

هر که گوید جمله حق است احمق است

آن که گوید جمله باطل، اوستی است

مولانا

سیستم‌های فازی

2

Presented By: A. Maleki

Fall 2021

دستور کار این جلسه:

مجموعه های فازی و توابع عضویت

مقدمه 

یادآوری مجموعه های کلاسیک، عمل ها و ویژگی های آنها

معرفی مجموعه های فازی

عمل های مجموعه های فازی

ویژگی های مجموعه های فازی

معرفی اصطلاحات تابع عضویت

طبقه بندی مجموعه های فازی

مقدمه:

- مجموعه‌های کلاسیک یا تُرد دارای مرزهای مشخص هستند مثل:
مجموعه اعداد طبیعی یک رقمی زوج
- در حالی که مرز مجموعه‌های فازی دارای ابهام است مثل مجموعه
افراد جوان قدبلند

مثال:

مجموعه‌های زیر در عالم بحث یا مجموعه مرجع دمای ۳۵ تا ۴۵ درجه تعریف شده‌اند. در مورد فازی یا تُرد (کلاسیک) بودن مجموعه‌ها نظر دهید.

○ الف: محدوده‌ی دمایی ۳۷ تا ۴۰ درجه یا به عبارت دیگر [۳۷ ۴۰]

○ ب: دمای تب شدید بدن

دقت کنید که در این مثال،
مجموعه‌ی مرجع ماهیت پیوسته
دارد و محدود است.



دستور کار این جلسه:

مجموعه های فازی و توابع عضویت

مقدمه

یادآوری مجموعه های کلاسیک، عمل ها و ویژگی های آنها 

معرفی مجموعه های فازی

عمل های مجموعه های فازی

ویژگی های مجموعه های فازی

معرفی اصطلاحات تابع عضویت

طبقه بندی مجموعه های فازی

یادآوری مجموعه‌های کلاسیک:

- فرض کنید X نشانگر مجموعه‌ی مرجع و x نشانگر اعضای آن باشد،
- با مفاهیم مجموعه، زیرمجموعه، مجموعه‌ی تهی و مجموعه‌ی کامل آشنایی دارید.
 - تعداد اعضای مجموعه‌ی مرجع، «عدد اصلی» یا «عدد کاردینال» مجموعه نامیده می‌شود.
 - «مجموعه‌ی توان» به مجموعه‌ای شامل تمام زیرمجموعه‌های ممکن در مجموعه‌ی مرجع اطلاق می‌گردد و با $P(X)$ مشخص می‌شود.

واژه‌نامه

universe of discourse

عالم بحث یا مجموعه‌ی مرجع

cardinal number

عدد اصلی یا عدد کاردینال

null set

مجموعه تهی

whole set

مجموعه کامل

power set

مجموعه توان

مثال:

برای مجموعه‌ی مرجع $X=\{1,2,3,4\}$ ، عدد کاردینال، مجموعه‌ی توان و

عدد کاردینال مجموعه‌ی توان را به دست آورید.

$$\eta_X = 4$$

$$P(X) = \{ \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1,2\},$$

$$\{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\},$$

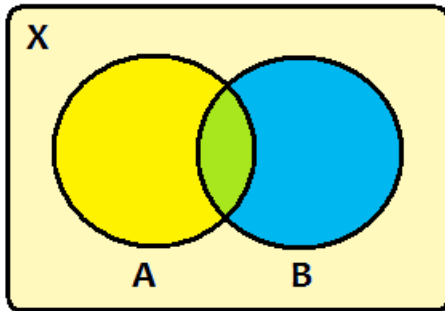
$$\{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,3,4\}, \{2,3,4\},$$

$$\{1,2,3,4\} \}$$

$$\eta_{P(X)} = 2^{\eta_X} = 2^4 = 16$$



یادآوری عمل‌های مجموعه‌های کلاسیک:



دو مجموعه‌ی A و B را در مجموعه‌ی مرجع X
در نظر بگیرید.

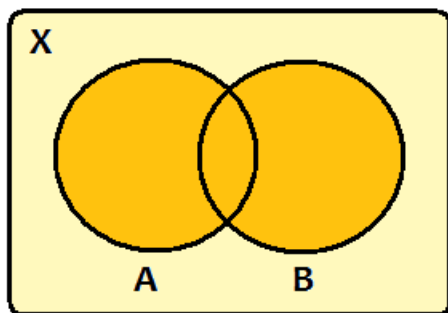
اجتماع (union)

اشتراک (intersection)

مکمل (complement)

تفاضل (difference)

یادآوری عمل‌های مجموعه‌های کلاسیک:



$$A \cup B = \{x / x \in A \text{ or } x \in B\}$$

اجتماع (union)

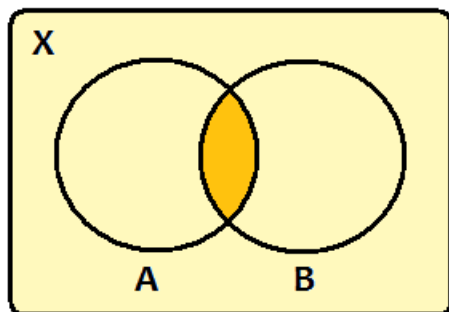
اشتراک (intersection)

مکمل (complement)

تفاضل (difference)

اجتماع دو مجموعه‌ی A و B که با نماد $A \cup B$ نشان داده می‌شود شامل اعضای از مجموعه‌ی مرجع است که در A یا B وجود دارند.

یادآوری عمل‌های مجموعه‌های کلاسیک:



$$A \cap B = \{x/x \in A \text{ and } x \in B\}$$

اجتماع (union)

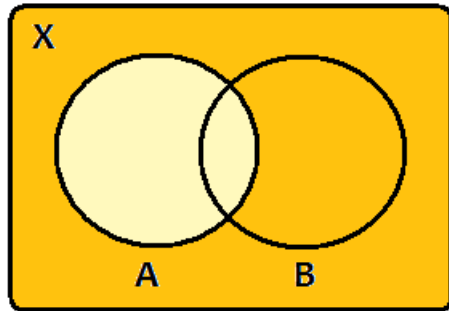
اشتراک (intersection)

مکمل (complement)

تفاضل (difference)

اشتراک دو مجموعه‌ی A و B که با نماد $A \cap B$ نشان داده می‌شود شامل اعضای از مجموعه‌ی مرجع است که در A و B وجود دارند.

یادآوری عمل‌های مجموعه‌های کلاسیک:



$$\bar{A} = \{x/x \notin A, x \in X\}$$

اجتماع (union)

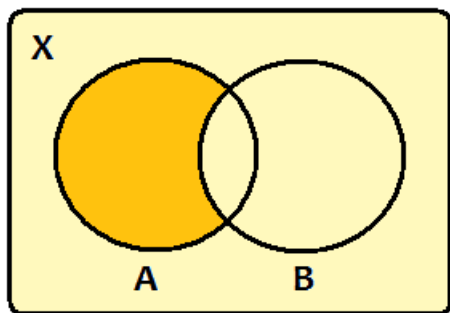
اشتراک (intersection)

مکمل (complement)

تفاضل (difference)

مکمل مجموعه‌ی A که با نماد \bar{A} نشان داده می‌شود شامل اعضای از مجموعه‌ی مرجع است که در A وجود ندارند.

یادآوری عمل‌های مجموعه‌های کلاسیک:



$$A \setminus B = \{x / x \in A \text{ and } x \notin B\}$$

اجتماع (union)

اشتراک (intersection)

مکمل (complement)

تفاضل (difference)

تفاضل مجموعه‌ی B از A که با نماد $A \setminus B$ نشان داده می‌شود شامل اعضای از مجموعه‌ی مرجع است که در A وجود دارند ولی در B وجود ندارند.

