)

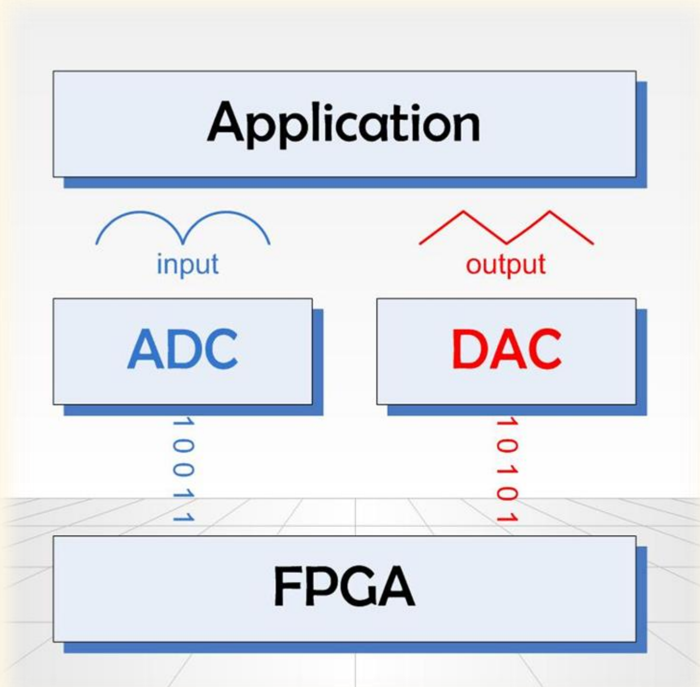
پردازش دیجیتال می‌تواند به صورت نرم‌افزاری یا سخت‌افزاری انجام گردد.

پردازش دیجیتال نرم‌افزاری

- Microcontroller
- DSP

پردازش دیجیتال سخت‌افزاری

- ASIC
- FPGA



پردازش دیجیتال (خواه نرم‌افزاری، خواه سخت‌افزاری) به مراتب بر پردازش آنالوگ برتری دارد.

پردازش دیجیتال سیگنال‌های آنالوگ

به واسطه‌ی برتری **پردازش دیجیتال** بر **پردازش آنالوگ** :

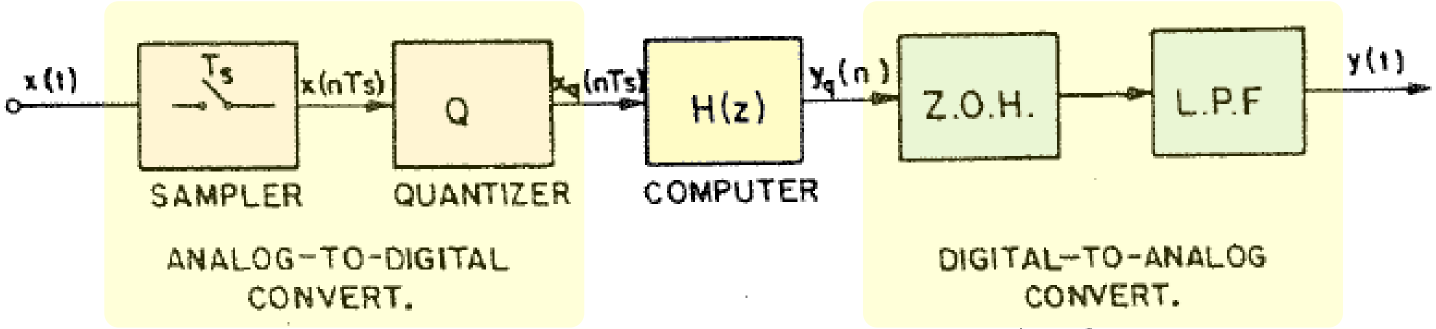


FIGURE 1. Digital processing of analog signals.

در اینجا فرض بر آن است که $x(t)$ یک سیگنال زمان-پیوسته‌ی **باند محدود** (**band-limited**) است که دارای **دامنه‌ی محدود** (**bounded in amplitude**) می‌باشد.

دامنه محدود : $|x(t)| \leq A$

تبدیل فوریه : $x(t) \xleftrightarrow{F} X(\omega)$

باند محدود : $X(\omega) = 0 , \qquad for\ all\ |\omega| \geq \omega_{max}$

انواع پردازش دیجیتال

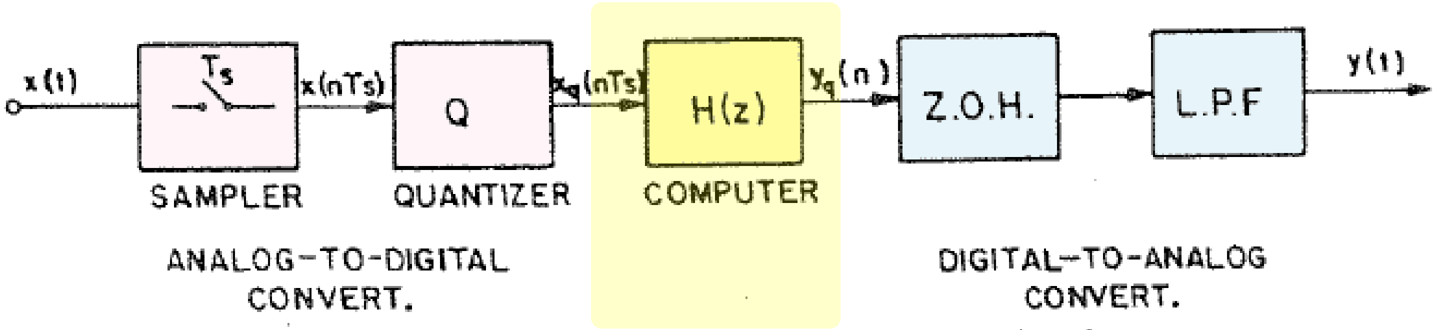


FIGURE 1. Digital processing of analog signals.

نمونه‌هایی از پردازش دیجیتال:

- فیلتر کردن
- تبدیل فوریه
- ویولت
- طبقه‌بندی
- خوشه‌بندی

انواع پردازش: پردازش **on-line** و پردازش **off-line**

اگر نتیجه‌ی پردازش سیگنال بی‌درنگ پس از دریافت نمونه‌ی سیگنال مورد نیاز باشد پردازش **on-line** یا **real-time** انجام می‌گردد؛ در غیر اینصورت پردازش **off-line** انجام می‌شود.

پردازش **off-line** معمولا روی کامپیوترهای همه‌منظوره انجام می‌شود درحالی‌که برای پردازش **on-line** ، اغلب از سخت‌افزار اختصاصی (**dedicated**) استفاده می‌گردد.

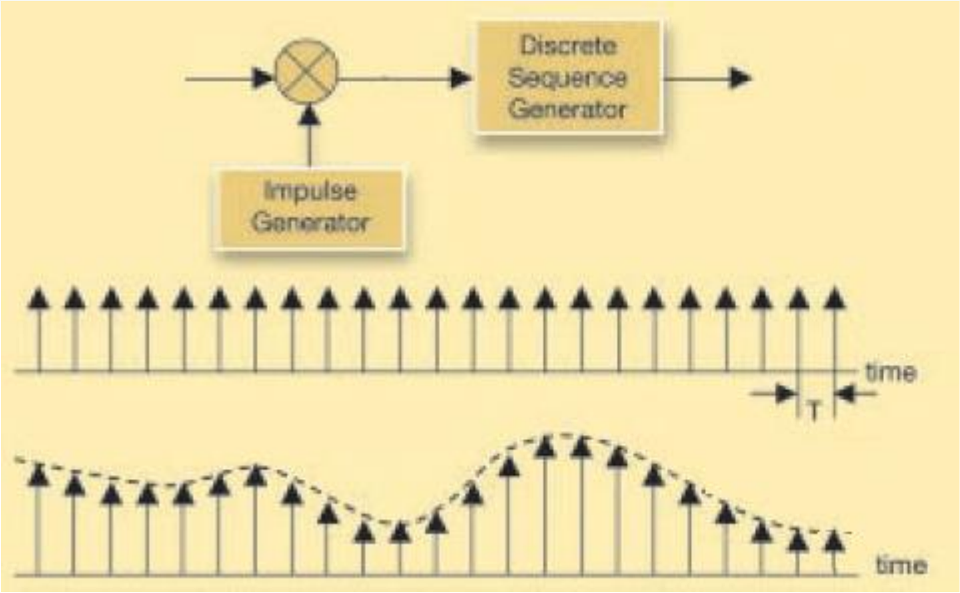
فهرست مطالب

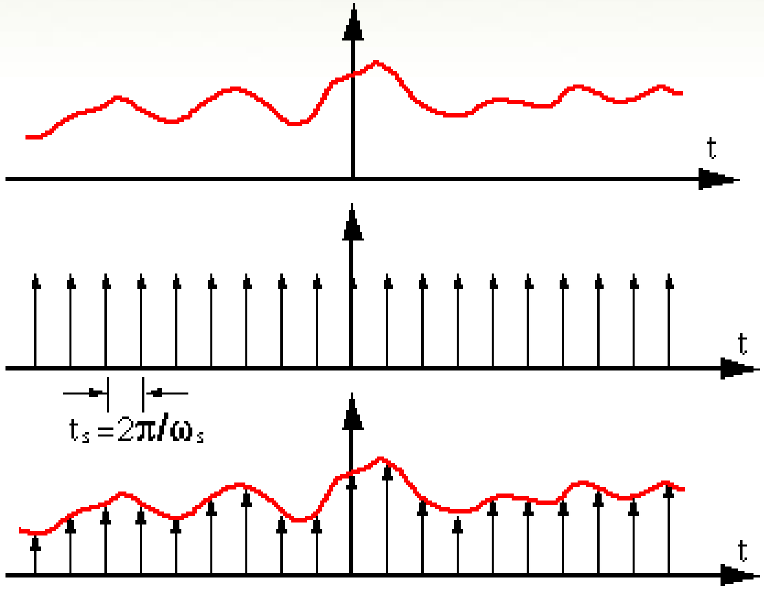
- معرفی مفاهیم پردازش سیگنال دیجیتال
- نمونه‌برداری
- کوانتیزه کردن
- تبدیل Z

