

هر که گوید جمله حق است احمق است

آن که گوید جمله باطل، اوستی است
مولانا

سیستم‌های فازی

4

Presented By: A. Maleki
Fall 2021

دستور کار این جلسه:

رابطه های فازی

← ضرب کارت‌تزی

رابطه‌ی کلاسیک

رابطه‌ی فازی

تصویر کردن و گسترش استوانه‌ای روابط

ترکیب روابط تُرد

ترکیب روابط فازی

اصل توسعه

ضرب کارتیزین (cartesian product):

- دو مجموعه‌ی غیرفازی U و V را در نظر بگیرید. ضرب کارتیزین این دو مجموعه که با $U \times V$ نشان داده می‌شود مجموعه‌ای غیرفازی شامل زوج‌های مرتب (u, v) است که $u \in U$ و $v \in V$ می‌باشد.

U, V : crisp sets

$$U \times V = \{(u, v) | u \in U, v \in V\}$$

- توجه کنید که ترتیب اعضای زوج‌های مرتب اهمیت دارد؛ به عبارت دیگر،

$$\text{if } U \neq V \rightarrow U \times V \neq V \times U$$

○ حالت کلی تر: ضرب کارتیزین چند مجموعه‌ی غیرفازی:

U_1, U_2, \dots, U_n : crisp sets

$$U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n = \{(u_1, u_2, \dots, u_n) \mid u_1 \in U_1, u_2 \in U_2, \dots, u_n \in U_n\}$$

واژه‌نامه

ordered pair

زوج مرتب

ordered n-tuple

n-تایی مرتب

دستور کار این جلسه:

رابطه های فازی

ضرب کارت‌تزیں

رابطه‌ی کلاسیک 

رابطه‌ی فازی

تصویر کردن و گسترش استوانه‌ای روابط

ترکیب روابط تُرد

ترکیب روابط فازی

اصل توسعه

رابطه‌ی کلاسیک (classic relation):

- رابطه‌های کلاسیک بیانگر نگرانی بین مجموعه‌های غیرفازی می‌باشند به نحوی که دو عضو این مجموعه‌ها یا کاملاً مرتبطند یا کاملاً غیرمرتبط.
- رابطه‌ی کلاسیک بین مجموعه‌های غیرفازی U_1, U_2, \dots, U_n به صورت $Q(U_1, U_2, \dots, U_n)$ نشان داده می‌شود و زیرمجموعه‌ای از ضرب کارتیزین این مجموعه‌ها است.

$$Q(U_1, U_2, \dots, U_n) \subset U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n$$

- تابع عضویت برای رابطه‌ی کلاسیک:

$$\mu_Q(u_1, \dots, u_n) = \begin{cases} 1 & \text{if } (u_1, \dots, u_n) \in Q(U_1, \dots, U_n) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

- ماتریس رابطه: ماتریسی n -بعدی شامل مقادیر عضویت رابطه.

رابطه‌ها را می‌توان بر اساس این که بین چند مجموعه برقرار است به صورت زیر تقسیم‌بندی نمود:

- رابطه‌ی دوگانه (binary relation)
- رابطه‌ی سه‌گانه (ternary relation)
- رابطه‌ی چهارگانه (quaternary relation)
- رابطه‌ی پنج‌گانه (quinary relation)

مثال ۱:

مجموعه‌های غیرفازی $A=\{1,2,3\}$ ، $B=\{3,4,5\}$ و $C=\{8,9\}$ را در نظر بگیرید.

الف: ضرب کارت‌زین این سه مجموعه یعنی $A \times B \times C$ را به دست آورید.

ب: در حالت کلی، چه رابطه‌ای بین تعداد اعضای ضرب کارت‌زین مجموعه‌ها و تعداد اعضای آنها وجود دارد؟

$$A \times B \times C = \{ (1,3,8) , (1,3,9) , (1,4,8) , (1,4,9) , (1,5,8) , (1,5,9), \\ (2,3,8) , (2,3,9) , (2,4,8) , (2,4,9) , (2,5,8) , (2,5,9), \\ (3,3,8) , (3,3,9) , (3,4,8) , (3,4,9) , (3,5,8) , (3,5,9) \}$$

مثال ۲:

فرض کنید R رابطه‌ی دوگانه‌ای بین مجموعه‌های غیرفازی A و B باشد. ماتریس رابطه را برای R بنویسید.

