هرکه گوید جمله حق است احمقی است

آن که گوید جمله باطل، او شقی است

مولانا

سیستم‌های فازی

3

Presented By: A. Maleki

Fall 2021

دستورکار این جلسه:

عمل های مجموعه های فازی

- مقدمه
- مکمل فازی
- اجتماع فازی و s-norm
- اشتراک فازی و t-norm
- کلاس متناظر
- عمل‌های میانگین‌گیری
- جمع‌بندی

مقدمه:

- برای مجموعه‌های کلاسیک، تنها یک نوع عمل برای مکمل، اجتماع و اشتراک قابل انجام است.
- در مقابل، برای مجموعه‌های فازی، انواع مختلفی از عمل‌ها برای اجتماع، اشتراک و مکمل قابل طرح می‌باشد.

- در مبحث قبل، عمل‌های زیر برای مجموعه‌های فازی مطرح گردید:

$$\overline{A} \rightarrow \mu_{\overline{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)$$

$$A \cup B \rightarrow \mu_{A \cup B}(x) = \max(\mu_A(x), \mu_B(x))$$

$$A \cap B \rightarrow \mu_{A \cap B}(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x))$$

دستورکار این جلسه:

عمل های مجموعه های فازی

- ☑ مقدمه
- ☐ مکمل فازی
- ☐ اجتماع فازی و s-norm
- ☐ اشتراک فازی و t-norm
- ☐ کلاس متناظر
- ☐ عمل‌های میانگین‌گیری
- ☐ جمع‌بندی

مکمل فازی:

- برای اینکه c: [0,1] → [0,1] نگاشتی باشد که تابع عضویت مجموعه‌ی فازی A را به تابع عضویت مکمل A تبدیل کند یعنی

$$c[\mu_A(x)] = \mu_{\bar{A}}(x)$$

لازم است شرط‌های زیر برآورده گردد:

Axiom c1. $c(0) = 1$ and $c(1) = 0$ (boundary condition).

Axiom c2. For all $a, b \in [0,1]$, if $a < b$, then $c(a) \geq c(b)$ (nonincreasing condition)

کلاس Sugeno برای مکمل فازی:

$$c_\lambda(a) = \frac{1-a}{1+\lambda a} \quad , \quad \lambda \in (-1, \infty)$$

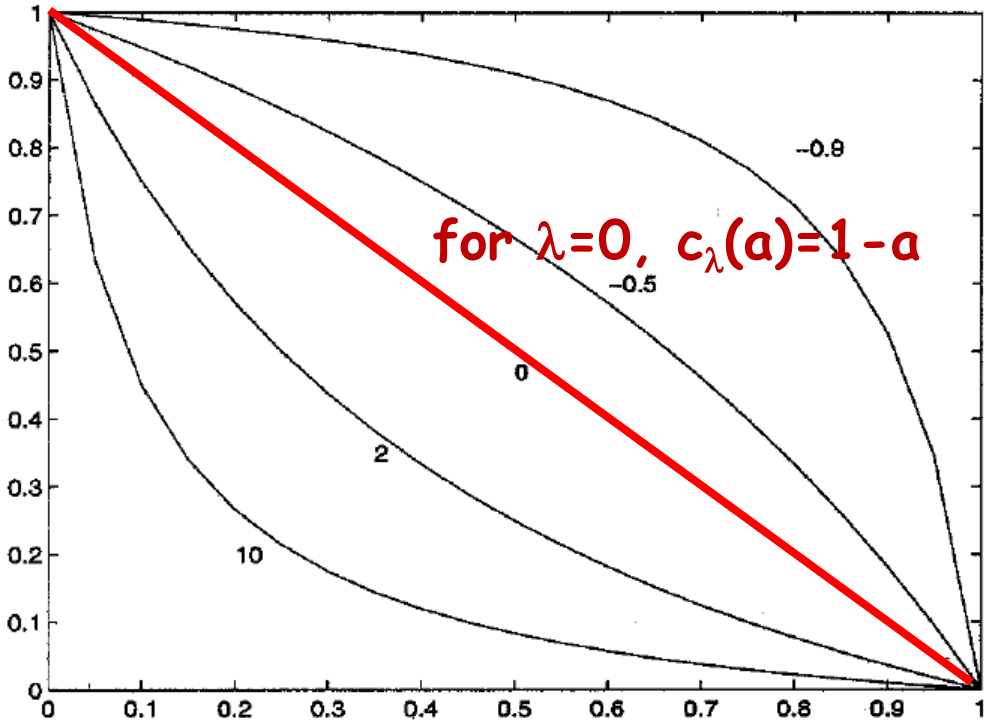


Figure 3.1. Sugeno class of fuzzy complements $c_\lambda(a)$ for different values of λ.

به ازای چه مقدار از λ ، مکمل فازی این کلاس به **مکمل فازی پایه** تبدیل می‌گردد؟

کلاس Yager برای مکمل فازی:

$$c_w(a) = (1 - a^w)^{1/w} \quad , \quad w \in (0, \infty)$$

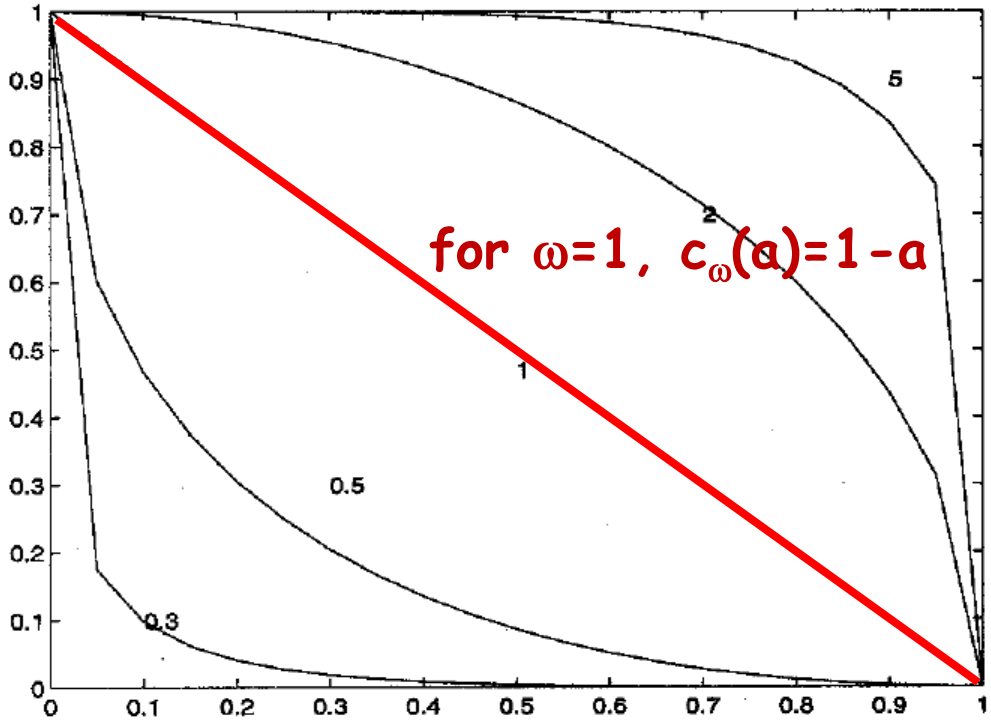


Figure 3.2. Yager class of fuzzy complements $c_w(a)$ for different values of w.