عناوین این بخش:

- نمونه‌برداری یکنواخت
- نمونه‌برداری غیریکنواخت

نمونه‌برداری یکنواخت (uniform sampling)





$\delta(t)$: تابع دلتای دیراک (ضربه)

(impulse train) قطار ضربه : $\delta_{T_s}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\,(t - nT_s)$

$$x^*(t) = x(t)\delta_{T_s}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(\,t)\,\delta(t - nT_s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(\,nT_s)\,\delta(t - nT_s)$$

$$x(t) \xleftrightarrow{F} X(\omega) \quad \Rightarrow \quad x^*(t) \xleftrightarrow{F} X^*(\omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(\omega + n\omega_s)$$

$$\omega_s = 2\pi f_s = \frac{2\pi}{T_s}$$

تمرین:

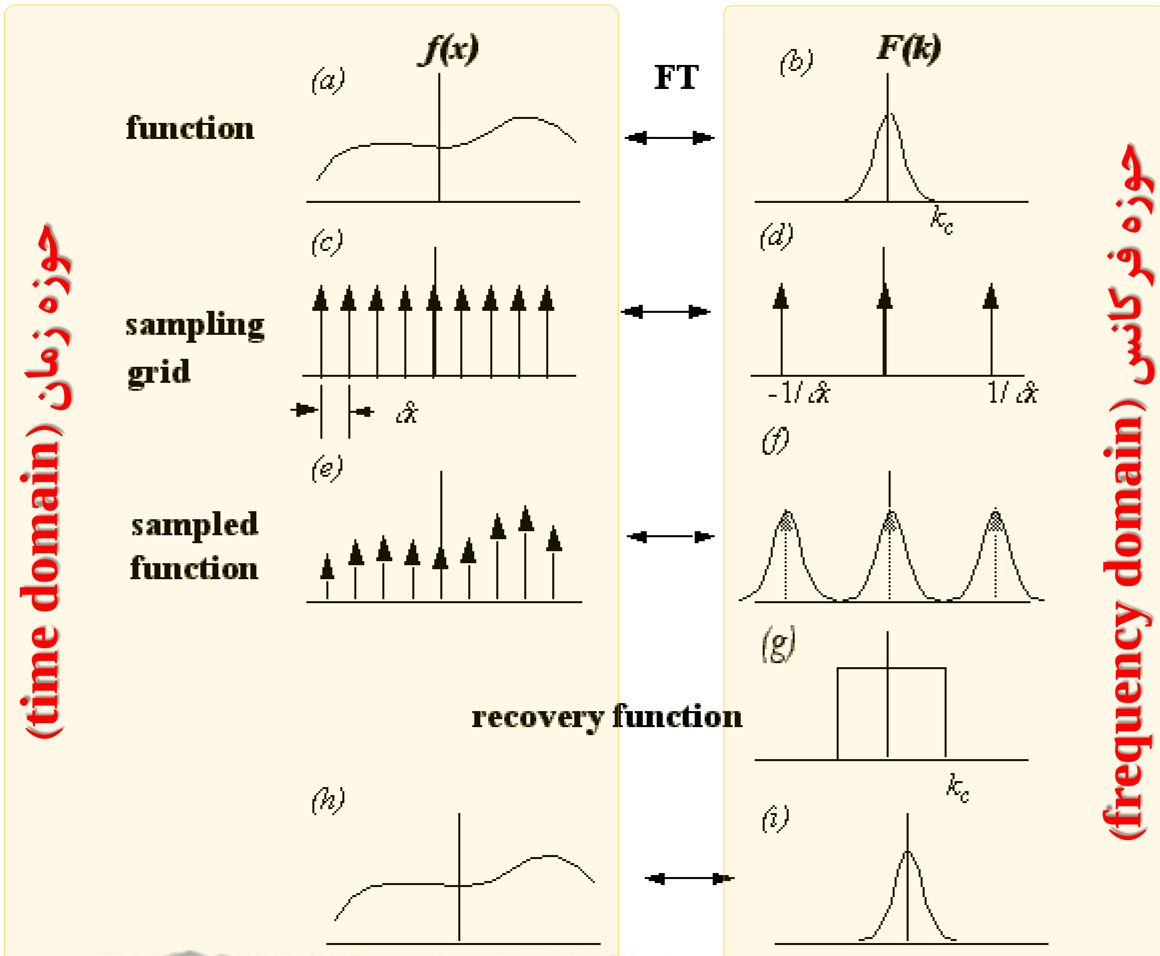
رابطه‌ی زیر را به دست آورید.

$$x^*(t) = x(t)\delta_{T_s}(t) \xleftrightarrow{F} X^*(\omega) = \frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty} X(\omega + n\omega_s)$$

$$\delta_{T_s}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\,(t - nT_s)$$

مفاهیم نمونه‌برداری یکنواخت در حوزه‌های زمان و فرکانس

$$x^*(t) = x(t).\sum_{j=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s) \xleftrightarrow{F} X^*(\omega) = \frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty} X(\omega + n\omega_s)$$



قضیه‌ی نمونه‌برداری (sampling theorem)

قضیه‌ی نمونه‌برداری:

در فرآیند نمونه‌برداری، برای این که بتوان سیگنال اصلی را با استفاده از نمونه‌ها **بازسازی** نمود لازم است:

$$\omega_s \geq 2\omega_{max}$$

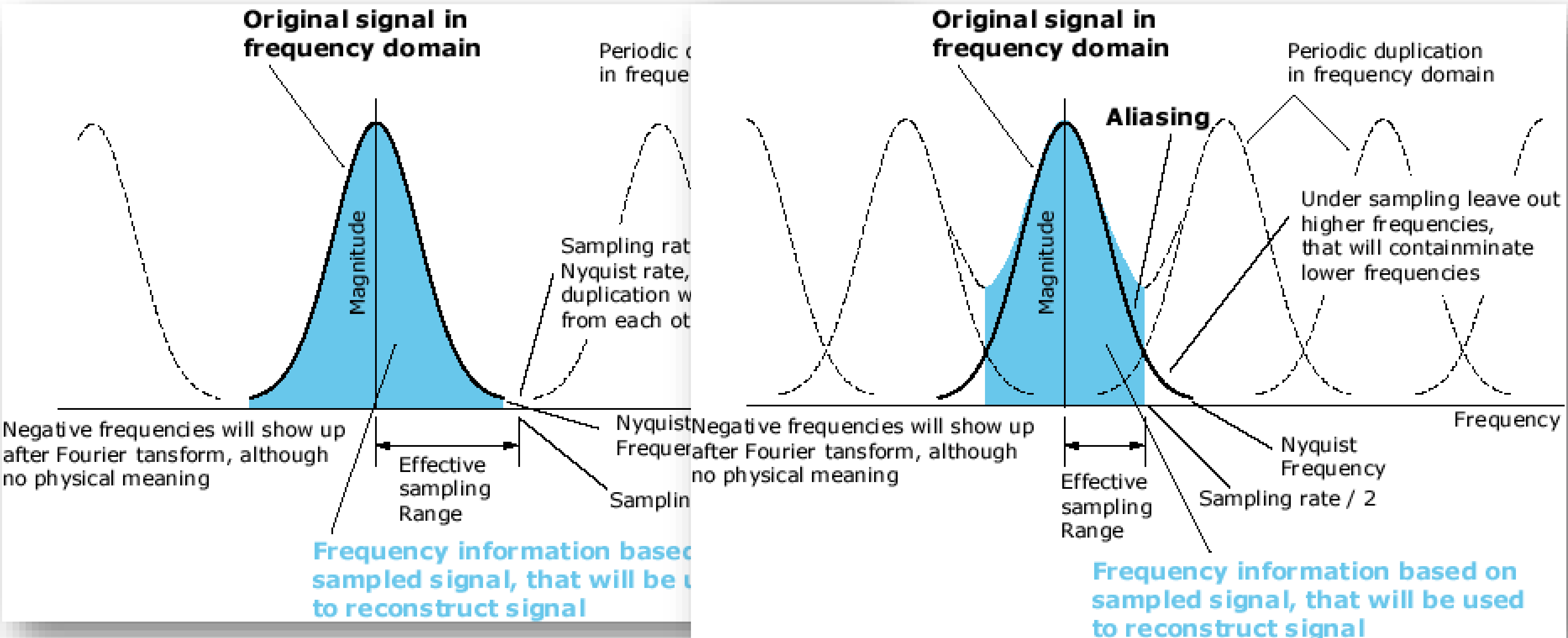
به عبارت دیگر، لازم است نرخ نمونه‌برداری حداقل دو برابر بالاترین مولفه‌ی فرکانسی سیگنال باشد.