یادآوری ویژگی‌های مجموعه‌های کلاسیک:

- **Commutativity**

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A$$

- **Associative**

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

- **Distributivity**

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

- **Idempotency**

$$A \cup A = A \quad A \cap A = A$$

- **Identity**

$$A \cup \phi = A \quad A \cup X = X$$

$$A \cap \phi = \phi \quad A \cap X = A$$

- **Transitivity**

If $A \subseteq B \subseteq C$, then $A \subseteq C$

- **Involution**

$$\overline{\overline{A}} = A$$

- **Excluded Middle Law**

$$A \cup \overline{A} = X$$

- **Contradiction Law**

$$A \cap \overline{A} = \phi$$

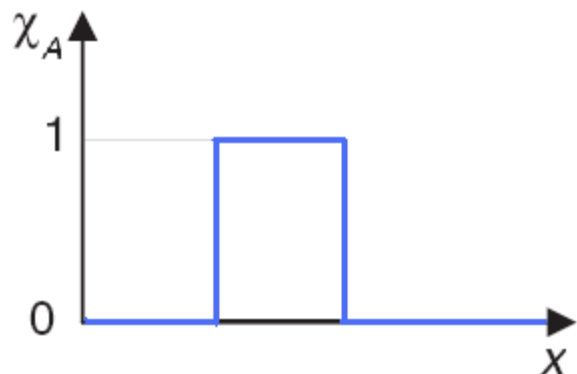
- **DeMorgan's Law**

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

تعبیر مجموعه کلاسیک به عنوان تابع مشخصه:

مجموعه کلاسیک A را در نظر بگیرید. «تابع مشخصه»ی متناظر با این مجموعه به صورت زیر است:



$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

از این دیدگاه عمل‌ها به صورت زیر قابل بازنویسی است.

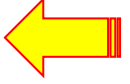
- **Union** $A \cup B \rightarrow \chi_{A \cup B}(x) = \max(\chi_A(x), \chi_B(x))$
- **Intersection** $A \cap B \rightarrow \chi_{A \cap B}(x) = \min(\chi_A(x), \chi_B(x))$
- **Complement** $\bar{A} \rightarrow \chi_{\bar{A}}(x) = 1 - \chi_A(x)$
- **Containment** $A \subseteq B \rightarrow \chi_A(x) \leq \chi_B(x)$

دستور کار این جلسه:

مجموعه های فازی و توابع عضویت

مقدمه

یادآوری مجموعه های کلاسیک، عمل ها و ویژگی های آنها

معرفی مجموعه های فازی 

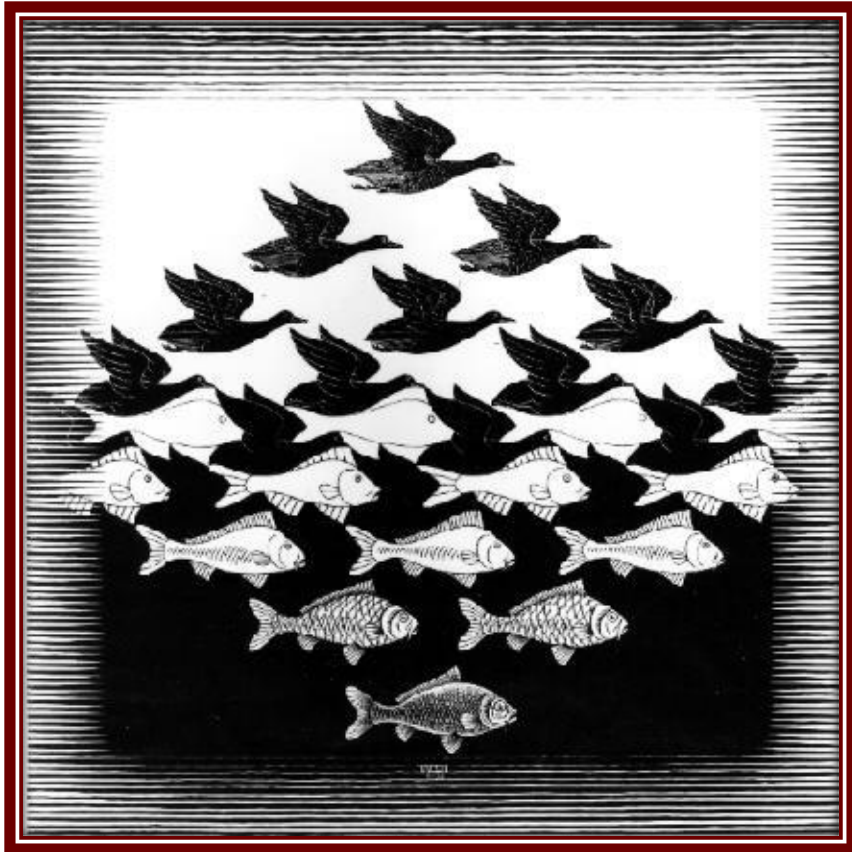
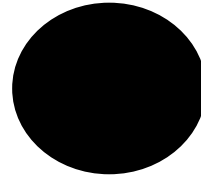
عمل های مجموعه های فازی

ویژگی های مجموعه های فازی

معرفی اصطلاحات تابع عضویت

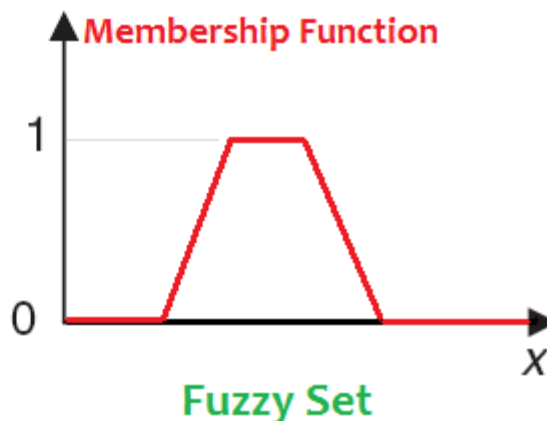
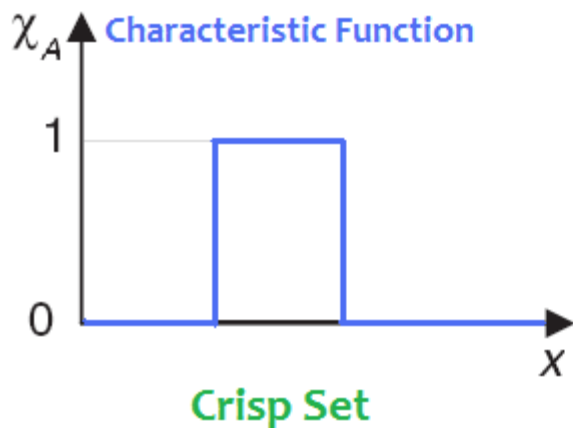
طبقه بندی مجموعه های فازی

معرفی مجموعه‌ی فازی:



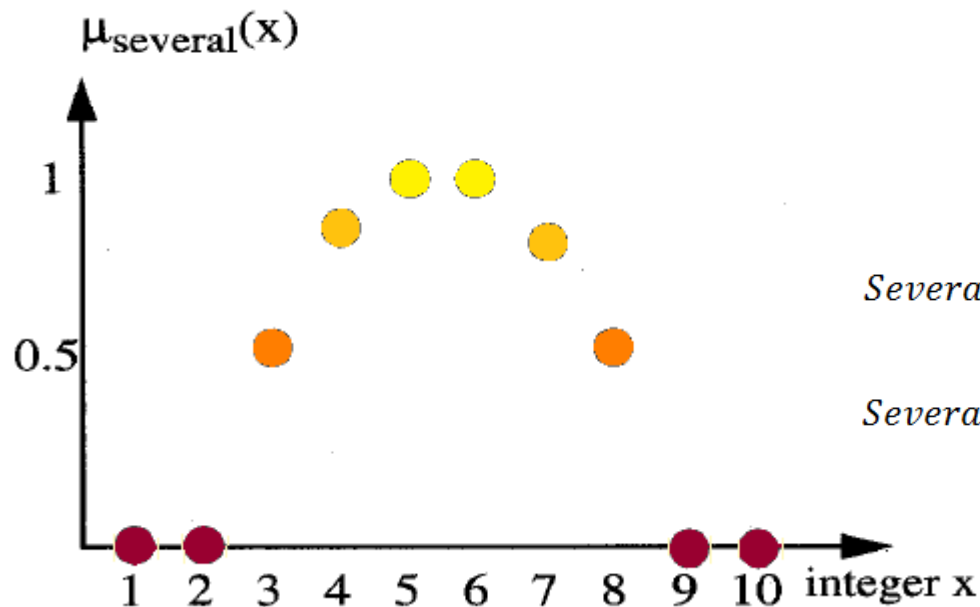
معرفی مجموعه‌ی فازی:

در مجموعه‌های کلاسیک، «تابع مشخصه» تنها دارای مقادیر صفر و یک است در حالی که برای مجموعه‌های فازی، «تابع عضویت» می‌تواند هر مقداری در فاصله‌ی صفر تا یک داشته باشد.



مثال ۱:

تابع عضویت برای مجموعه فازی «چندین» در مجموعه اعداد طبیعی در محدوده ی $[0, 10]$.