به ازای چه مقدار از ω ، مکمل فازی این کلاس به **مکمل فازی پایه** تبدیل می‌گردد؟

دستورکار این جلسه:

عمل های مجموعه های فازی

- ☑ مقدمه
- ☑ مکمل فازی
- ☐ اجتماع فازی و s-norm
- ☐ اشتراک فازی و t-norm
- ☐ کلاس متناظر
- ☐ عمل‌های میانگین‌گیری
- ☐ جمع‌بندی

اجتماع فازی:

- برای اینکه $s: [0,1]\times[0,1] \rightarrow [0,1]$ نگاشتی باشد که تابع عضویت مجموعه های فازی A و B را به تابع عضویت اجتماع A و B تبدیل کند یعنی

$$s[\mu_A(x), \mu_B(x)] = \mu_{A\cup B}(x)$$

لازم است شرط های زیر برآورده گردد:

Axiom s1. $s(1,1) = 1, s(0,a) = s(a,0) = a$ (boundary condition)

Axiom s2. $s(a,b) = s(b,a)$ (commutative condition)

Axiom s3. If $a \leq a'$ and $b \leq b'$, then $s(a,b) \leq s(a',b')$ (nondecreasing condition)

Axiom s4. $s(s(a,b),c) = s(a,s(b,c))$ (associative condition)

- چنین نگاشتی را **s-norm** گویند.

کلاس Dombi برای s-norm :

$$s_\lambda(a,b) = \frac{1}{1+[(\frac{1}{a}-1)^{-\lambda}+(\frac{1}{b}-1)^{-\lambda}]^{-1/\lambda}} \quad , \quad \lambda \in (0,\infty)$$

کلاس Dubois-Prade برای s-norm :

$$s_\alpha(a,b) = \frac{a+b-ab-min(a,b,1-\alpha)}{max(1-a,1-b,\alpha)} \quad , \quad \alpha \in [0,1]$$

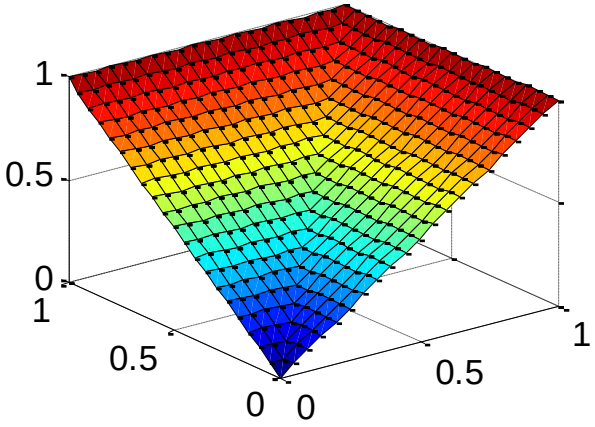
کلاس Yager برای s-norm :

$$s_w(a,b) = min[1, (a^w + b^w)^{1/w}] \quad , \quad w \in (0, \infty)$$

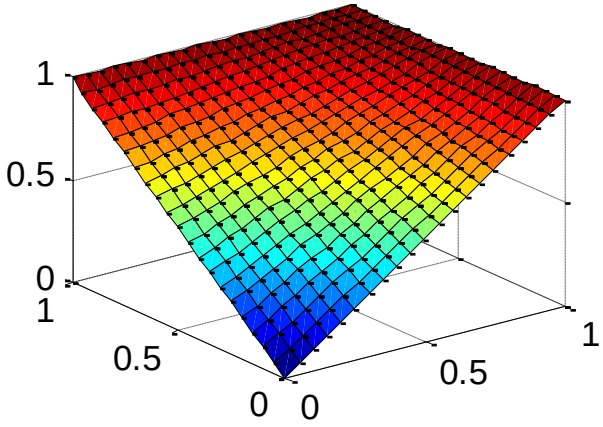
دیگر توابع برای s-norm :

- **Drastic sum s-norm:** $$s_{ds}(a,b) = \begin{cases} a \ if \ b = 0 \\ b \ if \ a = 0 \\ 1 \ otherwise \end{cases}$$
- **Einstein sum s-norm:** $$s_{es}(a,b) = \frac{a+b}{1+ab}$$
- **Algebraic sum s-norm:** $$s_{as}(a,b) = a + b - ab$$
- **Maximum s-norm:** $$s_{max}(a,b) = max(a,b)$$

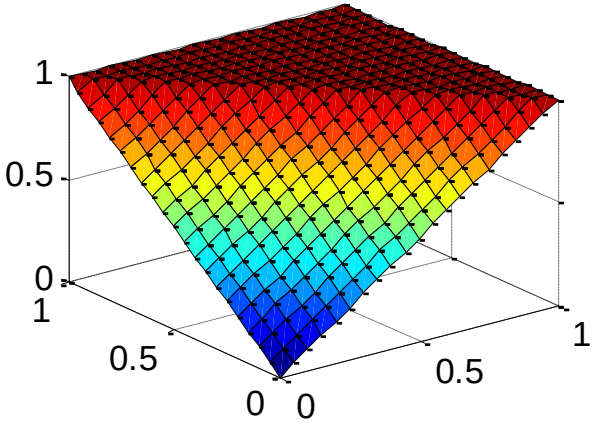
Maximum S-norm



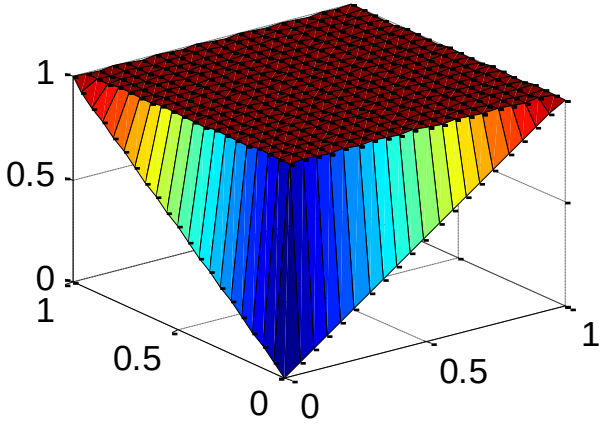
Algebraic-sum S-norm



Bounded-sum S-norm

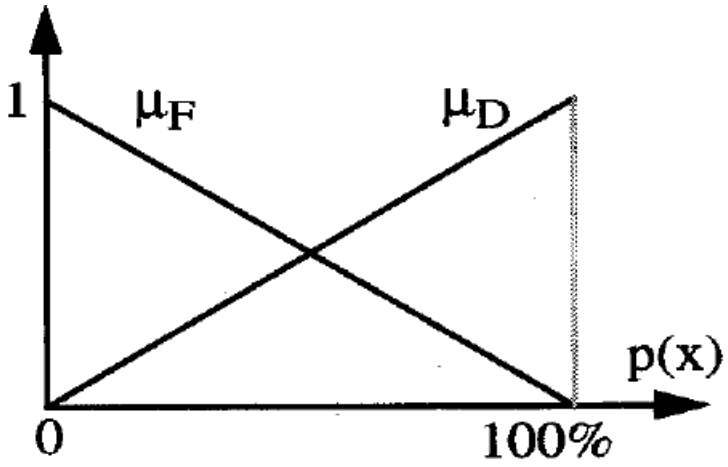


Drastic-sum S-norm



مثال:

تابع عضویت مجموعه‌های D و F در محدوده‌ی $p(x) \in [0,1]$ به صورت روبرو توصیف شده است. اجتماع این دو مجموعه‌ی فازی را با استفاده از s-norm های زیر به دست آورید.