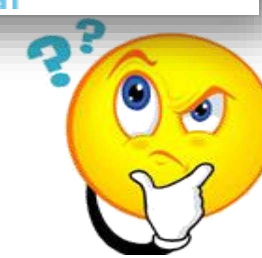
نرخ نایکوئیست: نمونه‌برداری با نرخ دو برابر بالاترین مولفه فرکانسی سیگنال.

Nyquist rate: $\omega_s = 2\omega_{max}$

اگر نمونه‌برداری با نرخ نایکوئیست انجام گردد برای بازسازی سیگنال به فیلتر پایین‌گذر ایده‌آل نیاز است که عملا غیرممکن است. از این رو، اغلب نمونه‌برداری با نرخ ۲/۵ تا ۱۰ برابر ω_{max} انجام می‌گردد.

تداخل فرکانسی (frequency aliasing)



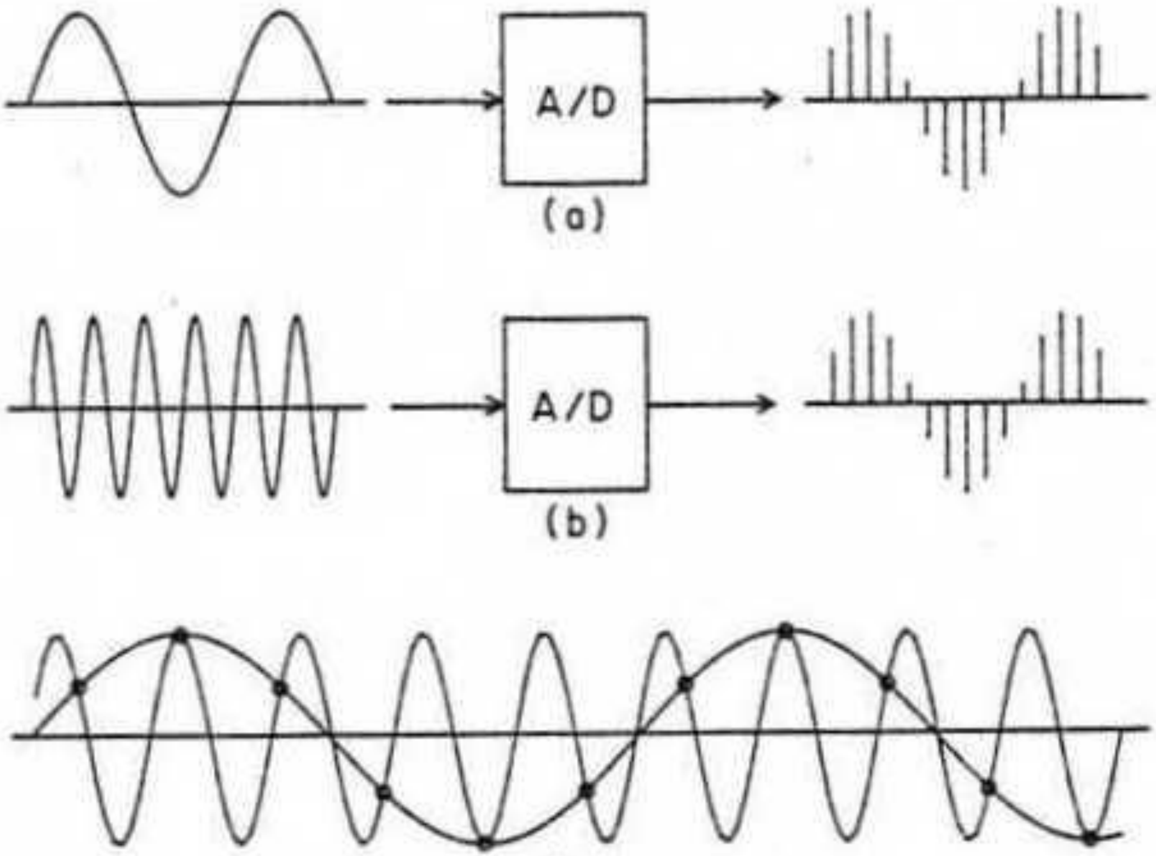


اگر سیگنال باند محدود نباشد برای جلوگیری از تداخل فرکانسی چه پیشنهادی دارید؟

پیش‌پردازش با یک فیلتر پایین‌گذر آنالوگ

(فیلتر ضدتداخل: antialiasing filter)

تداخل فرکانسی (frequency aliasing)

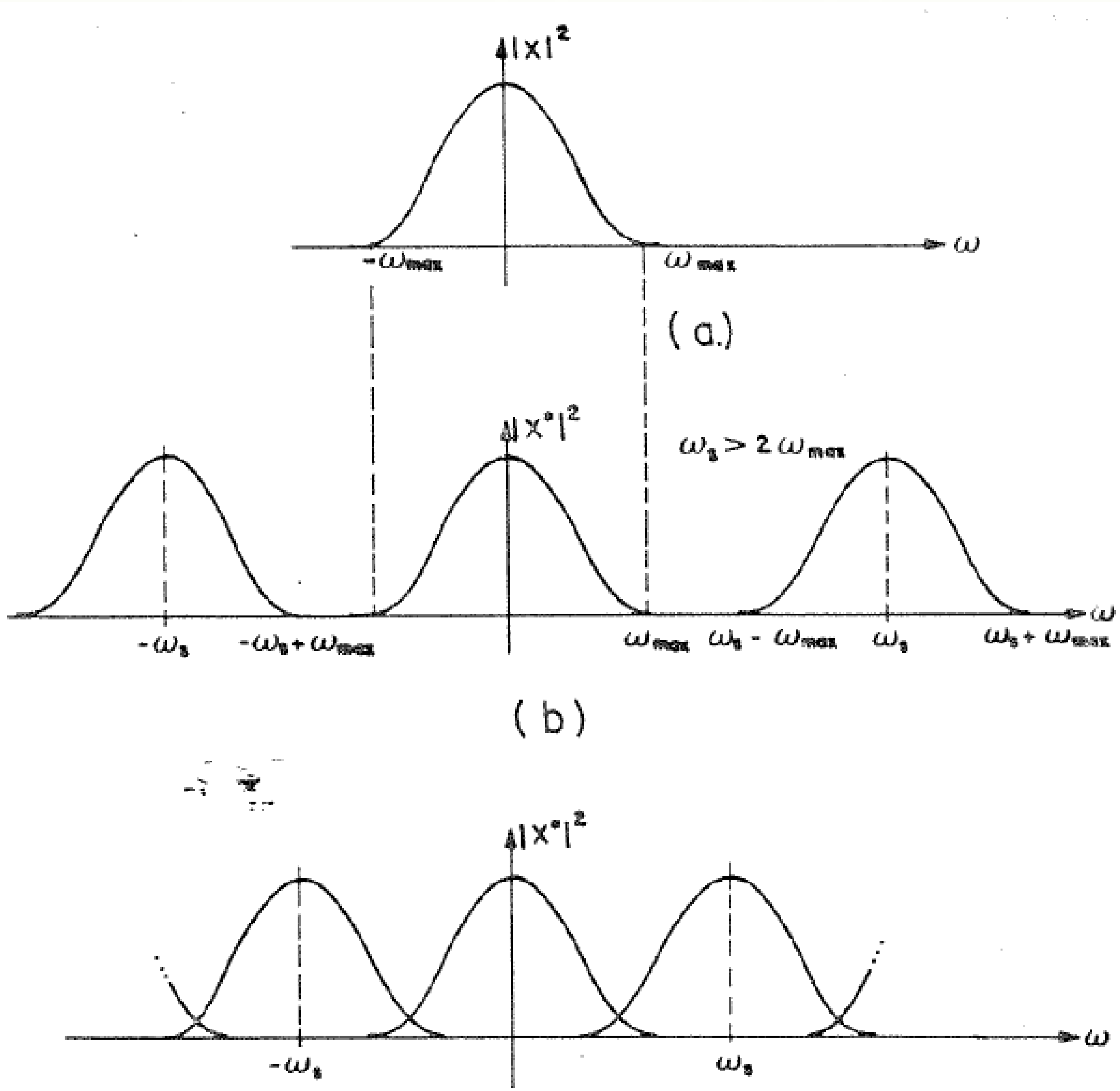


(a)

(b)

(c)

تداخل فرکانسی (frequency aliasing)



نمونه‌برداری غیریکنواخت (nonuniform sampling)

برخی سیگنال‌ها در زمان‌هایی دارای تغییرات سریع و در دوره‌هایی دارای تغییرات آرام است:

به منظور ذخیره‌سازی موثر (effective storage) یا انتقال موثر (effective transmission)، می‌توان نمونه‌برداری از سیگنال را در زمان‌های با تغییرات سریع، با نرخ بالا و در دوره‌های با تغییرات آرام، با نرخ کمتر انجام داد. این شیوه در اصطلاح، **نمونه‌برداری غیریکنواخت (nonuniform sampling)** یا **نمونه‌برداری تطبیقی (adaptive sampling)** خوانده می‌شود.