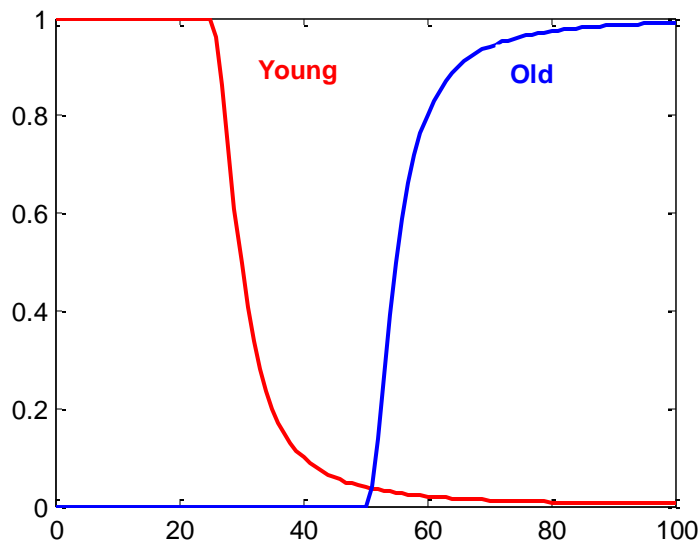


$$\text{Several} = \left\{ \frac{0.5}{3} \cdot \frac{0.8}{4} \cdot \frac{1.0}{5} \cdot \frac{1.0}{6} \cdot \frac{0.8}{7} \cdot \frac{0.5}{8} \right\}$$

$$\text{Several} = \frac{0.5}{3} + \frac{0.8}{4} + \frac{1.0}{5} + \frac{1.0}{6} + \frac{0.8}{7} + \frac{0.5}{8}$$

مثال ۲:

مجموعه ی مرجع X در محدوده ی $[0, 100]$ که نشانگر سن افراد عادی است را در نظر بگیرید. مجموعه های فازی جوان و پیر در آن به صورت زیر تعریف شده است.

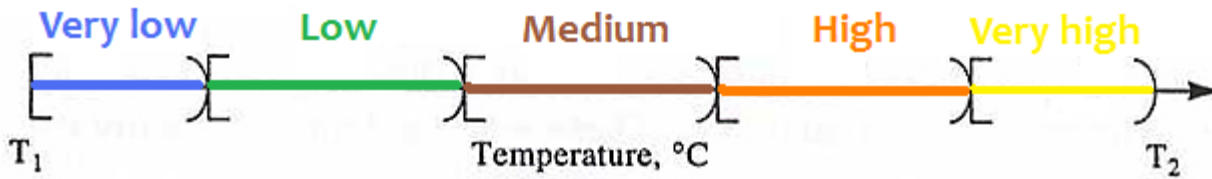


$$Young = \int_0^{25} \frac{1}{x} + \int_{25}^{100} \frac{\left[1 + \left(\frac{x-25}{5}\right)^2\right]^{-1}}{x}$$

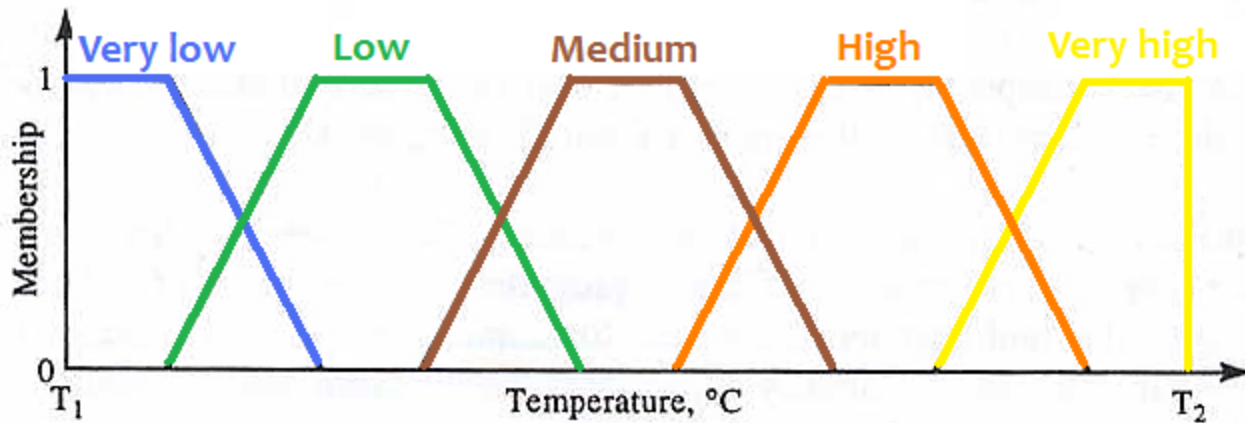
$$Old = \int_{50}^{100} \frac{\left[1 + \left(\frac{x-50}{5}\right)^{-2}\right]^{-1}}{x}$$

مثال ۳:

○ مجموعه‌های ترد:



○ مجموعه‌های فازی:



دستور کار این جلسه:

مجموعه های فازی و توابع عضویت

مقدمه

یادآوری مجموعه های کلاسیک، عمل ها و ویژگی های آنها

معرفی مجموعه های فازی

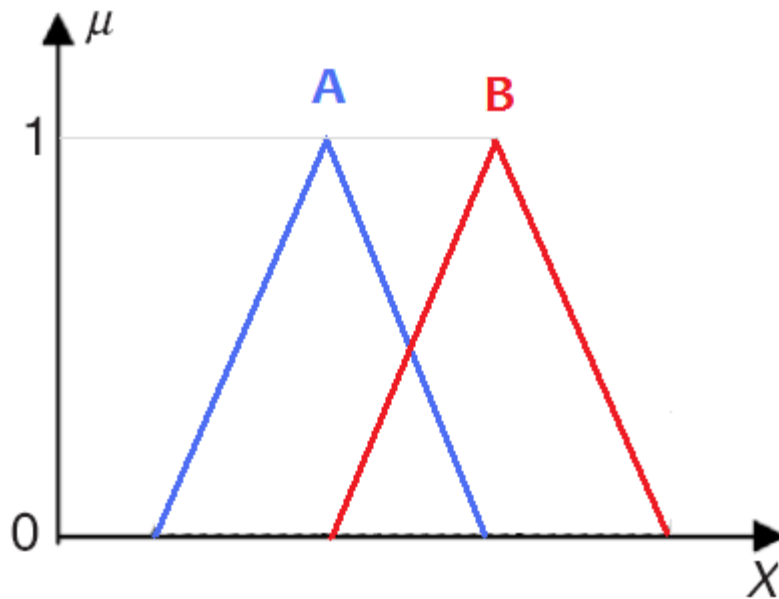
عمل های مجموعه های فازی 

ویژگی های مجموعه های فازی

معرفی اصطلاحات تابع عضویت

طبقه بندی مجموعه های فازی

عمل‌های مجموعه‌های فازی:



اجتماع (union)

اشتراک (intersection)

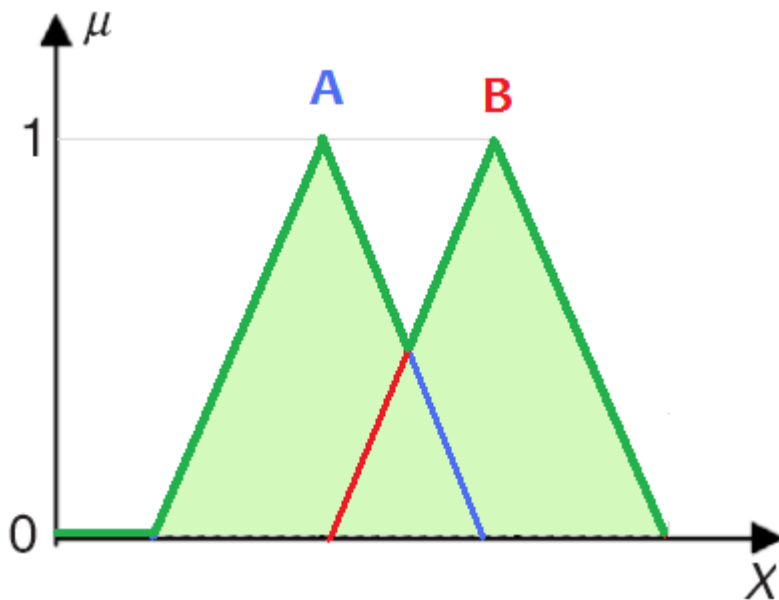
مکمل (complement)

عمل‌های مجموعه‌های فازی:

اجتماع (union)

اشتراک (intersection)

مکمل (complement)