$$\mu_D(x) = p(x)$$
$$\mu_F(x) = 1 - p(x)$$

الف: s-norm ماکزیمم

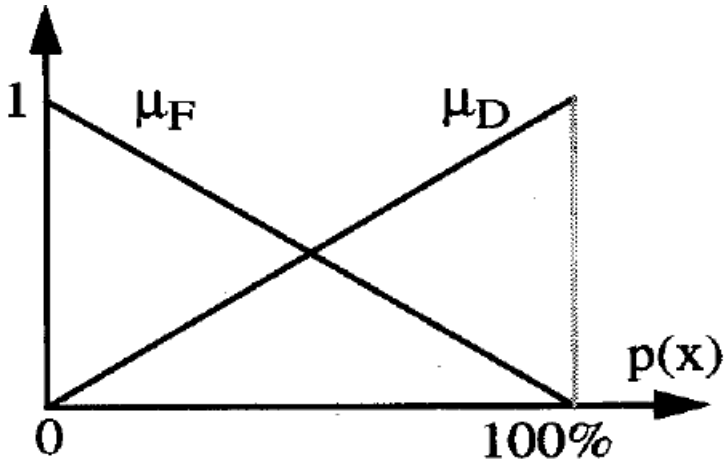
ب: s-norm کلاس Yager به ازای $\omega=3$

ج: s-norm جمع جبری

د: drastic sum s-norm

حل مثال:

تابع عضویت مجموعه‌های D و F در محدوده‌ی $p(x) \in [0,1]$ به صورت روبرو توصیف شده است. اجتماع این دو مجموعه‌ی فازی را با استفاده از s-norm های زیر به دست آورید.



$$\mu_D(x) = p(x)$$
$$\mu_F(x) = 1 - p(x)$$

الف: s-norm ماکزیمم

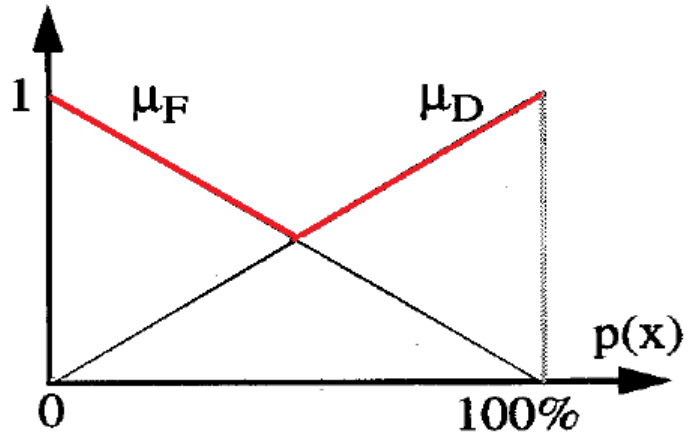
ب: s-norm کلاس Yager به ازای $\omega = 3$

ج: s-norm جمع جبری

د: drastic sum s-norm

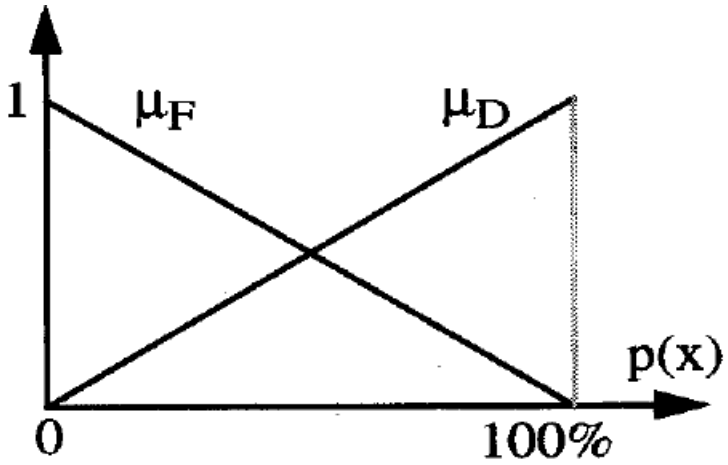
- حل بند الف:

$$\mu_{F \cup D}(x) = max[\mu_F, \mu_D]$$
$$= \begin{cases} \mu_F(x) & if \quad 0 \le p(x) \le 0.5 \\ \mu_D(x) & if \quad 0.5 \le p(x) \le 1 \end{cases}$$



حل مثال:

تابع عضویت مجموعه‌های D و F در محدوده‌ی $p(x) \in [0,1]$ به صورت روبرو توصیف شده است. اجتماع این دو مجموعه‌ی فازی را با استفاده از s-norm های زیر به دست آورید.



$$\mu_D(x) = p(x)$$
$$\mu_F(x) = 1 - p(x)$$

الف: s-norm ماکزیمم

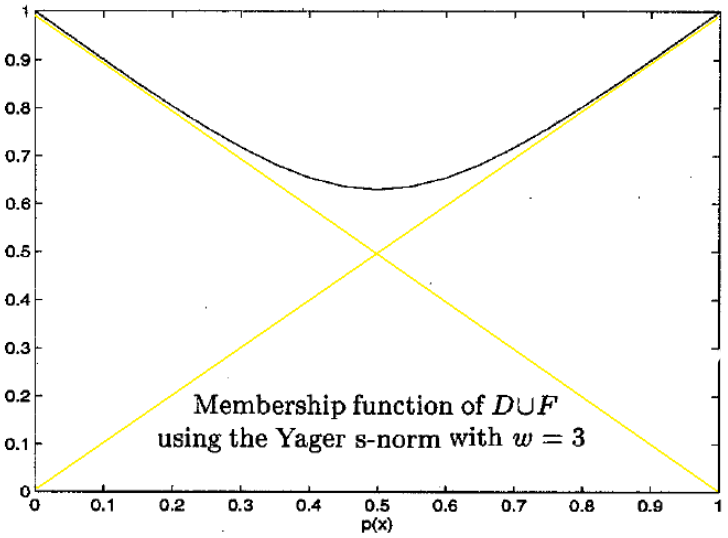
ب: s-norm کلاس Yager به ازای $\omega = 3$

ج: s-norm جمع جبری

د: drastic sum s-norm

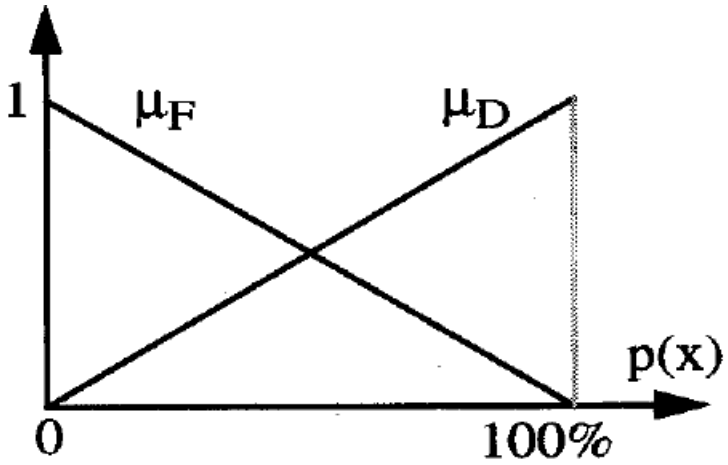
- حل بند ب:

$$\mu_{D\cup F}(x) = s_w[\mu_D(x), \mu_F(x)]$$
$$= min[1, ((p(x))^w + (1 - p(x))^w)^{1/w}]$$