در نمونه‌برداری یکنواخت با مشخص بودن نرخ نمونه‌برداری، تنها مقدار نمونه‌ها برای توصیف سیگنال کفایت می‌کند؛ در حالی که در کاربردهای نمونه‌برداری غیریکنواخت برای ذخیره‌سازی اطلاعات، برای هر نمونه علاوه بر مقدار نمونه لازم است زمان نمونه نیز مشخص باشد.

کاربردهای نمونه‌برداری غیریکنواخت

ذخیره‌سازی موثر:

ذخیره کردن سیگنال با استفاده از حداقل فضای حافظه با حفظ قابلیت بازسازی سیگنال با حداکثر خطای مشخص.

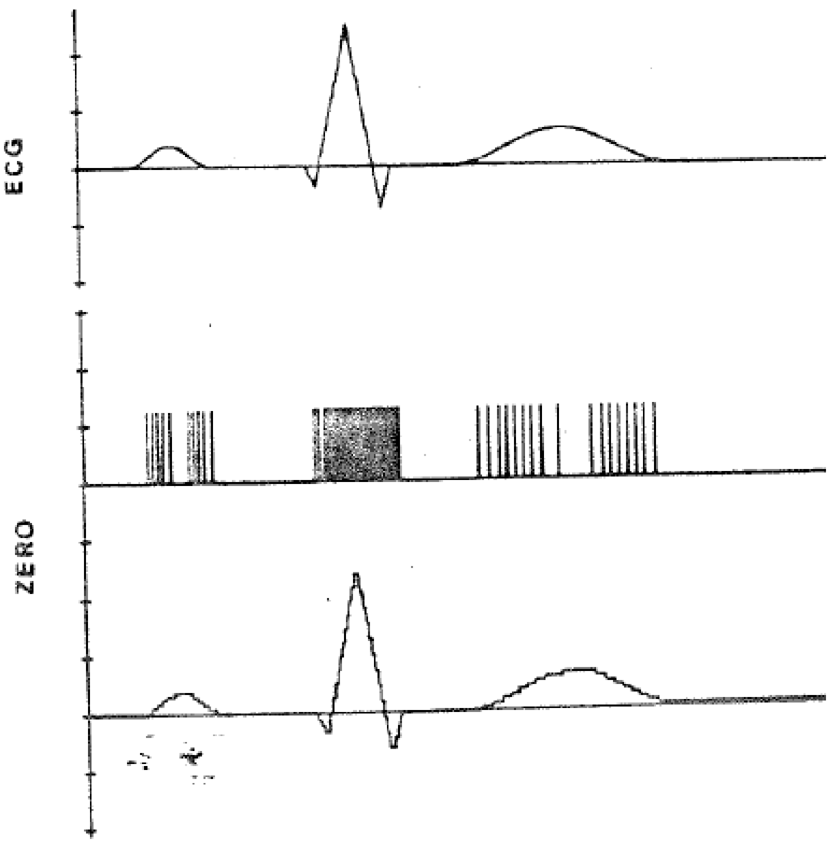
ارسال موثر:

کاهش نرخ انتقال اطلاعات (بیت بر ثانیه) با حفظ قابلیت بازسازی سیگنال در گیرنده با حداکثر خطای مشخص.

نمونه‌برداری تطبیقی مرتبه صفر (zero order adaptive sampling)

این شیوه، **روش تحریک شده با ولتاژ (voltage triggered method)** نیز نامیده می‌شود.

شرط ذخیره‌سازی نمونه : $|\Delta x(t_i,\tau_i)| = \ |x(t_i+\tau_i) - x(t_i)| \ > R_0$



با فرض این که سیگنال دارای باند محدود ω_{max} باشد

نمونه‌برداری با نرخ بالاتر از $\omega_s = k\omega_{max}$ (که k

مقداری تجربی در محدوده‌ی $10 \le k \le 2$ است)

توجیه ندارد.

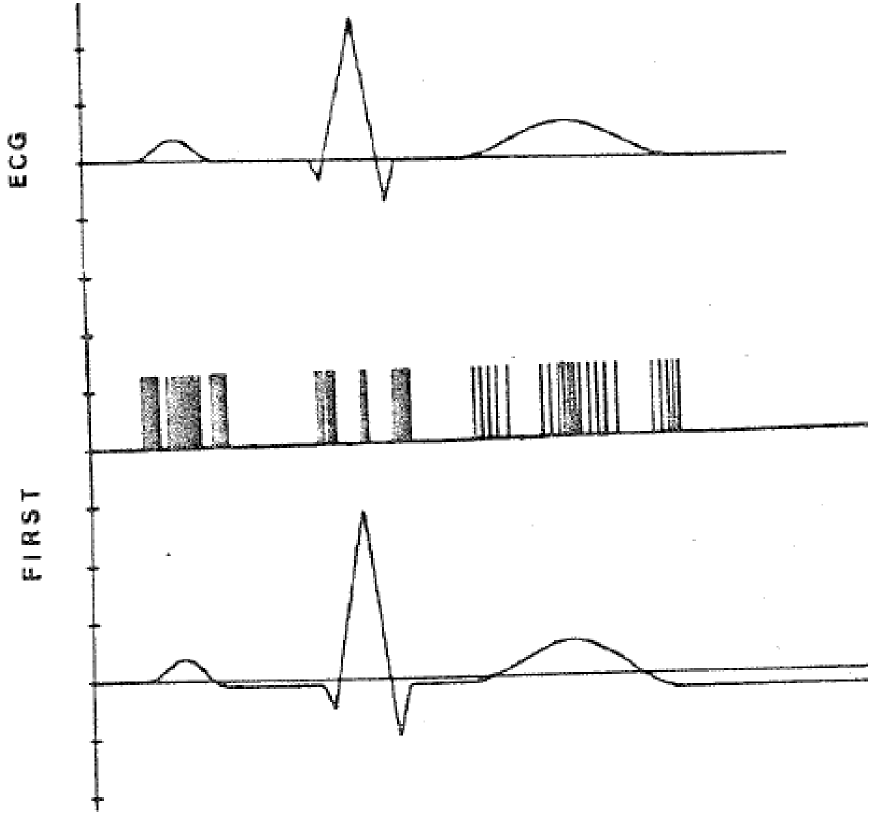
چنانچه $\tau_i < \frac{2\pi}{k\omega_{max}}$ باشد مقدار آن با $\tau_i = \frac{2\pi}{k\omega_{max}}$

جایگزین می‌گردد.

نمونه‌برداری تطبیقی مرتبه اول (first order adaptive sampling)

این شیوه، **روش تصویر دو نقطه‌ای (two points projection method)** نیز نامیده می‌شود.

شرط ذخیره‌سازی نمونه : $|\Delta\dot{x}(t_i,\tau_i)| = |\dot{x}(t_i+\tau_i)-\dot{x}(t_i)| > R_1$



تخمین مشتق زمانی سیگنال

در عمل لازم است مشتق سیگنال تخمین زده شود.

با فرض نمونه‌برداری یکنواخت با نرخ $\omega_s = k\omega_{max}$ (هر چه نرخ نمونه‌برداری بالاتر باشد بهتر است):

$$\hat{\dot{x}}(nT_s) = \frac{x(nT_s) - x((n-1)T_s)}{T_s}$$: تخمین مشتق

چنانچه سیگنال نویزی باشد (additive noise):

$$\hat{\dot{x}}(nT_s) = \frac{\frac{1}{M}\sum_{j=0}^{M-1} x\big((n+j)T_s\big) - \frac{1}{M}\sum_{j=0}^{M-1} x\big((n-j)T_s\big)}{(M-1)T_s}$$: تخمین مشتق