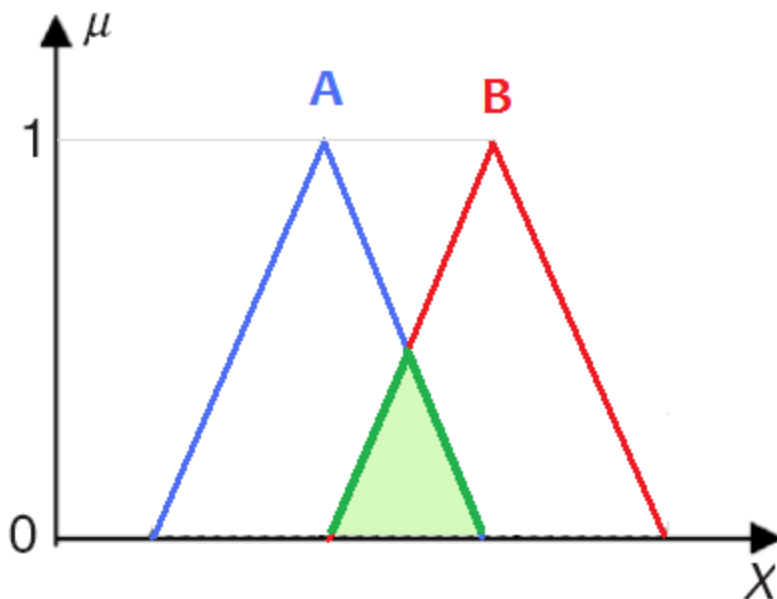
$$A \cup B \rightarrow \mu_{A \cup B}(x) = \max(\mu_A(x), \mu_B(x))$$

عمل‌های مجموعه‌های فازی:

اجتماع (union)

اشتراک (intersection)

مکمل (complement)



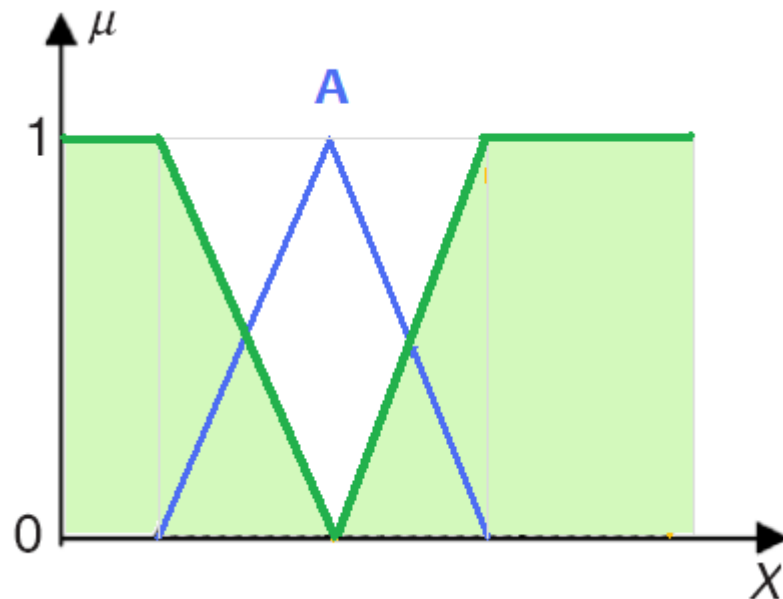
$$A \cap B \rightarrow \mu_{A \cap B}(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x))$$

عمل‌های مجموعه‌های فازی:

اجتماع (union)

اشتراک (intersection)

مکمل (complement)



$$\bar{A} \rightarrow \mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)$$

دستور کار این جلسه:

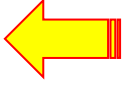
مجموعه های فازی و توابع عضویت

مقدمه

یادآوری مجموعه های کلاسیک، عمل ها و ویژگی های آنها

معرفی مجموعه های فازی

عمل های مجموعه های فازی

ویژگی های مجموعه های فازی 

معرفی اصطلاحات تابع عضویت

طبقه بندی مجموعه های فازی

ویژگی‌های مجموعه‌های فازی:

○ **Commutativity**

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A$$

○ **Associative**

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

○ **Distributivity**

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

○ **Idempotency**

$$A \cup A = A \quad A \cap A = A$$

○ **Identity**

$$A \cup \phi = A \quad A \cup X = X$$

$$A \cap \phi = \phi \quad A \cap X = A$$

○ **Transitivity**

If $A \subseteq B \subseteq C$, then $A \subseteq C$

○ **Involution**

$$\overline{\overline{A}} = A$$

~~○ **Excluded Middle Law**~~

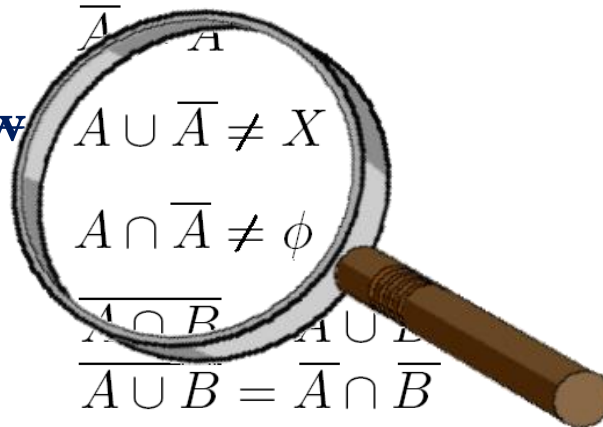
$$A \cup \overline{A} \neq X$$

~~○ **Contradiction Law**~~

$$A \cap \overline{A} \neq \phi$$

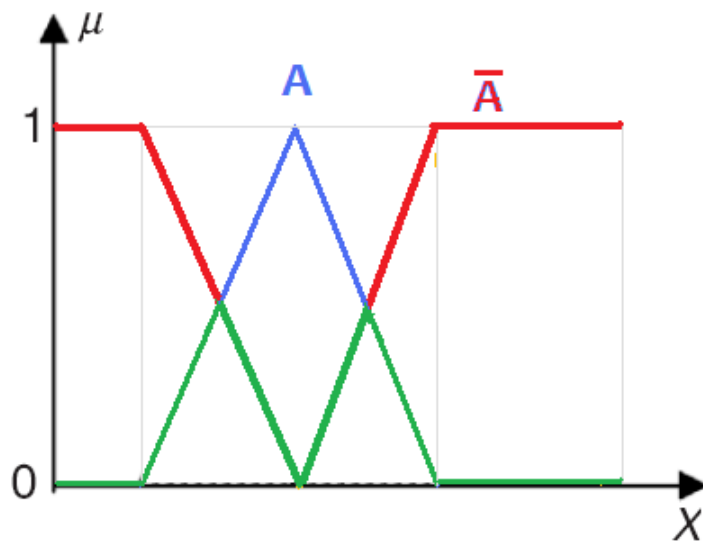
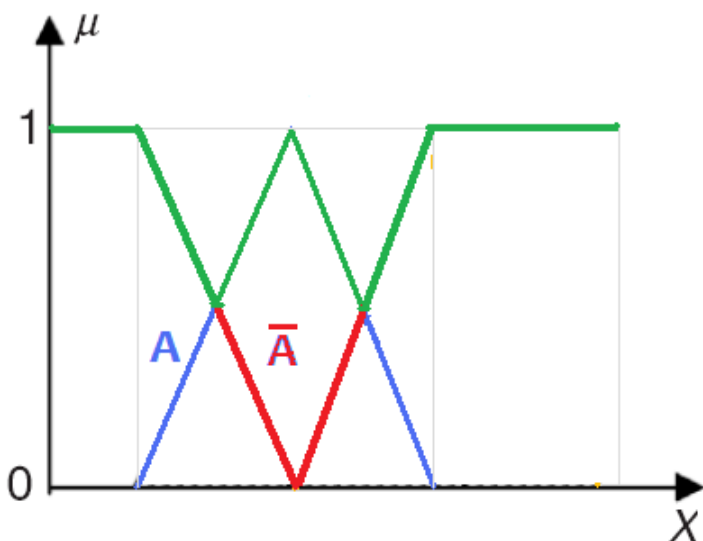
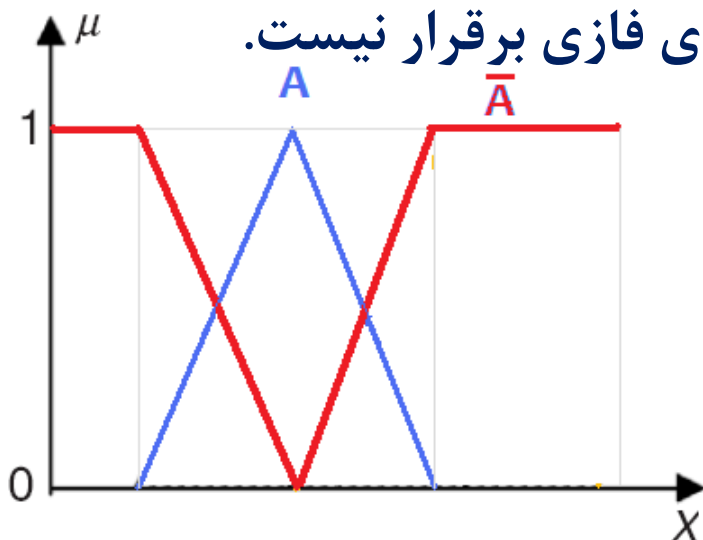
○ **DeMorgan's Law**

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$
$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$



مثال ۱:

مجموعه‌ی فازی با تابع عضویت زیر را در نظر بگیرید. با تعیین $A \cup \bar{A}$ و $A \cap \bar{A}$ نشان دهید ویژگی‌های **excluded middle law** و **contradiction law** برای این مجموعه‌ی فازی برقرار نیست.