حل مثال:

تابع عضویت مجموعه‌های D و F در محدوده‌ی $p(x) \in [0,1]$ به صورت روبرو توصیف شده است. اجتماع این دو مجموعه‌ی فازی را با استفاده از s-norm های زیر به دست آورید.



$$\mu_D(x) = p(x)$$
$$\mu_F(x) = 1 - p(x)$$

الف: s-norm ماکزیمم

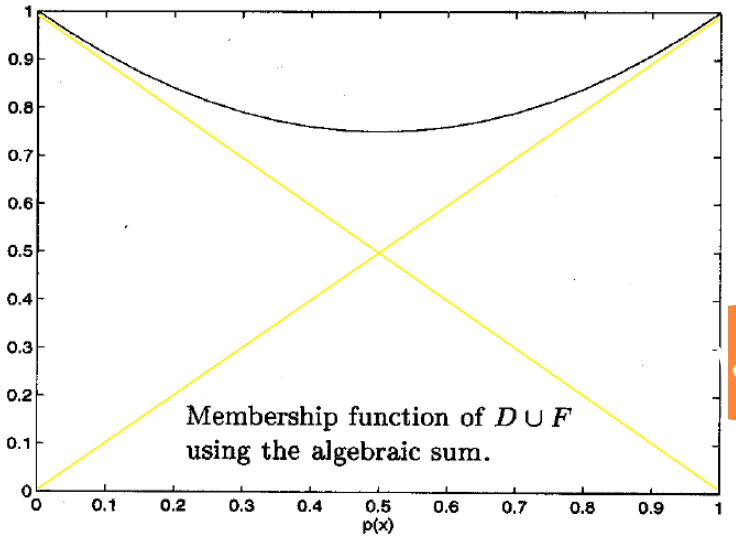
ب: s-norm کلاس Yager به ازای $\omega = 3$

ج: s-norm جمع جبری

د: drastic sum s-norm

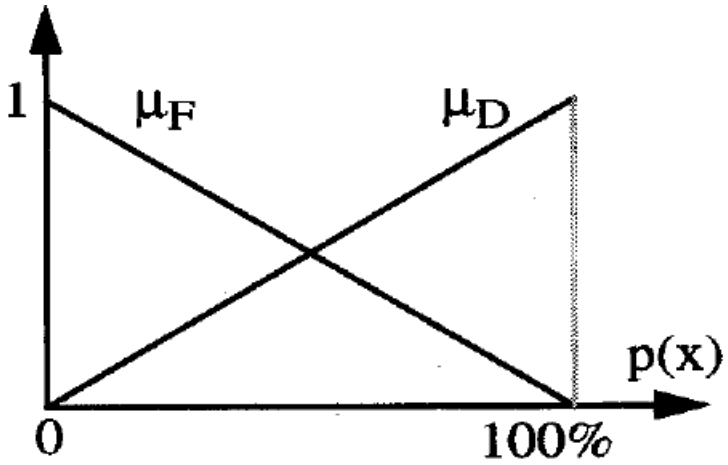
- حل بند ج:

$$\begin{aligned}\mu_{D\cup F}(x) &= s_{as}[\mu_D(x), \mu_F(x)] \\ &= p(x) + (1 - p(x)) - p(x)(1 - p(x)) \\ &= 1 - p(x) + (p(x))^2\end{aligned}$$



حل مثال:

تابع عضویت مجموعه‌های D و F در محدوده‌ی $p(x) \in [0,1]$ به صورت روبرو توصیف شده است. اجتماع این دو مجموعه‌ی فازی را با استفاده از s-norm های زیر به دست آورید.



$$\mu_D(x) = p(x)$$
$$\mu_F(x) = 1 - p(x)$$

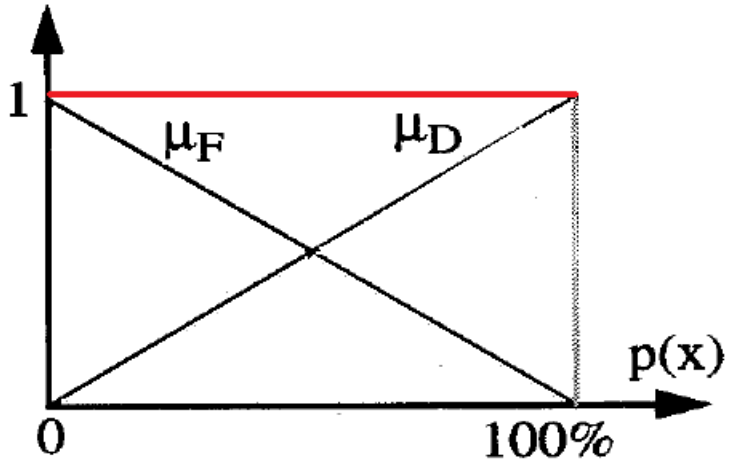
الف: s-norm ماکزیمم

ب: s-norm کلاس Yager به ازای $\omega = 3$

ج: s-norm جمع جبری

د: drastic sum s-norm

- حل بند د:



مقایسه‌ی s-norm ها:

- ماکزیمم کوچکترین s-norm و drastic sum بزرگترین s-norm است.

به عبارت دیگر،

- برای هر s-norm دلخواه s داریم: $max(a,b) \leq s(a,b) \leq s_{ds}(a,b)$

ویژگی جالب s-norm کلاس Dombi :

$$s_\lambda(a,b) = \frac{1}{1+[(\frac{1}{a}-1)^{-\lambda}+(\frac{1}{b}-1)^{-\lambda}]^{-1/\lambda}} \quad , \quad \lambda \in (0,\infty)$$

$$\lim_{\lambda\to\infty} s_\lambda(a,b) = max(a,b)$$

$$\lim_{\lambda\to 0} s_\lambda(a,b) = s_{ds}(a,b)$$

ویژگی جالب s-norm کلاس Yager :

$$s_w(a,b) = min[1,(a^w + b^w)^{1/w}] \quad , \quad w \in (0,\infty)$$

$$\lim_{w\to\infty} s_w(a,b) = max(a,b)$$

$$\lim_{w\to 0} s_w(a,b) = s_{ds}(a,b)$$

دستورکار این جلسه:

عمل های مجموعه های فازی

- ☑ مقدمه
- ☑ مکمل فازی
- ☑ اجتماع فازی و s-norm
- ☐ اشتراک فازی و t-norm
- ☐ کلاس متناظر
- ☐ عمل‌های میانگین‌گیری
- ☐ جمع‌بندی

اشتراک فازی:

- برای اینکه $t: [0,1]\times[0,1] \rightarrow [0,1]$ نگاشتی باشد که تابع عضویت مجموعه های فازی A و B را به تابع عضویت اشتراک A و B تبدیل کند یعنی

$$t[\mu_A(x), \mu_B(x)] = \mu_{A\cap B}(x)$$

لازم است شرط های زیر برآورده گردد:

Axiom t1: $t(0,0) = 0; t(a,1) = t(1,a) = a$ (boundary condition)

Axiom t2: $t(a,b) = t(b,a)$ (commutativity)

Axiom t3: If $a \leq a'$ and $b \leq b'$, then $t(a,b) \leq t(a',b')$ (nondecreasing condition)

Axiom t4: $t[t(a,b),c] = t[a,t(b,c)]$ (associativity)

- چنین نگاشتی را **t-norm** گویند.