$A = \{ \text{Iran , India , US , Canada} \}$

$B = \{ \text{Persian , Hindi , English , Arabic} \}$

$R(a,b) = \{ (\text{Iran , Persian}) , (\text{India , Hindi}) , (\text{US , English}) , (\text{Canada , English}) \}$

Relation	Iran	India	US	Canada
Persian	1	0	0	0
Hindi	0	1	0	0
English	0	0	1	1
Arabic	0	0	0	0

مثال ۳:

فرض کنید R رابطه‌ی سه‌گانه‌ای بین مجموعه‌های غیرفازی A ، B و C باشد.

ماتریس رابطه را برای R بنویسید.

$A = \{ \text{Iran , Canada , India , US} \}$

$B = \{ \text{Persian , Hindi , English} \}$

$C = \{ \text{Rupees , Dollar , Rial} \}$

$R(a,b,c) = \{ (\text{Iran , Persian , Rial}) , (\text{Canada , English , Dollar}) , (\text{India , Hindi , Rupees}) , (\text{US , English , Dollar}) \}$

	Iran	Canada	India	US
Rials	0	0	0	0
Dollars	0	1	0	1
Rupees	0	0	1	0

دستور کار این جلسه:

رابطه های فازی

ضرب کارت‌تزیں

رابطه‌ی کلاسیک

رابطه‌ی فازی 

تصویر کردن و گسترش استوانه‌ای روابط

ترکیب روابط تُرد

ترکیب روابط فازی

اصل توسعه

رابطه‌ی فازی (fuzzy relation):

○ رابطه‌ای که مقدار تعلق آن می‌تواند هر مقداری در محدوده‌ی $[0,1]$ باشد.

به عبارت دیگر،

○ رابطه‌ی فازی یک مجموعه‌ی فازی در فضای ضرب کارتیزین مجموعه‌های

تُرد است یعنی

U_1, U_2, \dots, U_n : crisp sets

$U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n$: cartesian product

$$Q = \left\{ \left((u_1, \dots, u_n), \mu_Q(u_1, \dots, u_n) \right) \mid (u_1, \dots, u_n) \in U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n \right\}$$

, $\mu_Q(u_1, \dots, u_n) \in [0,1]$

مثال ۱:

فرض کنید R رابطه‌ی دوگانه‌ی فازی «خیلی دور» بین مجموعه‌های A و B در مجموعه‌ی مرجع شهرهای ایران باشد. ماتریس رابطه را برای R بنویسید.

$$A = \{ \text{Tabriz, Tehran, Shahrood} \}$$

$$B = \{ \text{Mashhad, Semnan} \}$$

Relation	Tabriz	Tehran	Shahrood
Mashhad	1	0.6	0.3
Semnan	0.8	0.2	0.15

مثال ۲:

فرض کنید R رابطه‌ی دوگانه‌ی فازی «رنگ - رسیده بودن» بین مجموعه‌های A (رنگ) و B (رسیده بودن) باشد. ماتریس رابطه را برای R بنویسید.

$A = \{ \text{Green, Yellow, Red} \}$

$B = \{ \text{Unripe, Semi-ripe, Ripe} \}$

Relation	Green	Yellow	Red
Unripe	1	0.6	0
Semi-ripe	0.3	1	0.4
Ripe	0	0.2	1

مثال ۳:

فرض کنید U و V مجموعه اعداد حقیقی باشند یعنی $U=V=R$.

الف: رابطه‌ی فازی « x تقریبا برابر y » را می‌توان با تابع عضویت زیر تعریف نمود.

$$\mu_{AE}(x, y) = e^{-(x-y)^2}$$

ب: رابطه‌ی فازی « x بسیار بزرگ تر از y » را می‌توان با تابع عضویت زیر تعریف نمود.

$$\mu_{ML}(x, y) = \frac{1}{1 + e^{-(x-y)}}$$

دستور کار این جلسه:

رابطه های فازی

ضرب کارت‌تزیں

رابطه‌ی کلاسیک

رابطه‌ی فازی

تصویر کردن و گسترش استوانه‌ای روابط 

ترکیب روابط تُرد

ترکیب روابط فازی

اصل توسعه

تصویر کردن و گسترش استوانه‌ای روابط:

○ یادآوری مفاهیم در حالت غیرفازی در قالب یک مثال

○ تصویر کردن روابط فازی دوگانه (حالت خاص)

○ تصویر کردن روابط فازی (حالت کلی)

○ گسترش استوانه ای روابط

○ ضرب کارتزین مجموعه های فازی و ...