مثال ۲:

فرض کنید X مجموعه ی مرجع هواپیماهای تجاری باشد. اگر A مجموعه ی فازی هواپیماهای مسافری و B مجموعه ی فازی هواپیماهای باری باشد؛ اشتراک، اجتماع و مکمل آنها را به دست آورید.

$$X = \{A10, B52, B117, C5, C130, F4, F14, F15, F16, F111, KC130\}$$

$$A = \left\{ \frac{0.4}{A10}, \frac{1.0}{B52}, \frac{1.0}{B117}, \frac{0.5}{F4}, \frac{0.6}{F14}, \frac{0.3}{F16}, \frac{0.7}{F111} \right\}$$

$$B = \left\{ \frac{0.4}{B117}, \frac{0.6}{F4}, \frac{0.9}{F14}, \frac{0.8}{F15}, \frac{1.0}{F16}, \frac{0.4}{F111} \right\}$$

$$A \cap B = \left\{ \frac{0.4}{B117}, \frac{0.5}{F4}, \frac{0.6}{F14}, \frac{0.3}{F16}, \frac{0.4}{F111} \right\}$$

$$A \cup B = \left\{ \frac{0.4}{A10}, \frac{1.0}{B52}, \frac{1.0}{B117}, \frac{0.6}{F4}, \frac{0.9}{F14}, \frac{0.8}{F15}, \frac{1.0}{F16}, \frac{0.7}{F111} \right\}$$

$$\bar{A} = \left\{ \frac{0.6}{A10}, \frac{1.0}{C5}, \frac{1.0}{C130}, \frac{0.5}{F4}, \frac{0.4}{F14}, \frac{1.0}{F15}, \frac{0.7}{F16}, \frac{0.3}{F111}, \frac{1.0}{KC130} \right\}$$

$$\bar{B} = \left\{ \frac{1.0}{A10}, \frac{1.0}{B52}, \frac{0.6}{B117}, \frac{1.0}{C5}, \frac{1.0}{C130}, \frac{0.4}{F4}, \frac{0.1}{F14}, \frac{0.2}{F15}, \frac{0.6}{F16}, \frac{1.0}{F111}, \frac{1.0}{KC130} \right\}$$

دستور کار این جلسه:

مجموعه های فازی و توابع عضویت

مقدمه

یادآوری مجموعه های کلاسیک، عمل ها و ویژگی های آنها

معرفی مجموعه های فازی

عمل های مجموعه های فازی

ویژگی های مجموعه های فازی

معرفی اصطلاحات تابع عضویت 

طبقه بندی مجموعه های فازی

تابع عضویت:

- تابع عضویت هر مجموعه نشانگر نگاشتی از هر یک از اعضای مجموعه به مقدار تعلق (عضویتی) بین صفر و یک است و به طور یکتا مجموعه را توصیف می کند.

معرفی اصطلاحات مربوط به تابع عضویت:

- تکیه‌گاه (support)
- هسته (core)
- مرز (boundary)
- نقطه‌ی گذر (crossover point)
- ارتفاع (height)
- مرکز (center)
- برش آلفا (α -cut)

تکیه‌گاه (support) :

○ مجموعه‌ای غیرفازی شامل تمام اعضایی که مقدار عضویت آنها بیشتر از

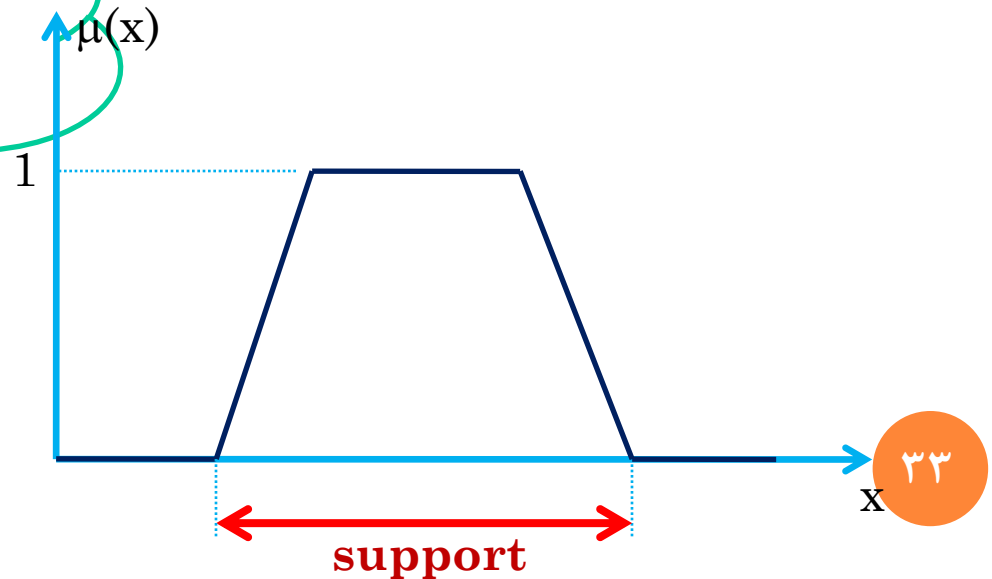
صفر است.

A : fuzzy set

U : universe of discourse

$$\text{support}(A) = \{ x \in U \mid \mu_A(x) > 0 \}$$

اگر تکیه‌گاه یک مجموعه‌ی فازی
تنها شامل یک نقطه باشد آن را
fuzzy singleton گویند.



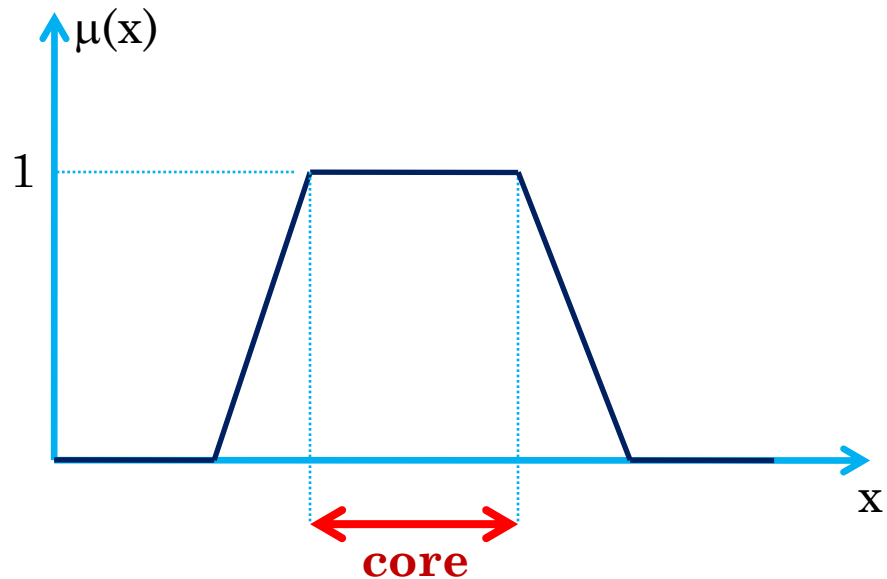
هسته (core) :

- مجموعه‌ای غیرفازی شامل تمام اعضایی که مقدار عضویت آنها کامل (یک) است.