کلاس Dombi برای t-norm :

$$t_\lambda(a,b) = \frac{1}{1+[(\frac{1}{a}-1)^\lambda + (\frac{1}{b}-1)^\lambda]^{1/\lambda}} \quad , \quad \lambda \in (0,\infty)$$

کلاس Dubois-Prade برای t-norm :

$$t_\alpha(a,b) = \frac{ab}{max(a,b,\alpha)} \quad , \quad \alpha \in [0,1]$$

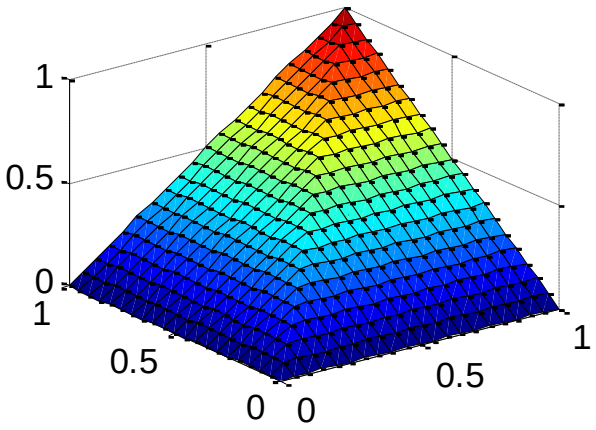
کلاس Yager برای t-norm :

$$t_w(a,b) = 1 - min[1, ((1-a)^w + (1-b)^w)^{1/w}] \quad , \quad w \in (0, \infty)$$

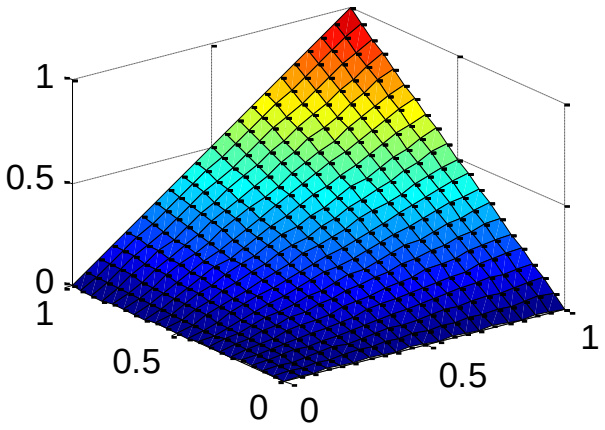
دیگر توابع برای t-norm :

- **Drastic product t-norm:** $t_{dp}(a,b) = \begin{cases} a \ if \ b = 1 \\ b \ if \ a = 1 \\ 0 \ otherwise \end{cases}$
- **Einstein product t-norm:** $t_{ep}(a,b) = \frac{ab}{2-(a+b-ab)}$
- **Algebraic product t-norm:** $t_{ap}(a,b) = ab$
- **Minimum t-norm:** $t_{min}(a,b) = min(a,b)$

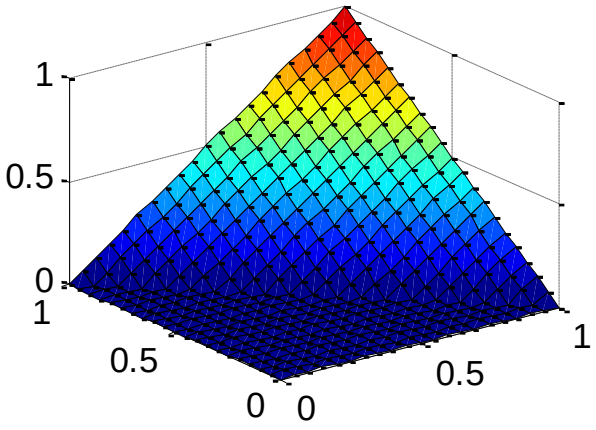
Minimum T-norm



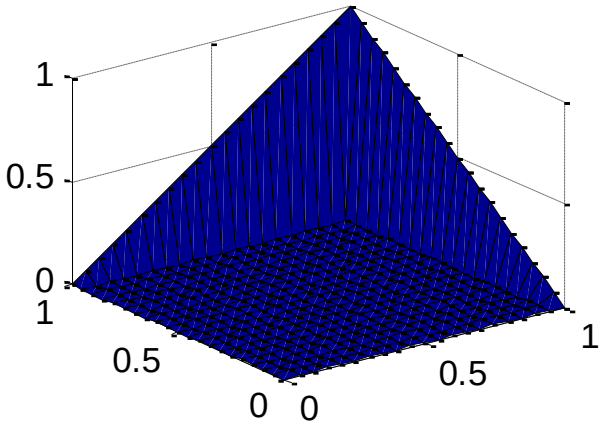
Algebraic-product T-norm



Bounded-product T-norm

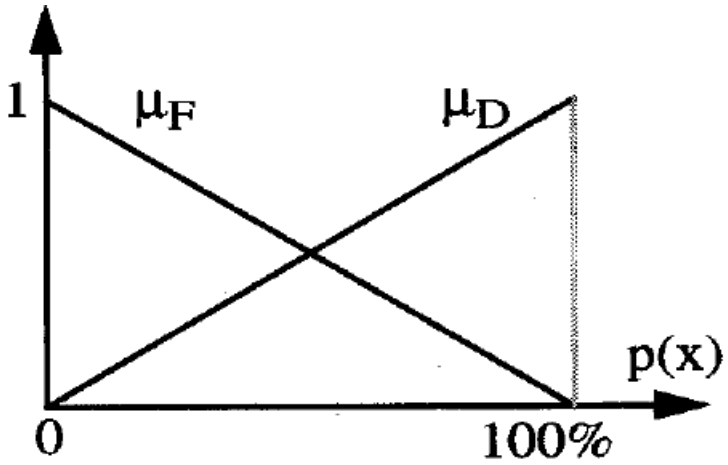


Drastic-product T-norm



مثال:

تابع عضویت مجموعه‌های D و F در محدوده‌ی $p(x) \in [0,1]$ به صورت روبرو توصیف شده است. اشتراک این دو مجموعه‌ی فازی را با استفاده از t-norm های زیر به دست آورید.



$$\mu_D(x) = p(x)$$
$$\mu_F(x) = 1 - p(x)$$

الف: t-norm مینیمم

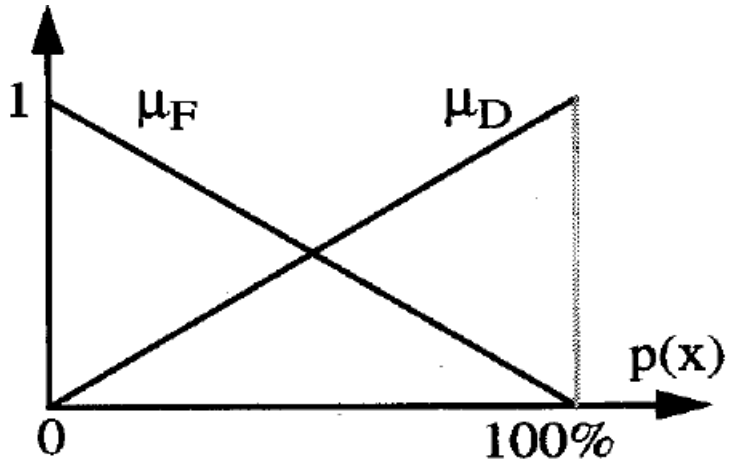
ب: t-norm کلاس Yager به ازای w=3

ج: t-norm ضرب جبری

د: drastic product t-norm

حل مثال:

تابع عضویت مجموعه‌های D و F در محدوده‌ی $p(x) \in [0,1]$ به صورت روبرو توصیف شده است. اشتراک این دو مجموعه‌ی فازی را با استفاده از t-norm های زیر به دست آورید.



$$\mu_D(x) = p(x)$$
$$\mu_F(x) = 1 - p(x)$$

الف: t-norm مینیمم

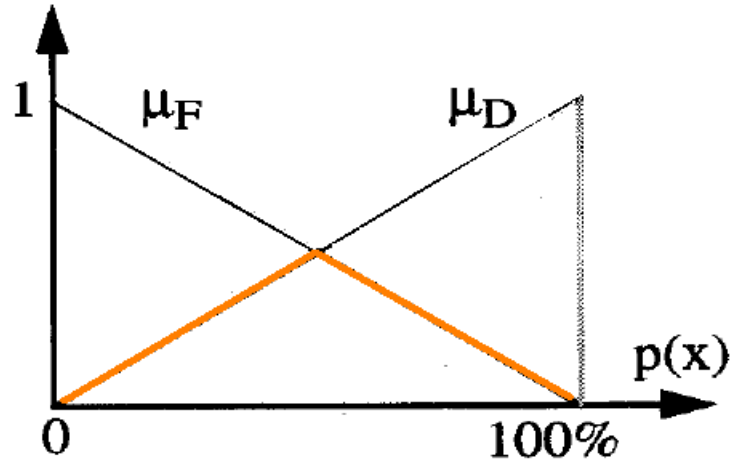
ب: t-norm کلاس Yager به ازای w=3

ج: t-norm ضرب جبری

د: drastic product t-norm

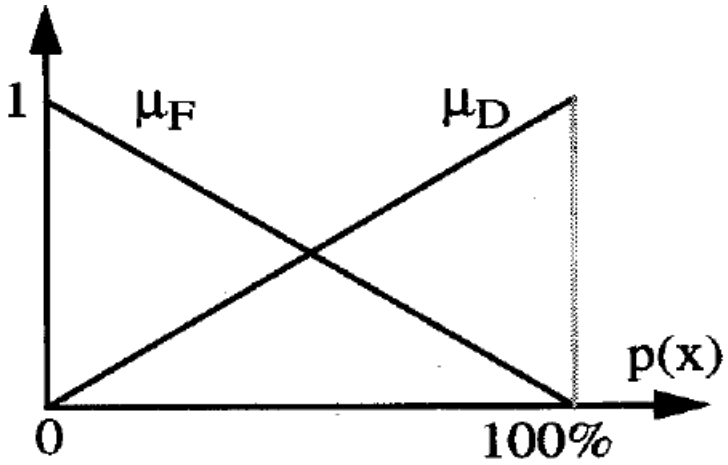
- حل بند الف:

$$\mu_{F\cap D}(x) = min[\mu_F, \mu_D]$$
$$= \begin{cases} \mu_D(x) & if \quad 0 \le p(x) \le 0.5 \\ \mu_F(x) & if \quad 0.5 \le p(x) \le 1 \end{cases}$$



حل مثال:

تابع عضویت مجموعه‌های D و F در محدوده‌ی $p(x) \in [0,1]$ به صورت روبرو توصیف شده است. اشتراک این دو مجموعه‌ی فازی را با استفاده از t-norm های زیر به دست آورید.



$$\mu_D(x) = p(x)$$
$$\mu_F(x) = 1 - p(x)$$

الف: t-norm مینیمم

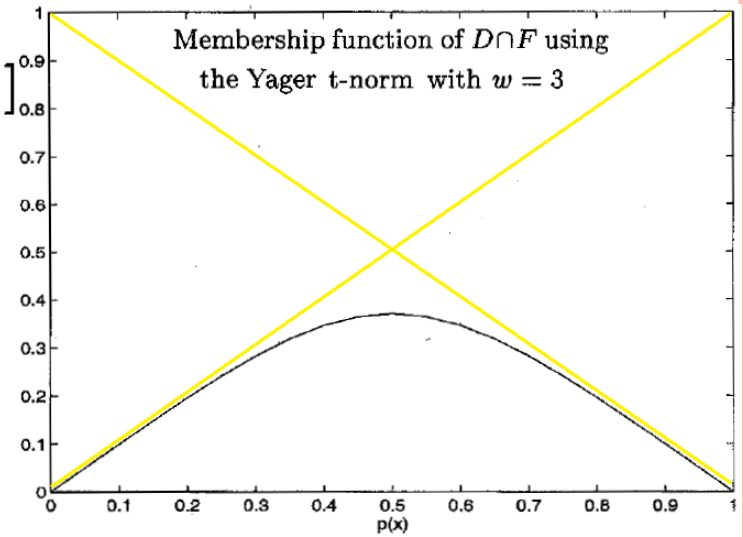
ب: t-norm کلاس Yager به ازای w=3

ج: t-norm ضرب جبری

د: drastic product t-norm

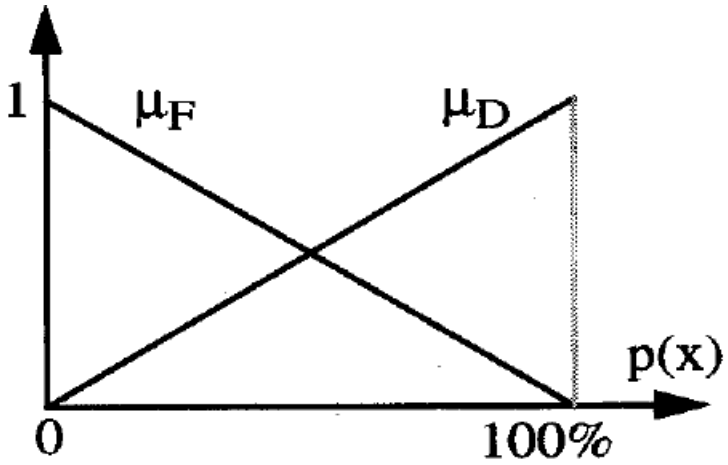
- حل بند ب:

$$\mu_{D\cap F}(x) = t_w[\mu_D(x), \mu_F(x)]$$
$$= 1 - min[1, ((1-p(x))^w + (p(x))^w)^{1/w}]$$



حل مثال:

تابع عضویت مجموعه‌های D و F در محدوده‌ی $p(x) \in [0,1]$ به صورت روبرو توصیف شده است. اشتراک این دو مجموعه‌ی فازی را با استفاده از t-norm های زیر به دست آورید.