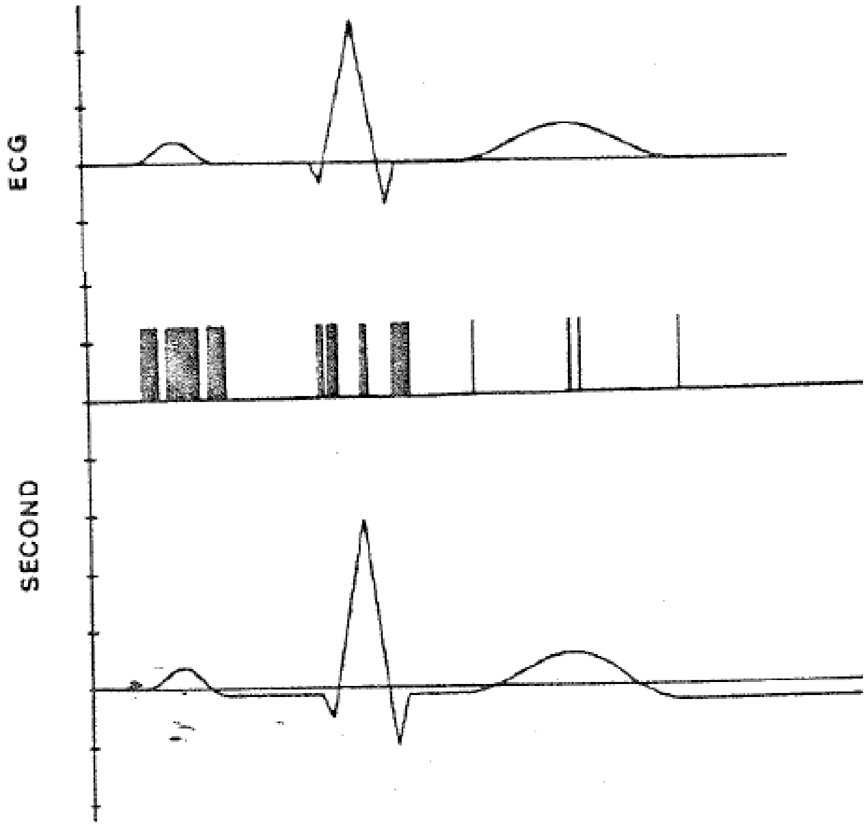
در این رابطه برای هموارسازی سیگنال از $(2M-1)$ نمونه استفاده شده است بنابراین شیب در هر $(2M-1)T_s$ ثانیه تخمین زده می‌شود.

نمونه‌برداری تطبیقی مرتبه دوم (second order adaptive sampling)

این شیوه، **روش تفاضل دوم (second differences method)** نیز نامیده می‌شود.

شرط ذخیره‌سازی نمونه : $|\dot{x}(t_i{}^{+}) - \dot{x}(t_i{}^{-})| > R_2$

این شیوه مبتنی بر تغییرات شیب محلی است.



تخمین مشتق زمانی سیگنال

در عمل لازم است مشتق سیگنال **تخمین** زده شود. با فرض نمونه‌برداری یکنواخت با نرخ حداکثر:

یادآوری : $|\dot{x}(t_i{}^{+}) - \dot{x}(t_i{}^{-})| > R_2$

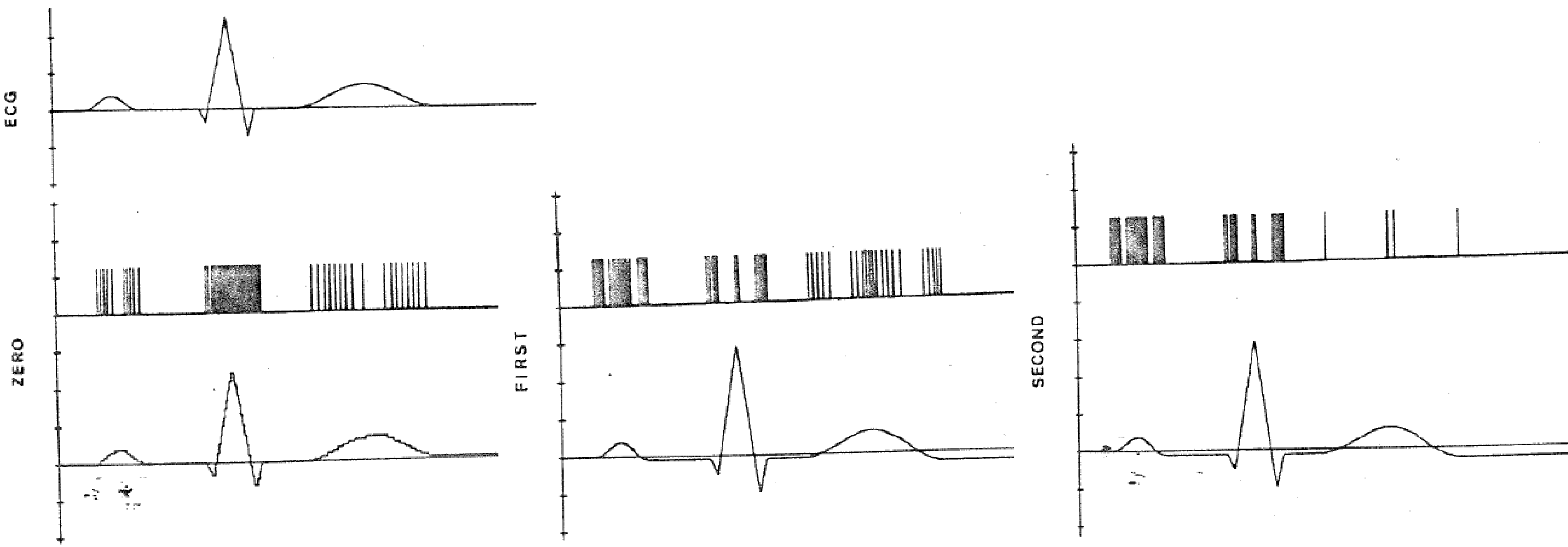
$$\hat{x}(t_n{}^{+}) = \frac{\frac{2}{M+1}\sum_{j=0}^{\frac{M-1}{2}} x\left(\left(n+\frac{M-1}{2}+j\right)T_s\right) - \frac{2}{M+1}\sum_{j=0}^{\frac{M-1}{2}} x\left(\left(n+\frac{M-1}{2}-j\right)T_s\right)}{\left(\frac{M-1}{2}\right)T_s}$$

$$\hat{x}(t_n{}^{-}) = \frac{\frac{2}{M+1}\sum_{j=0}^{\frac{M-1}{2}} x\left(\left(n-\frac{M-1}{2}+j\right)T_s\right) - \frac{2}{M+1}\sum_{j=0}^{\frac{M-1}{2}} x\left(\left(n-\frac{M-1}{2}-j\right)T_s\right)}{\left(\frac{M-1}{2}\right)T_s}$$

در این رابطه برای هموارسازی سیگنال از $(2M-1)$ نمونه استفاده شده است (با فرض فرد بودن M).

جمع‌بندی مثال

برای سیگنال ECG ساختگی (synthetic ECG) مورد بررسی، روش‌های نمونه‌برداری تطبیقی مرتبه صفر و مرتبه دو عملکرد مطلوبی ندارند. نتایج روش نمونه‌برداری تطبیقی مرتبه اول از وضعیت قابل قبولی برخوردار است. این شیوه نسبت فشرده‌سازی ۱:۱۴ را فراهم نموده است.



نمونه‌برداری غیریکنواخت با کدگذاری طول دوام (run length encoding)

۱- تقسیم‌بندی یکنواخت محدوده‌ی دینامیکی سیگنال به سطوح آستانه

۲- تعیین زمان عبور سیگنال از یکی از سطوح آستانه

۳- کد کردن فاصله‌ی زمانی بین دو عبور سیگنال از آستانه‌ی متوالی و جهت عبور (افزایش یا کاهش)

در ادامه به هر یک از این سه مرحله خواهیم پرداخت.

نمونه‌برداری غیریکنواخت با کدگذاری طول دوام (run length encoding)

۱- تقسیم‌بندی یکنواخت محدوده‌ی دینامیکی سیگنال به سطوح آستانه

۲- تعیین زمان عبور سیگنال از یکی از سطوح آستانه

۳- کد کردن فاصله‌ی زمانی بین دو عبور سیگنال از آستانه‌ی متوالی و جهت عبور (افزایش یا کاهش)

t_{i-1} : $(i-1)$ *crossing*

t_i : i^{th} *crossing*

$\tau_i = t_i - t_{i-1}$: i^{th} *interval*

t_q : *time quantum*

τ_i^q : *quantized* i^{th} *interval*

$$\tau_i^q = \begin{cases} t_q & \tau_i \le t_q \\ m_i t_q & \tau_i > t_q \end{cases} \qquad m_i : round\left(\frac{\tau_i}{t_q}\right)$$

نمونه‌برداری غیریکنواخت با کدگذاری طول دوام (run length encoding)

۱- تقسیم‌بندی یکنواخت محدوده‌ی دینامیکی سیگنال به سطوح آستانه

۲- تعیین زمان عبور سیگنال از یکی از سطوح آستانه

۳- کد کردن فاصله‌ی زمانی بین دو عبور سیگنال از آستانه‌ی متوالی و جهت عبور (افزایش یا کاهش)

در دوره‌ی کوانتیزه‌ی τ_i^q ، هر کوانتوم زمانی با یک جفت صفر **00** و سپس، عبور از سطح آستانه با **01** (برای upward crossing) یا **10** (برای downward crossing) بازنمایی می‌شود. بنابراین هر دوره‌ی زمانی با یک کلمه بازنمایی می‌گردد.

مثلا برخورد با سطح آستانه‌ی پایین‌تر پس از $3t_q$ از عبور قبلی، با کلمه **00 00 10** بازنمایی می‌شود.