A : fuzzy set

U : universe of discourse

$$\text{core}(A) = \{ x \in U \mid \mu_A(x) = 1 \}$$



مرز (boundary) :

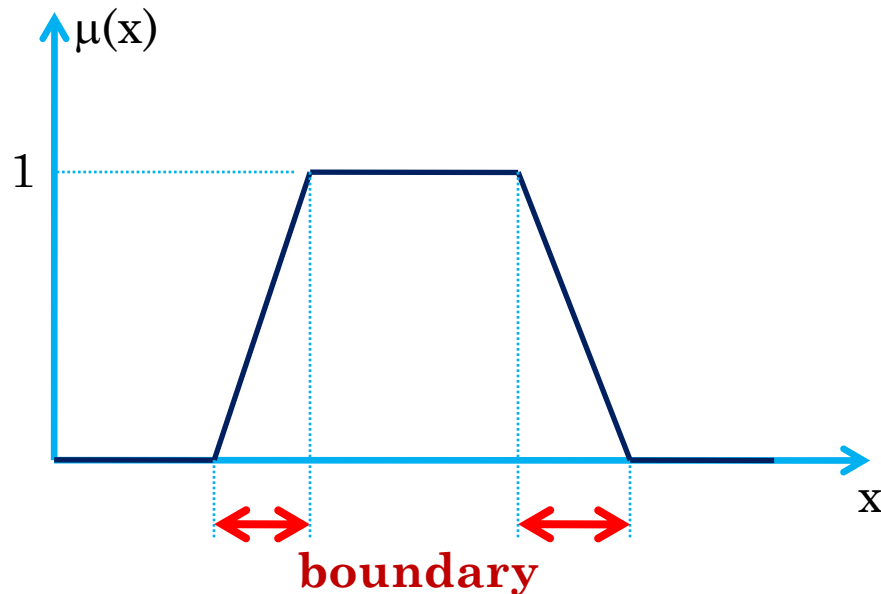
○ مجموعه‌ای غیرفازی شامل تمام اعضایی که مقدار عضویت آنها بیشتر از

صفر و غیرکامل است.

A : fuzzy set

U : universe of discourse

$$\text{boundary}(A) = \{ x \in U \mid 0 < \mu_A(x) < 1 \}$$



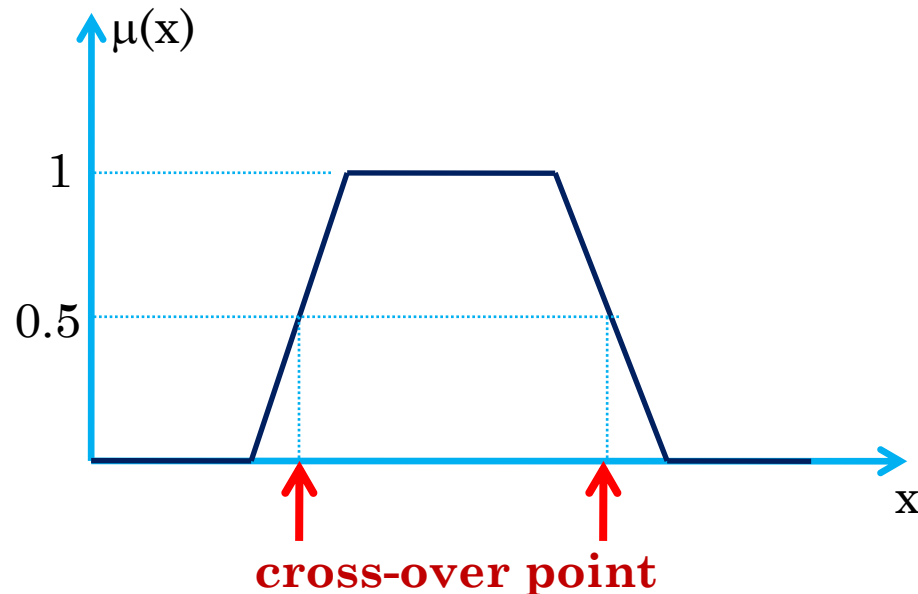
نقطه‌ی گذر (cross-over point) :

○ اعضای از مجموعه که مقدار عضویت آنها برابر ۰/۵ است.

A : fuzzy set

U : universe of discourse

x_{co} is a crossover point if $\mu_A(x) = 0.5$



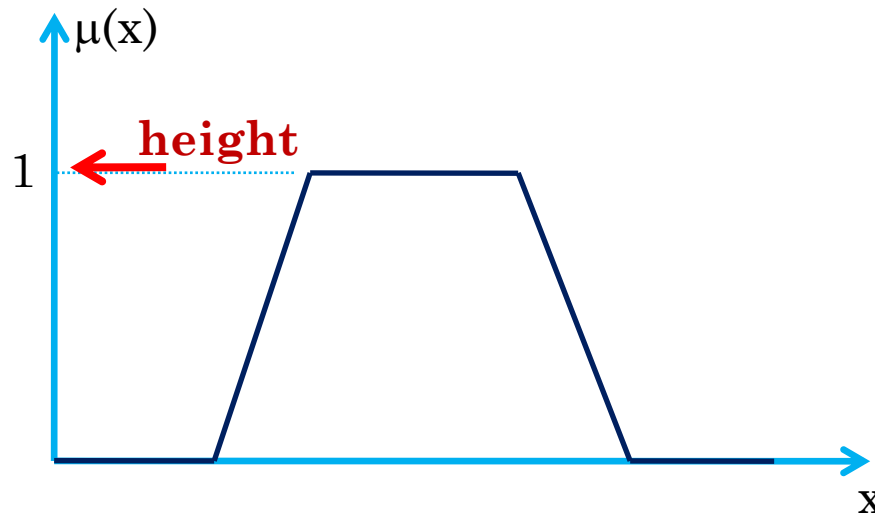
ارتفاع (height) :

○ بیشینه‌ی مقادیر عضویت، ارتفاع مجموعه‌ی فازی را مشخص می‌کند.

A : fuzzy set

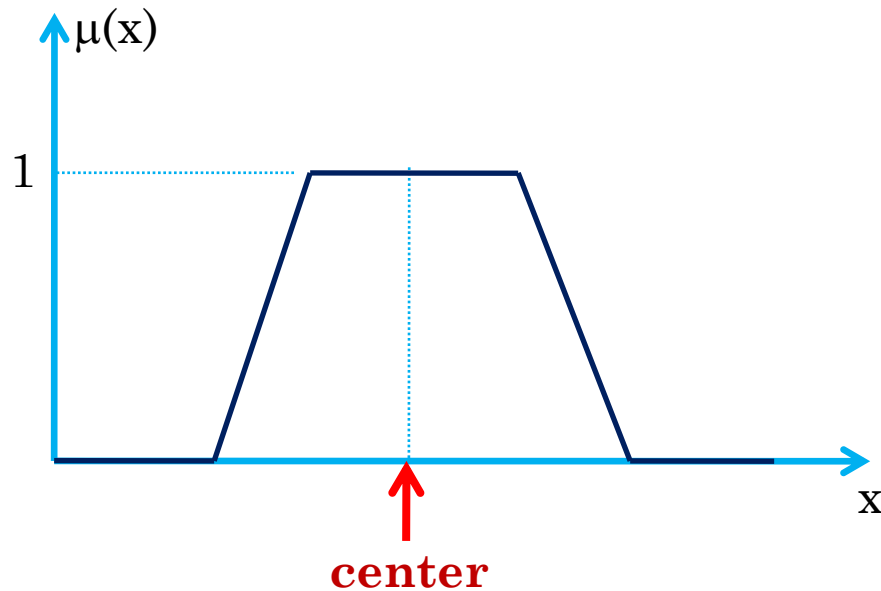
U : universe of discourse

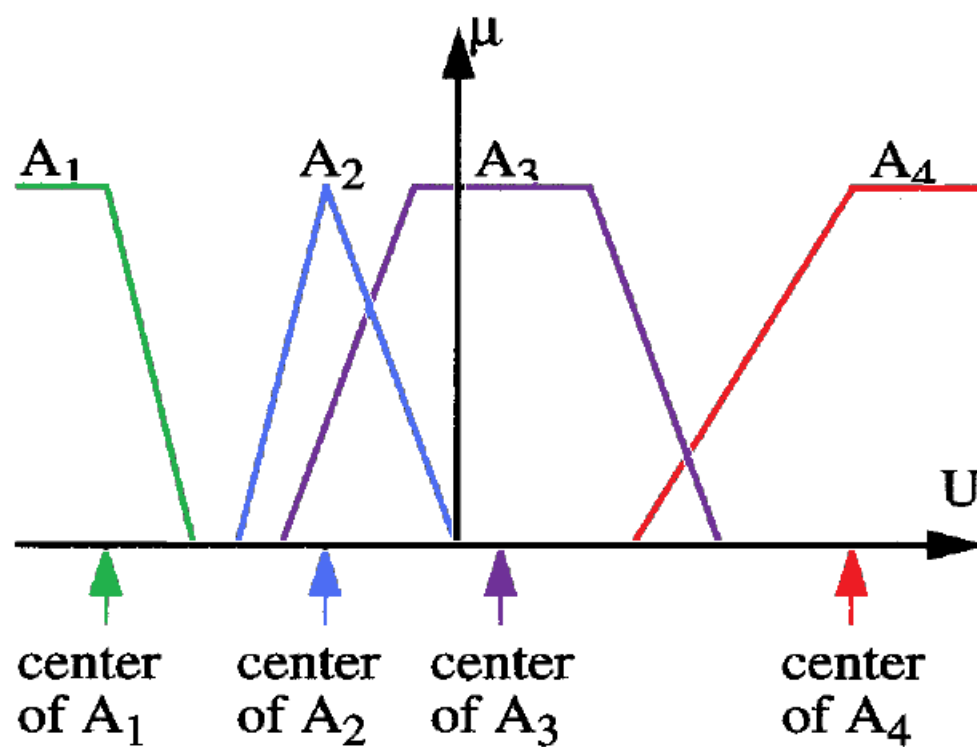
$$H = \sup \mu_A(x)$$



مرکز (center) :