$$\mu_D(x) = p(x)$$
$$\mu_F(x) = 1 - p(x)$$

الف: t-norm مینیمم

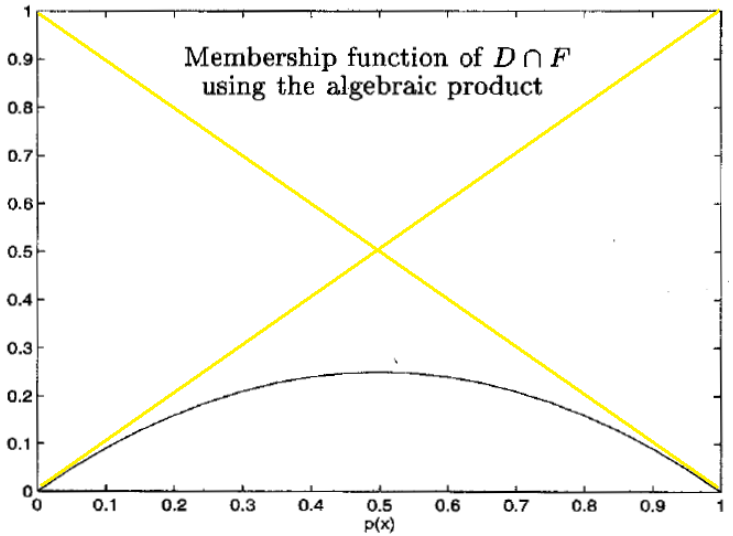
ب: t-norm کلاس Yager به ازای w=3

ج: t-norm ضرب جبری

- حل بند ج:

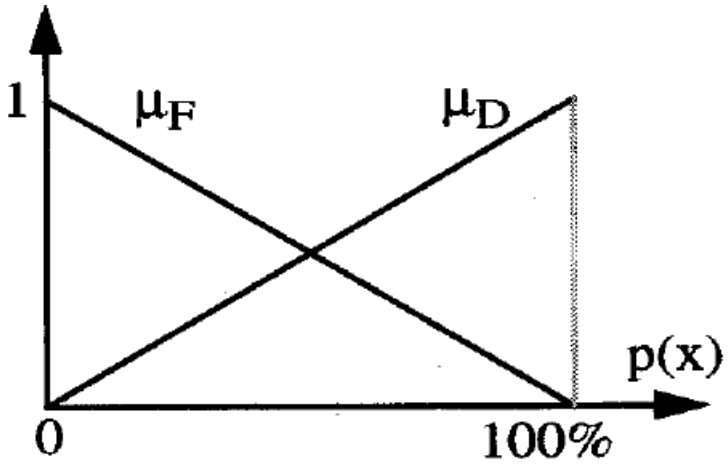
$$\mu_{D\cap F}(x) = t_{ap}[\mu_D(x), \mu_F(x)]$$
$$= p(x)(1 - p(x))$$

د: drastic product t-norm



حل مثال:

تابع عضویت مجموعه‌های D و F در محدوده‌ی $p(x) \in [0,1]$ به صورت روبرو توصیف شده است. اشتراک این دو مجموعه‌ی فازی را با استفاده از t-norm های زیر به دست آورید.



$$\mu_D(x) = p(x)$$
$$\mu_F(x) = 1 - p(x)$$

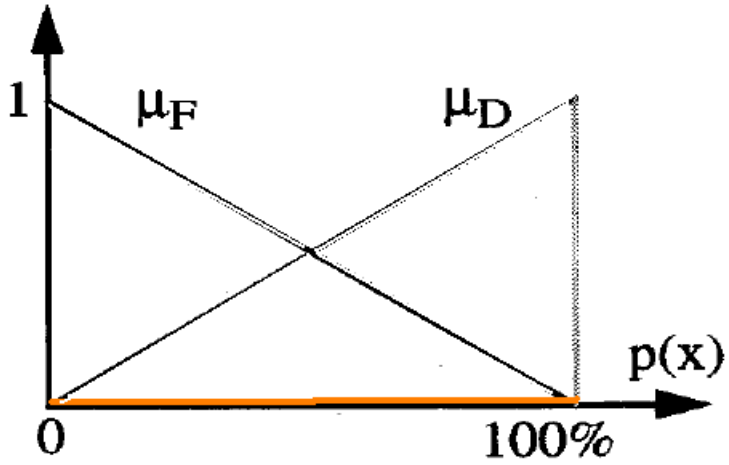
الف: t-norm مینیمم

ب: t-norm کلاس Yager به ازای w=3

ج: t-norm ضرب جبری

حل بند د:

د: drastic product t-norm



مقایسه‌ی t-norm ها:

- مینیمم بزرگترین t-norm و drastic product کوچکترین t-norm است.

به عبارت دیگر،

- برای هر t-norm دلخواه t داریم: $t_{dp}(a,b) \leq t(a,b) \leq min(a,b)$

ویژگی جالب t-norm کلاس Dombi :

$$t_\lambda(a,b) = \frac{1}{1+[(\frac{1}{a}-1)^\lambda + (\frac{1}{b}-1)^\lambda]^{1/\lambda}} \quad , \quad \lambda \in (0,\infty)$$

$$\lim_{\lambda \to \infty} t_\lambda(a,b) = min(a,b)$$

$$\lim_{\lambda \to 0} t_\lambda(a,b) = t_{dp}(a,b)$$

دستورکار این جلسه:

عمل های مجموعه های فازی

- ☑ مقدمه
- ☑ مکمل فازی
- ☑ اجتماع فازی و s-norm
- ☑ اشتراک فازی و t-norm
- ☐ کلاس متناظر
- ☐ عمل‌های میانگین‌گیری
- ☐ جمع‌بندی

کلاس متناظر:

- اگر برای یک مجموعه ی عمل شامل s-norm، t-norm و complement ، قوانین دِمورگان برقرار باشد آنها را کلاس متناظر گویند.

به عبارت دیگر،

- عمل های s ، t و c تشکیل یک کلاس متناظر می دهند اگر:

$$c[s(a,b)] = t[c(a), c(b)]$$

واژه‌نامه

associated class	کلاس متناظر

مثال۱:

نشان دهید عمل‌های زیر تشکیل یک کلاس متناظر می‌دهند (کلاس متناظر زاده یا کلاس متناظر پایه).

$$maximum\ s-norm: \quad s(a,b)=\max(a,b)$$
$$minimum\ t-norm: \quad t(a,b)=\min(a,b)$$
$$basic\ complement: \quad c(a)=1-a$$

c(s(a,b)) ? t(c(a),c(b))

if a ≥ b

s(a,b) = a, c(s(a,b)) = 1-a,

c(a) = 1-a, c(b) = 1-b, t(c(a),c(b)) = 1-a,

if a < b

s(a,b) = b, c(s(a,b)) = 1-b,

c(a) = 1-a, c(b) = 1-b, t(c(a),c(b)) = 1-b,

مثال ۲:

نشان دهید عمل‌های زیر تشکیل یک کلاس متناظر می‌دهند.

$$Yager\ s-norm: \quad s_w(a,b) = \min\left[1, (a^w + b^w)^{\frac{1}{w}}\right]$$

$$Yager\ t-norm: \quad t_w(a,b) = 1 - \min\left[1, ((1-a)^w + (1-b)^w)^{\frac{1}{w}}\right]$$

$$basic\ complement: \quad c(a) = 1 - a$$

c(s(a,b)) ? t(c(a),c(b))

مثال ۳:

نشان دهید عمل‌های زیر تشکیل یک کلاس متناظر می‌دهند.

$$algebraic\ sum: \quad s_{as}(a,b) = a + b - ab$$
$$algebraic\ product: \quad t_{ap}(a,b) = ab$$
$$basic\ complement: \quad c(a) = 1 - a$$

c(s(a,b)) ? t(c(a),c(b))

s(a,b) = a+b-ab, c(s(a,b)) = 1-a-b+ab,

c(a) = 1-a, c(b) = 1-b, t(c(a),c(b)) =(1-a)(1-b)= 1-a-b+ab,

دستورکار این جلسه:

عمل های مجموعه های فازی

- ☑ مقدمه
- ☑ مکمل فازی
- ☑ اجتماع فازی و s-norm
- ☑ اشتراک فازی و t-norm
- ☑ کلاس متناظر
- ☐ عمل‌های میانگین‌گیری
- ☐ جمع‌بندی

عمل‌های میانگین‌گیری:

- یادآوری:

$$Union: \quad max(a,b) \le s(a,b) \le s_{ds}(a,b)$$

$$Intersection: \quad t_{dp}(a,b) \le t(a,b) \le min(a,b)$$

- بنابراین محدوده‌ی $[t_{dp}(a,b), min(a,b)]$ توسط عمل اشتراک و محدوده‌ی $[max(a,b), s_{ds}(a,b)]$ توسط عمل اجتماع پوشش داده می‌شود. از این رو، محدوده‌ی $[min(a,b), max(a,b)]$ توسط عمل‌های اشتراک و اجتماع پوشش داده نمی‌شود. عمل‌هایی که این محدوده را پوشش می‌دهند «عمل های میانگین‌گیری» نامیده شده و با v مشخص می‌گردند.