نمونه‌برداری غیریکنواخت با کدگذاری طول دوام (run length encoding)

۱- تقسیم‌بندی یکنواخت محدوده‌ی دینامیکی سیگنال به سطوح آستانه

۲- تعیین زمان عبور سیگنال از یکی از سطوح آستانه

۳- کد کردن فاصله‌ی زمانی بین دو عبور سیگنال از آستانه‌ی متوالی و جهت عبور (افزایش یا کاهش)

تعداد جفت صفرها به صورت **کد باینری** کد می‌شود و به آن، **یک بیت برای عبور از سطح آستانه** (صفر برای **upward crossing** و یک برای **downward crossing**) اضافه می‌شود. از این رو اگر کد n بیتی باشد $n-1$ بیت نشانگر تعداد جفت صفرها و یک بیت نشانگر جهت عبور می‌باشد.

مثلا برای کلمه‌ی سه بیتی، ۲ بیت برای جفت صفرها است که می‌تواند صفر تا ۳ جفت صفر را نشان دهد. در رشته‌های بیش از سه جفت صفر، هر ۳ جفت صفر با کد **110** بازنمایی می‌شود.

تعداد بیت‌های کد (n) را بر مبنای چه معیاری باید انتخاب کرد؟

فهرست مطالب

- ○ معرفی مفاهیم پردازش سیگنال دیجیتال
- ○ نمونه‌برداری
- ○ کوانتیزه کردن
- ○ تبدیل Z

عناوین این بخش:

- ➢ مفهوم کوانتیزه کردن و انواع آن
- ➢ کوانتیزه کردن یکنواخت
- ➢ کوانتیزه کردن غیریکنواخت
- ➢ نویز کوانتیزه کردن
- ➢ کوانتیزه کردن زمخت

کوانتیزه کردن (quantization)

کوانتیزه کننده بلوکی غیرخطی است که نمونه‌های سیگنال آنالوگ را به کلمات باینری سازگار با سیستم دیجیتال تبدیل می‌کند. اگر کلمه‌ی باینری n بیتی باشد نمونه‌ی کوانتیزه شده می‌تواند یکی از 2^n عضو مجموعه‌ی خروجی کوانتیزه کننده باشد.

انواع کوانتیزه کردن:

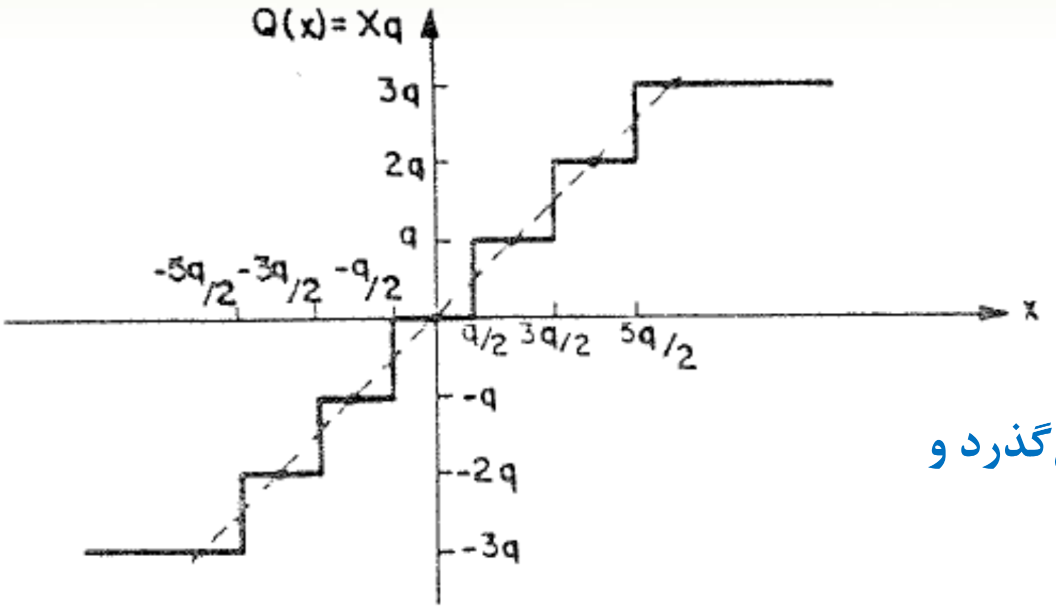
- zero memory quantization
- block quantization
- sequential quantization

در ادامه تمرکز روی **zero memory quantization** خواهد بود و به نمونه‌های زیر از این دسته می‌پردازیم.

- midtread uniform quantizer
- midriser uniform quantizer
- nonuniform quantizer

zero memory quantization: midtread uniform quantizer

کوانتیزه کردن یکنواخت با $N = 7$:



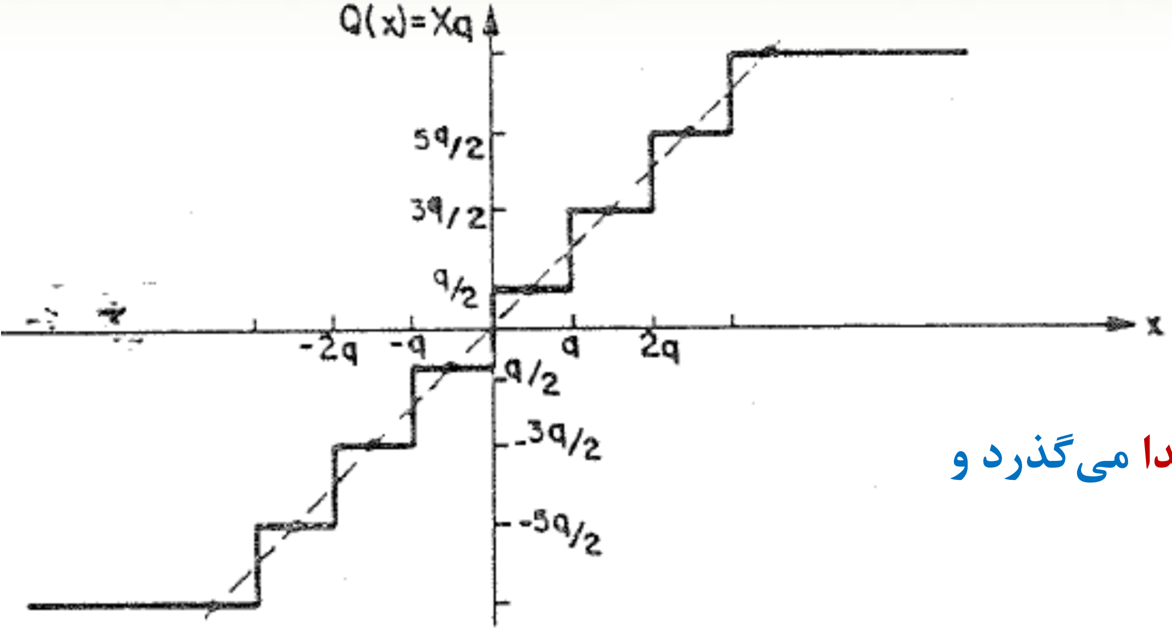
❖ خط متوسط (average line) از مبدا می‌گذرد و

دارای شیب متوسط ۱ است.

$$Q(x) = \begin{cases} x_q = -3q\,; & x \le -\dfrac{5}{2}q \\ x_q = mq\,; & \dfrac{2m-1}{2}q < x \le \dfrac{2m+1}{2}q \\ x_q = 3q\,; & x > \dfrac{5}{2}q \end{cases}$$

m: $integer\ \ and\ \ -2 \le m \le 2$

zero memory quantization: midriser uniform quantizer



کوانتیزه کردن یکنواخت با $N = 6$:

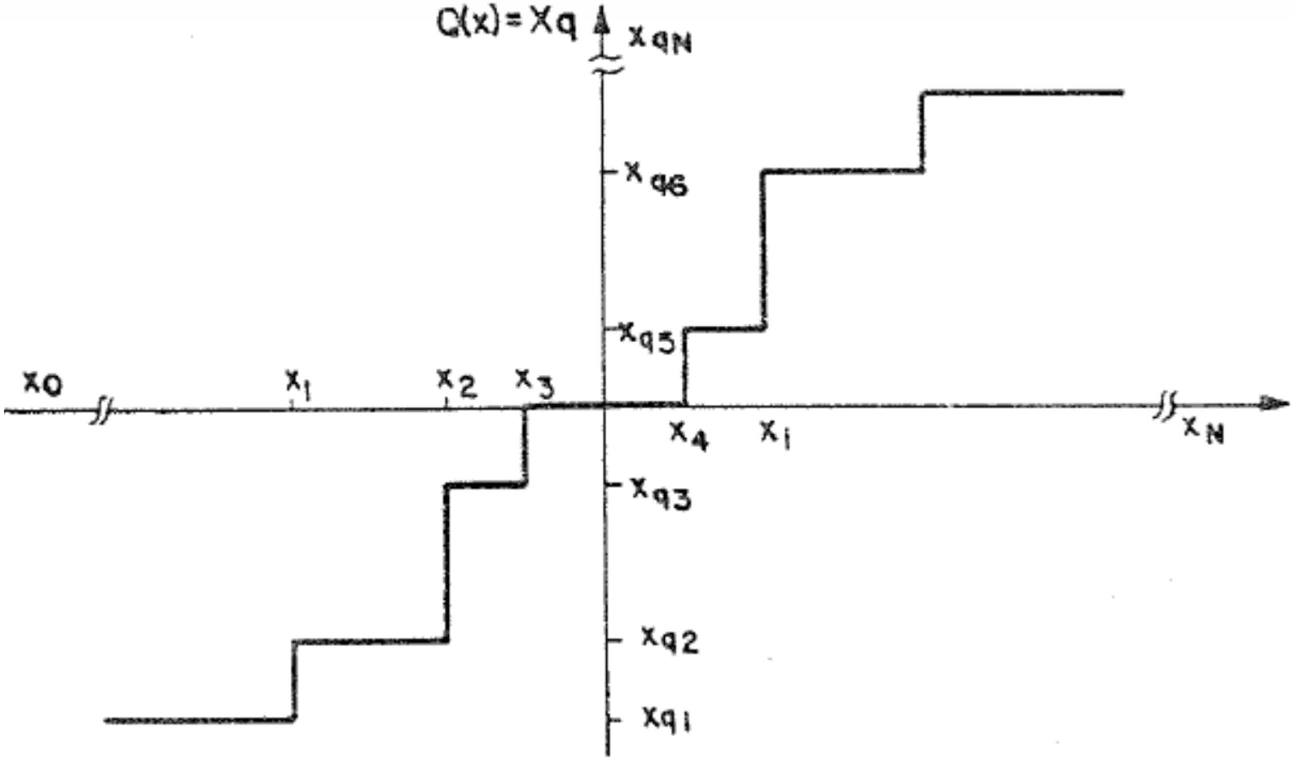
❖ خط متوسط (average line) از مبدا می‌گذرد و دارای شیب متوسط ۱ است.