- وسط محدوده‌ای که تابع عضویت ماکزیمم مقدار خودش را دارد. اگر این محدوده از یک سو به بی نهایت میل کند مرز محدود آن به عنوان مرکز در نظر گرفته می شود.





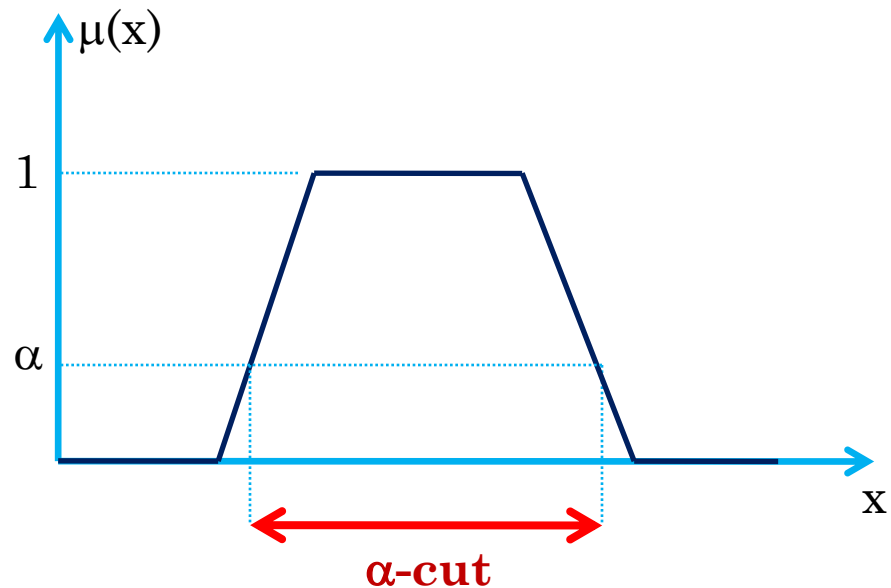
برش آلفا (α -cut) :

- مجموعه‌ای غیرفازی شامل تمام اعضای از مجموعه‌ی مرجع که مقدار عضویت آنها بزرگتر یا مساوی آلفا است.

A : fuzzy set

U : universe of discourse

$$A_\alpha = \{ x \in U \mid \mu_A(x) \geq \alpha \}$$



دستور کار این جلسه:

مجموعه های فازی و توابع عضویت

مقدمه

یادآوری مجموعه های کلاسیک، عمل ها و ویژگی های آنها

معرفی مجموعه های فازی

عمل های مجموعه های فازی

ویژگی های مجموعه های فازی

معرفی اصطلاحات تابع عضویت

طبقه بندی مجموعه های فازی

طبقه‌بندی مجموعه‌های فازی:

- مجموعه‌ی فازی نرمال و مجموعه‌ی فازی زیرنرمال
- مجموعه‌ی فازی محدب و مجموعه‌ی فازی غیرمحدب
- مجموعه‌ی فازی تهی و مجموعه‌ی فازی کامل
- تساوی و زیرمجموعه‌ی فازی

واژه‌نامه

normal fuzzy set

مجموعه‌ی فازی نرمال

subnormal fuzzy set

مجموعه‌ی فازی زیرنرمال

convex fuzzy set

مجموعه‌ی فازی محدب

non-convex fuzzy set

مجموعه‌ی فازی غیرمحدب

null fuzzy set

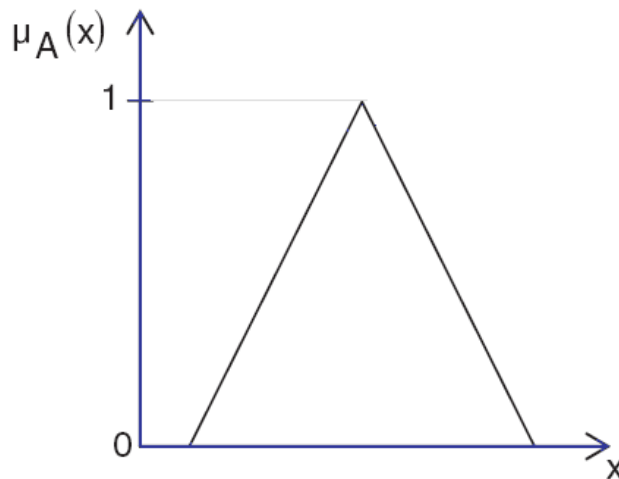
مجموعه‌ی فازی تهی

complete fuzzy set

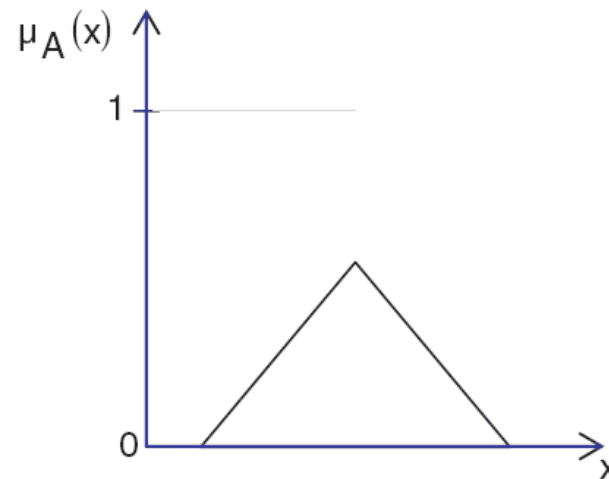
مجموعه‌ی فازی کامل

مجموعه‌ی فازی نرمال و مجموعه‌ی فازی زیرنرمال:

- اگر ارتفاع یک مجموعه‌ی فازی برابر یک باشد آن را مجموعه‌ی فازی نرمال و در غیر این صورت، آن را مجموعه فازی زیرنرمال گویند.



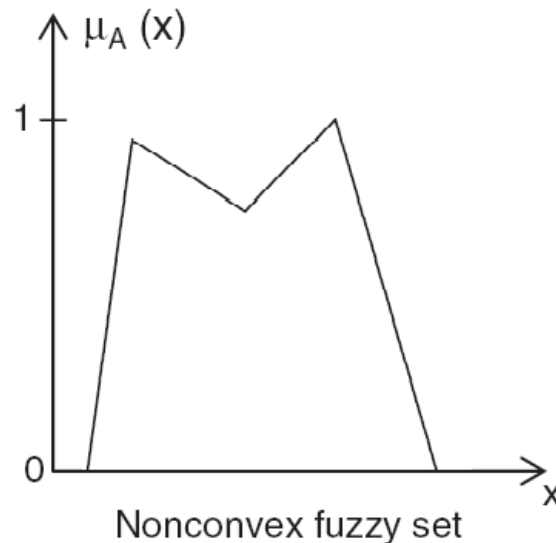
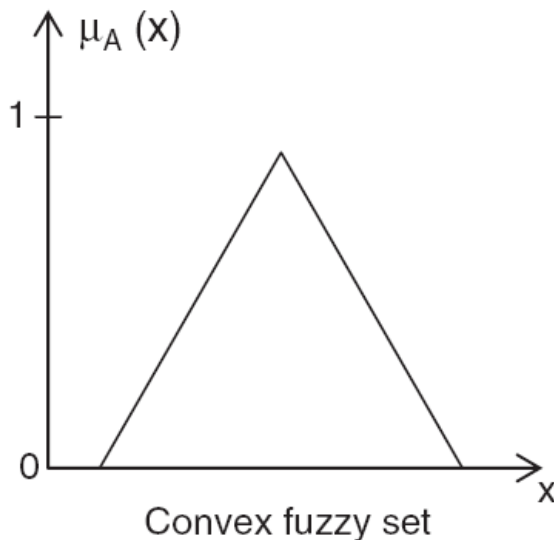
Normal fuzzy set



subnormal fuzzy set

مجموعه فازی محدب و مجموعه فازی غیر محدب:

- اگر تابع عضویت مجموعه‌ی فازی چنان باشد که با افزایش اعضای مجموعه‌ی مرجع، مقادیر عضویت دارای افزایش یکنوا، کاهش یکنوا یا افزایش و کاهش یکنوا باشند مجموعه‌ی فازی را محدب گویند. در غیر این صورت، مجموعه‌ی فازی غیر محدب است.