عمل‌های میانگین گیری:

- **max-min averages:** $v_\lambda(a,b) = \lambda \max(a,b) + (1-\lambda)\min(a,b), \lambda \in [0,1]$
- **generalized means:** $v_\alpha(a,b) = \left(\frac{a^\alpha + b^\alpha}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha}}, \alpha \in R\ (\alpha \neq 0)$
- **fuzzy and:** $v_p(a,b) = p\min(a,b) + \frac{(1-p)(a+b)}{2}, \quad p \in [0,1]$
- **fuzzy or:** $v_\gamma(a,b) = \gamma \max(a,b) + \frac{(1-\gamma)(a+b)}{2}, \quad \gamma \in [0,1]$

سوال۱: متوسط **max-min** به ازای مقادیر مختلف پارامتر λ چه محدوده‌ای را پوشش می‌دهد؟

[min(a,b),max(a,b)]

سوال۲: میانگین تعمیم‌یافته به ازای مقادیر مختلف پارامتر α چه محدوده‌ای را پوشش می‌دهد؟

[min(a,b),max(a,b)]

سوال۳: «**and** فازی» به ازای مقادیر مختلف پارامتر **p** چه محدوده‌ای را پوشش می‌دهد؟

[min(a,b), (a+b)/2]

سوال۴: «**or** فازی» به ازای مقادیر مختلف پارامتر γ چه محدوده‌ای را پوشش می‌دهد؟

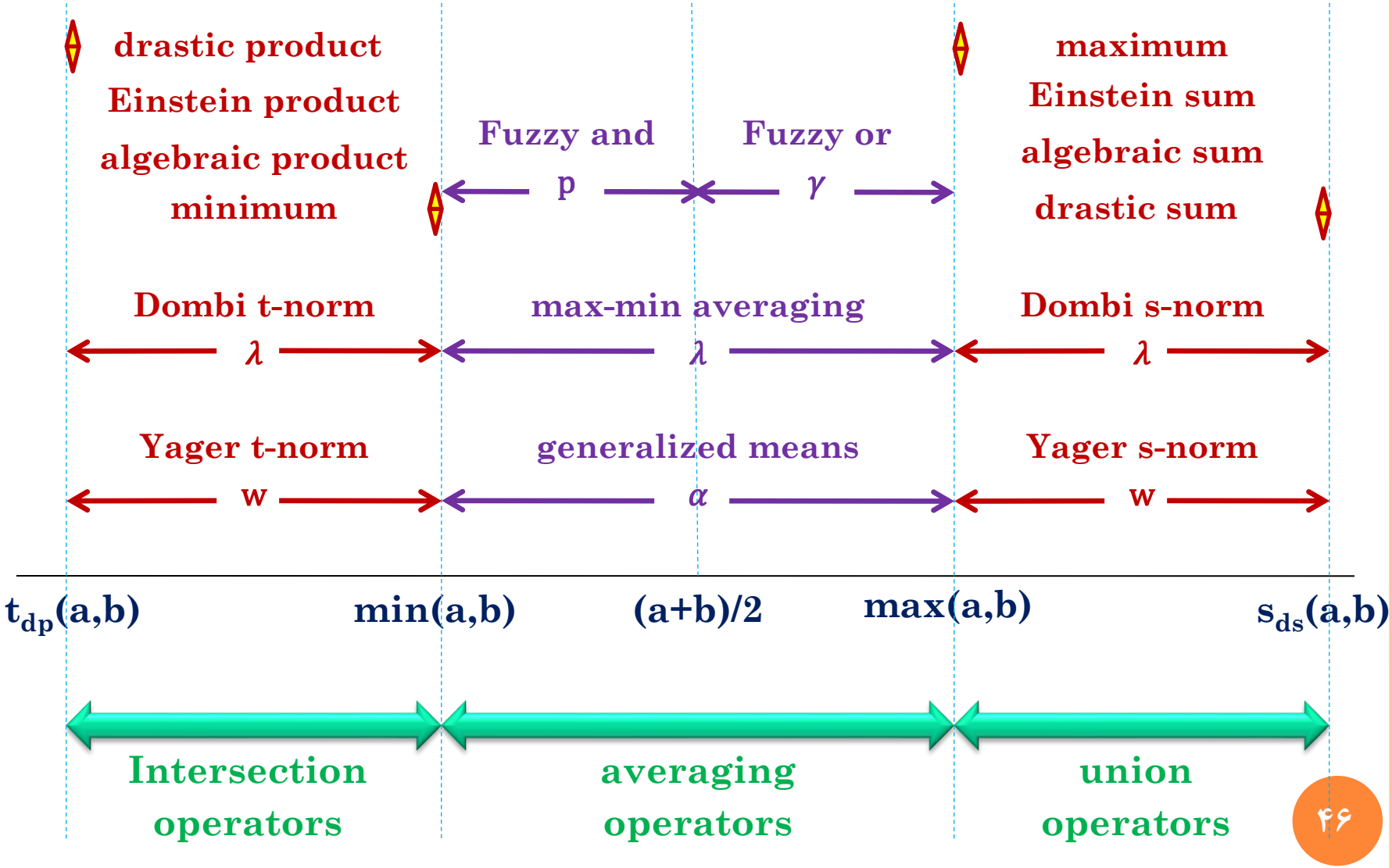
[(a+b)/2,max(a,b)]

دستورکار این جلسه:

عمل های مجموعه های فازی

- ☑ مقدمه
- ☑ مکمل فازی
- ☑ اجتماع فازی و s-norm
- ☑ اشتراک فازی و t-norm
- ☑ کلاس متناظر
- ☑ عمل‌های میانگین‌گیری
- ☐ جمع‌بندی

جمع‌بندی:


drastic product
Einstein product
algebraic product
minimum
Fuzzy and
p
Fuzzy or
γ
maximum
Einstein sum
algebraic sum
drastic sum
Dombi t-norm
λ
max-min averaging
λ
Dombi s-norm
λ
Yager t-norm
w
generalized means
α
Yager s-norm
w
$t_{dp}(a,b)$
min(a,b)
(a+b)/2
max(a,b)
$s_{ds}(a,b)$
Intersection operators
averaging operators
union operators

دستورکار این جلسه:

عمل های مجموعه های فازی

- مقدمه
- مکمل فازی
- اجتماع فازی و s-norm
- اشتراک فازی و t-norm
- کلاس متناظر
- عمل‌های میانگین‌گیری
- جمع‌بندی

QUESTIONS?