$$Q(x) = \begin{cases} x_q = -\frac{7}{2}q; & x \leq -3q \\ x_q = \frac{2m-1}{2}q; & (m-1)q < x \leq mq \\ x_q = \frac{7}{2}q; & 3q < x \end{cases}$$

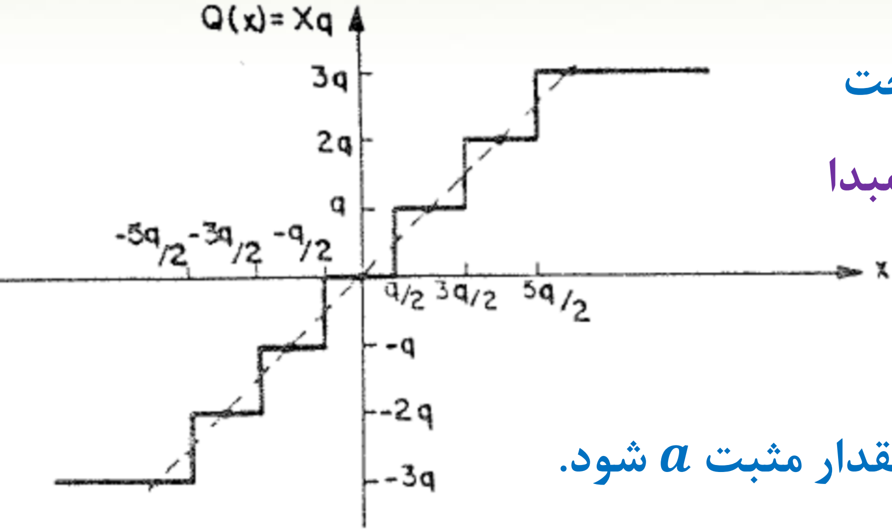
m: $integer$

$-2 \leq m \leq 3$

zero memory quantization: nonuniform quantizer

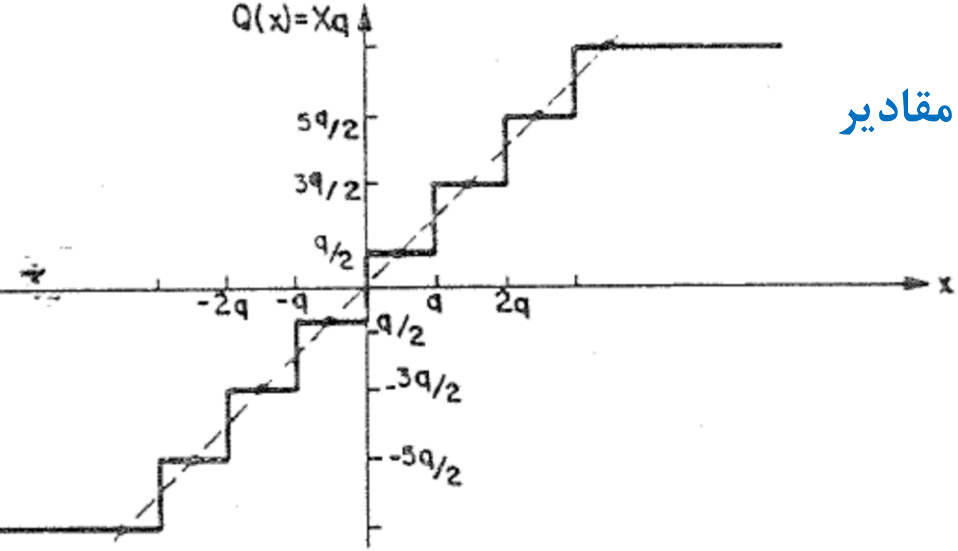


معرفی نویز کوانتیزه کردن (quantization noise)



خط میانگین (average line) در کوانتیزه کردن یکنواخت midtread و midriser خطی با شیب یک است که از مبدا می‌گذرد.

در حالت کلی، با تغییر مقیاس x یا x_q ، شیب می‌تواند مقدار مثبت a شود.

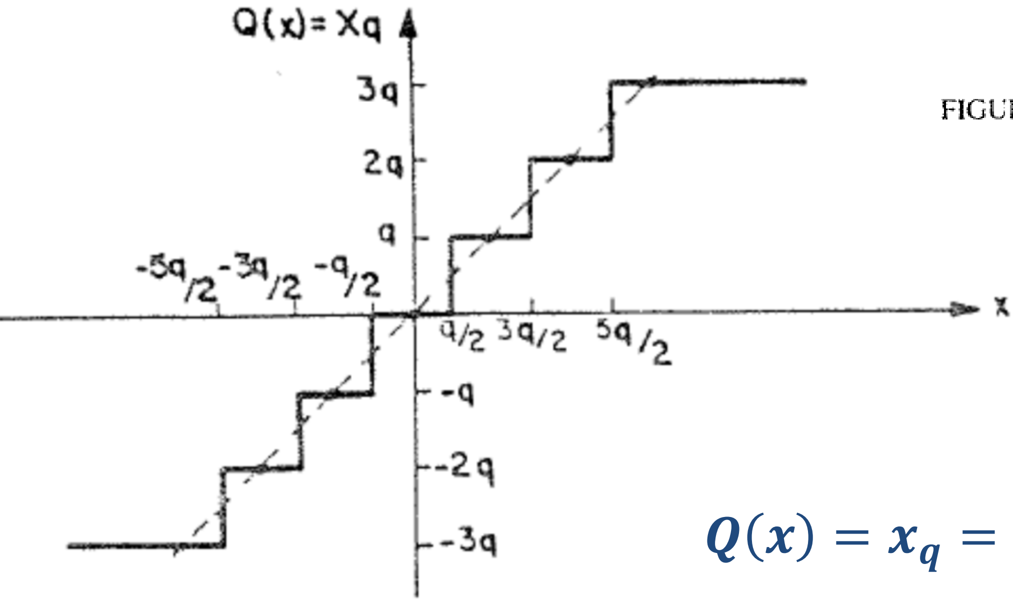


کوانتیزه کردن را می‌توان تابعی غیرخطی دانست که مقادیر ax را به صورت پله‌ای تقریب می‌زند از این رو،

$$Q(x) = x_q = ax + n_q$$

n_q : *quantization noise*

نویز کوانتیزه کردن برای midtread uniform quantization



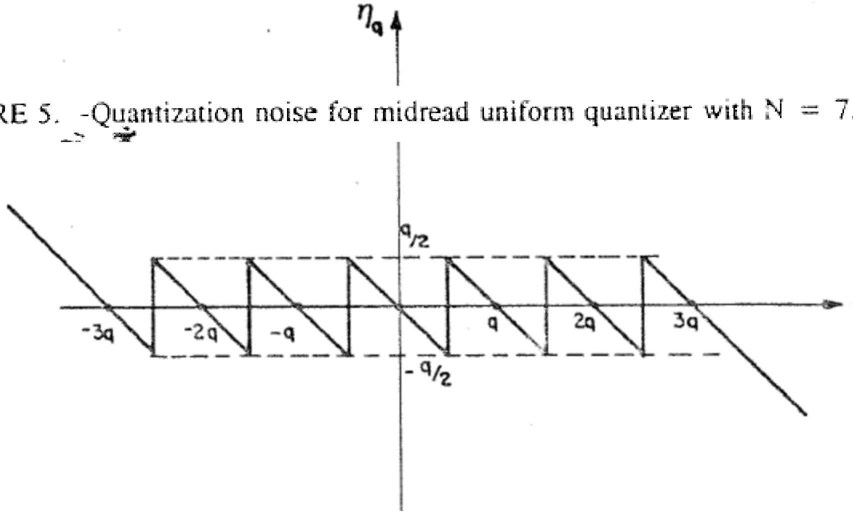


FIGURE 5. -Quantization noise for midread uniform quantizer with N = 7.

$$Q(x) = x_q = ax + n_q$$

در محدوده‌ی $-\frac{7}{2}q < x < \frac{7q}{2}$ ، نویز کوانتیزه کردن محدود و $|n_q| \le \frac{q}{2}$ است.