○ مجموعه‌ی فازی را محدب گوییم اگر و فقط اگر برش آلفای آن به ازای تمام مقادیر آلفای $(0,1]$ ، مجموعه‌ای محدب باشد.

○ مجموعه‌ی فازی A در فضای اقلیدسی n -بعدی R^n را محدب گوییم اگر و فقط اگر،

for all $x_1, x_2 \in R^n$ and all $\lambda \in [0, 1]$,

$$\mu_A[\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2] \geq \min[\mu_A(x_1), \mu_A(x_2)]$$

○ اشتراک دو مجموعه‌ی فازی محدب، یک مجموعه‌ی فازی محدب خواهد بود.

مجموعه‌ی فازی تهی:

- مجموعه‌ی فازی را تهی گوئیم اگر میزان تعلق تمام اعضای مجموعه‌ی مرجع به آن برابر صفر باشد یا به عبارت دیگر، تکیه‌گاه آن تهی باشد.

A : fuzzy set

U : universe of discourse

A is *empty fuzzy set* if $\mu_A(x) = 0$ for all $x \in U$
or if $\text{support}(A) = \emptyset$

مجموعه‌ی فازی کامل:

- مجموعه‌ی فازی را کامل گوییم اگر میزان تعلق تمام اعضای مجموعه‌ی مرجع به آن برابر یک باشد یا به عبارت دیگر، هسته‌ی آن برابر مجموعه‌ی مرجع باشد.

A: fuzzy set

U: universe of discourse

*A is **complete fuzzy set** if $\mu_A(x) = 1$ for all $x \in U$
or if $\text{core}(A) = U$*

تساوی و زیرمجموعه‌ی فازی:

A, B : fuzzy set

U : universe of discourse

$A \subset B$ if $\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$ for all $x \in U$

$A = B$ if $\mu_A(x) = \mu_B(x)$ for all $x \in U$

$A \subseteq B$ if $\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$ for all $x \in U$

مثال:

برای مجموعه‌ی فازی «چندین» با تابع عضویت داده شده، ویژگی‌های زیر را تعیین نمایید.

الف: تکیه‌گاه

ب: هسته

ج: مرز

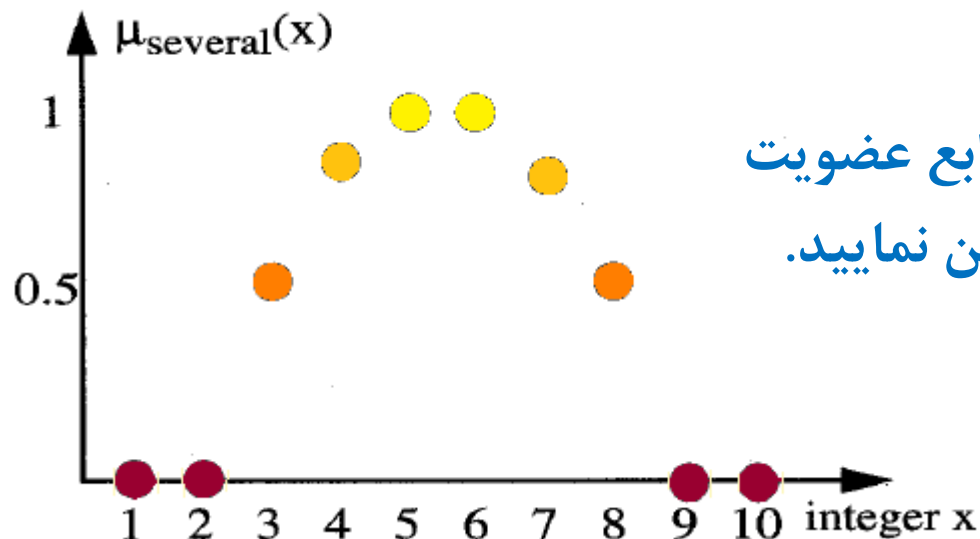
د: نقطه‌ی گذر

ه: ارتفاع

و: برش آلفا برای $\alpha = 0.75$

ز: نرمال یا زیرنرمال بودن

ح: محدب یا غیرمحدب بودن.



support = {3,4,5,6,7,8}

core = {5,6}

boundary = {3,4,7,8}

cross-over points = 3,8

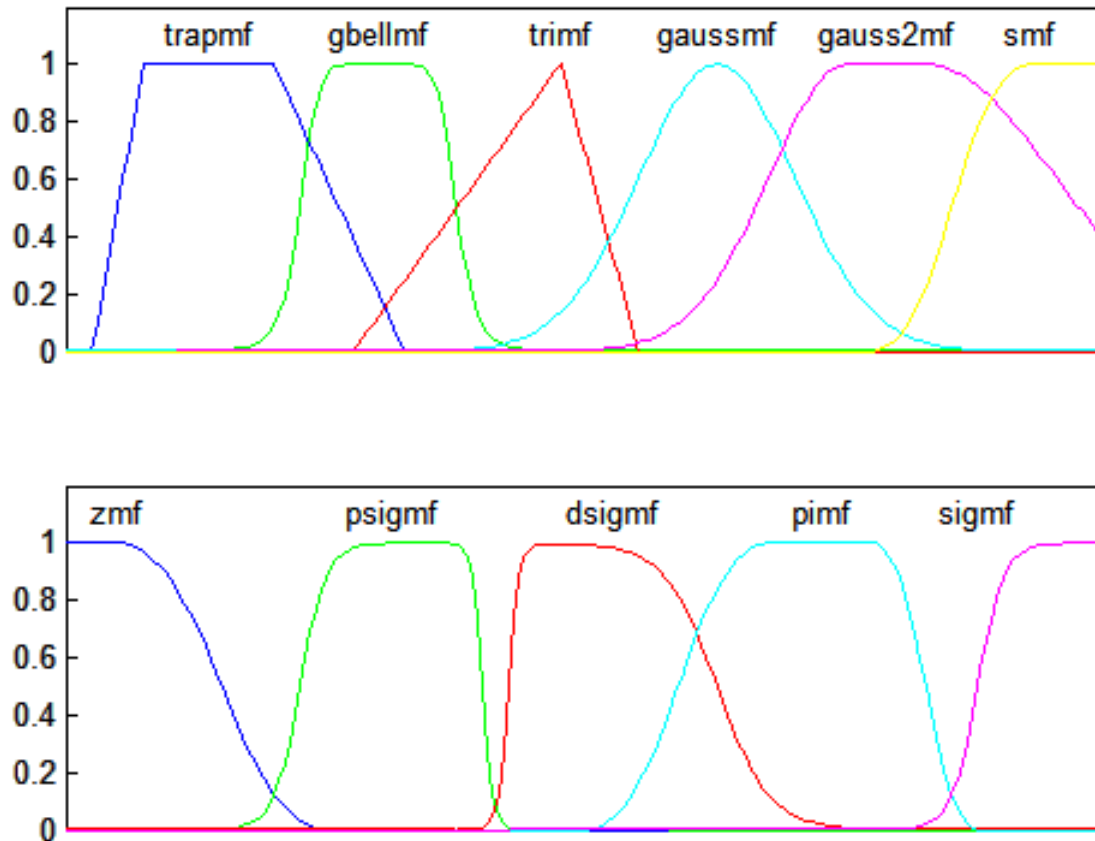
height = 1

α -cut = {4,5,6,7}, for $\alpha=0.75$

Normal

Convex

گالری توابع عضویت موجود در نرم افزار MATLAB



دستور کار این جلسه:

مجموعه های فازی و توابع عضویت

مقدمه

یادآوری مجموعه های کلاسیک، عمل ها و ویژگی های آنها

معرفی مجموعه های فازی

عمل های مجموعه های فازی

ویژگی های مجموعه های فازی

معرفی اصطلاحات تابع عضویت

طبقه بندی مجموعه های فازی

QUESTIONS?