در خارج این محدوده، نویز کوانتیزه کردن به صورت **خطی** با x **افزایش** می‌یابد.

معیارهای طراحی کوانتیزه کردن غیریکنواخت

با توجه به مفهوم نویز کوانتیزه کردن، چه مزیتی برای کوانتیزه کردن غیریکنواخت قابل طرح است؟

با انتخاب مناسب سطوح کوانتیزه کردن، می‌توان خطای کلی کوانتیزه کردن را کاهش داد. بدین منظور لازم است طراحی بر اساس **توزیع احتمال سیگنال ورودی** باشد.

یعنی نواحی‌ای که احتمال رخداد دامنه‌ی سیگنال بیشتر است با سطوح ریزتری کوانتیزه شوند.

راهکاری دیگر (فرآیند companding)

همچنین می‌توان با استفاده از **کوانتیزه کننده‌ی یکنواخت** به همراه **پیش‌پردازش مناسب** سیگنال به این هدف دست یافت.

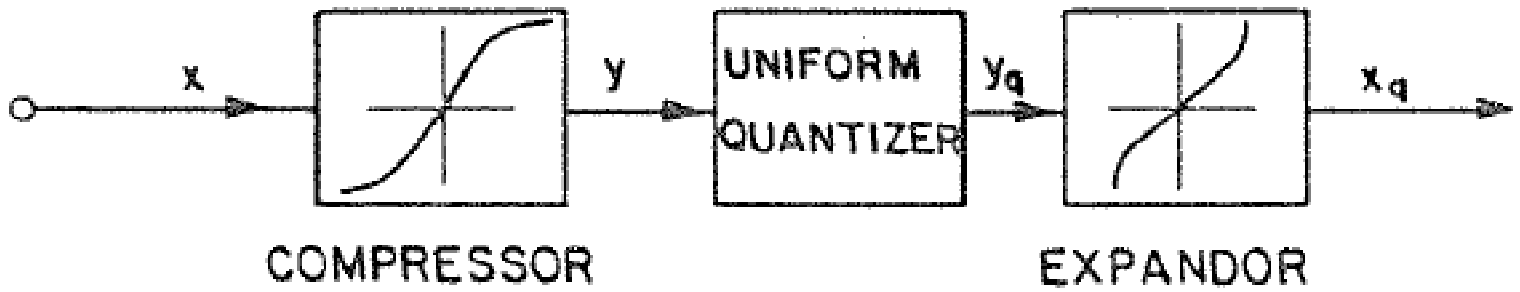


FIGURE 6. Block diagram of a companding system.

Compressor : عنصر غیرخطی بدون حافظه‌ای است که با توجه به توزیع احتمال ورودی، به صورتی بهینه تعیین می‌گردد.

Expandor : عنصر غیرخطی بدون حافظه‌ای است که نمونه‌های کوانتیزه شده‌ی متناظر با ورودی اصلی را تعیین می‌کند.

کوانتیزه کردن زمخت (rough quantization)

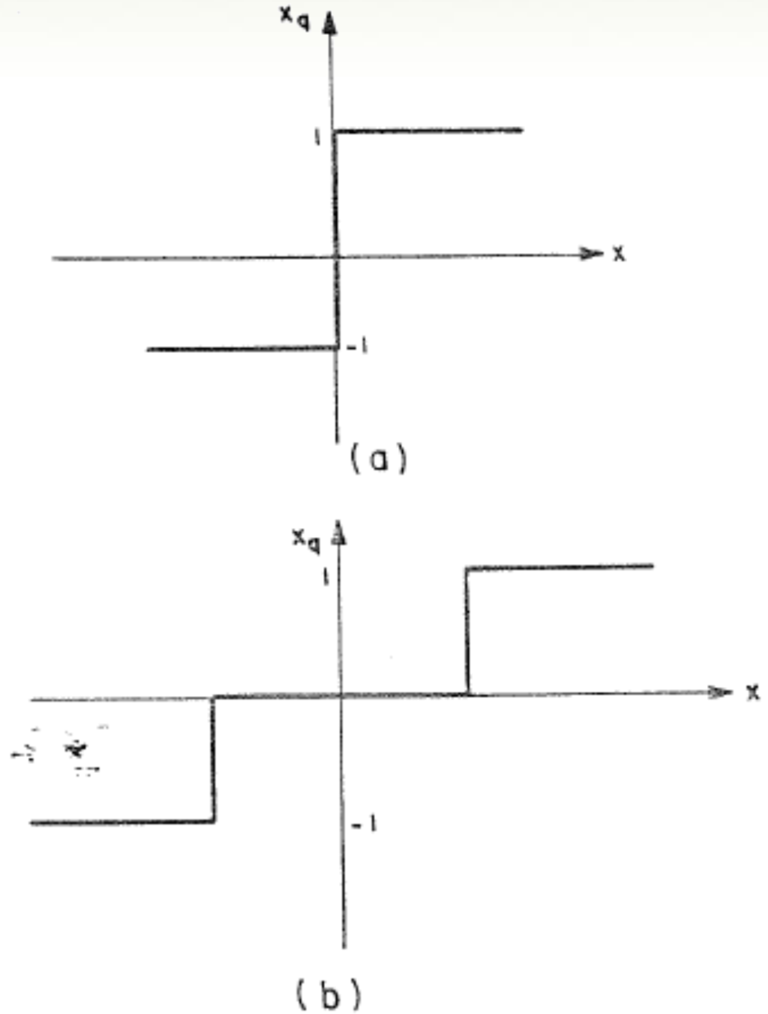


FIGURE 7. Rough quantizers (clippers). (a) One bit quantizer (N = 2). (b) Ternary quantizer (N = 3).

فهرست مطالب

- معرفی مفاهیم پردازش سیگنال دیجیتال
- نمونه‌برداری
- کوانتیزه کردن
- تبدیل Z

تبدیل Z یک‌طرفه (one-sided Z transform)

با فرض $x(t) = 0 \quad for \quad t < 0$

$$x(nT) \xleftrightarrow{Z} X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)\, z^{-n}$$

$$z = e^{ST}$$

S : فرکانس مختلط (complex frequency)

T : دوره‌ی نمونه‌برداری (sampling interval)

Z : متغیر مختلط (complex variable)

ویژگی جابجایی تبدیل Z

$$x(nT) \xleftrightarrow{Z} X(z)$$

$$x\big((n-1)T\big) \xleftrightarrow{Z} z^{-1}\,X(z) - z^{-1}\,x(0)$$

$$x\big((n+m)T\big) \xleftrightarrow{Z} z^{m}\,X(z) - z^{m}\,x(0) - z^{m-1}\,x(T) - \cdots - z\,x\big((m-1)T\big)$$

تعیین وارون تبدیل Z

روش‌های مختلفی برای تعیین وارون تبدیل Z یک عبارت وجود دارد:

۱- بازنویسی عبارت $X(z)$ به صورت یک چند جمله‌ای بر حسب z و ...

$$x(nT) \xleftrightarrow{z} X(z) = x(0) + x(T)z^{-1} + x(2T)z^{-2} + \cdots + x(nT)z^{-n} + \cdots$$

۲- روش تقسیم

۳- استفاده از رابطه‌ی انتگرال مختلط مبتنی بر قضیه‌ی مانده (**residue theorem**)

سیستم‌های توصیف شده با معادله دیفرنس خطی با ضرایب ثابت

سیستم **خطی تغییر ناپذیر با زمان (LTI)** با ورودی $x(t)$ و خروجی $y(t)$ را در نظر بگیرید:

$$y(kT)+a_1y\big((k-1)T\big)+a_2y\big((k-2)T\big)+\cdots+a_py\big((k-p)T\big)=$$
$$b_0y(kT)+b_1y\big((k-1)T\big)+\cdots+\ b_qu\big((k-q)T\big)$$

با **فرض صفر بودن تمام شرایط اولیه**، از رابطه‌ی فوق تبدیل Z می‌گیریم:

$$\left(1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}+\cdots+a_pz^{-p}\right)Y(z)=\left(1+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}+\cdots+b_qz^{-q}\right)U(z)$$

بنابراین:

تابع انتقال : $H(z)=\dfrac{Y(z)}{U(z)}=\dfrac{\left(1+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}+\cdots+b_qz^{-q}\right)}{1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}+\cdots+a_pz^{-p}}$

فهرست مطالب

- معرفی مفاهیم پردازش سیگنال دیجیتال
- نمونه‌برداری
- کوانتیزه کردن
- تبدیل Z

همت بلند دار که مردان روزگار

از همت بلند به جایی رسیده اند