واژه‌نامه

projection

cylindric extension

تصویر کردن

گسترش استوانه‌ای

یادآوری مفاهیم در حالت غیرفازی:

مثال ۱:

برای مجموعه‌ی غیرفازی A که نشانگر رابطه‌ای در فضای $U \times V = \mathbb{R}^2$ است موارد زیر را تعیین نمایید.

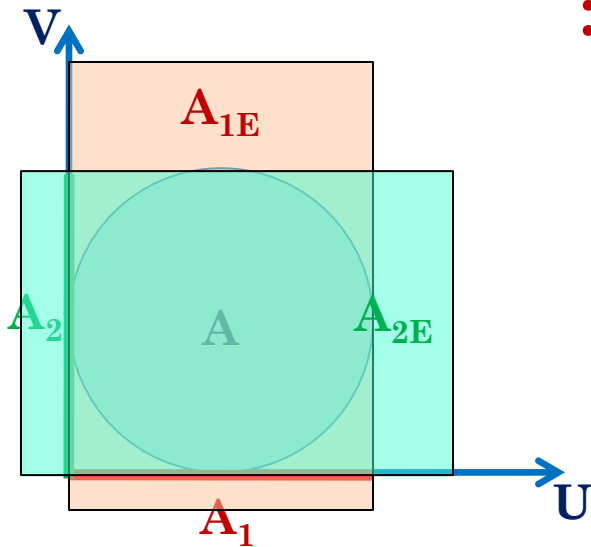
$$A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 1 \}$$

الف: تصویر A بر U یا A_1 .

ب: تصویر A بر V یا A_2 .

ج: گسترش استوانه‌ای A_1 به $U \times V$ یا A_{1E} .

د: گسترش استوانه‌ای A_2 به $U \times V$ یا A_{2E} .



$$A_1 = [0,2] \subset U$$

$$A_2 = [0,2] \subset V$$

$$A_{1E} = [0,2] \times (-\infty, +\infty)$$

$$A_{2E} = (-\infty, +\infty) \times [0,2]$$

تصویر کردن روابط فازی دوگانه (حالت خاص) :

- فرض کنید Q رابطه‌ی فازی دوگانه‌ای در $U \times V$ باشد. تصویر Q بر U که با Q_1 نشان داده می‌شود مجموعه‌ای فازی در U با تابع عضویت زیر است:

$$\mu_{Q_1}(x) = \max_{y \in V} \mu_Q(x, y)$$

تصویر کردن روابط فازی (حالت کلی) :

- فرض کنید Q رابطه‌ای فازی در $U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n$ ؛ و $\{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ زیرمجموعه‌ای از $\{1, 2, \dots, n\}$ باشد. تصویر Q بر $U_{i_1} \times U_{i_2} \times \dots \times U_{i_k}$ ، رابطه‌ی فازی Q_P در $U_{i_1} \times U_{i_2} \times \dots \times U_{i_k}$ است که با تابع عضویت زیر تعریف می‌گردد:

$$\mu_{Q_P}(u_{i_1}, \dots, u_{i_k}) = \max_{u_{j_1} \in U_{j_1}, \dots, u_{j_{(n-k)}} \in U_{j_{(n-k)}}} \mu_Q(u_1, \dots, u_n)$$

که $\{u_{j_1}, \dots, u_{j_{(n-k)}}\}$ مکمل $\{u_{i_1}, \dots, u_{i_k}\}$ نسبت به $\{u_1, \dots, u_n\}$ است.

گسترش استوانه‌ای روابط فازی :

- فرض کنید Q_P رابطه‌ای فازی در $U_{i_1} \times \dots \times U_{i_k}$ و $\{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ زیرمجموعه ای از $\{1, 2, \dots, n\}$ باشد. گسترش استوانه ای Q_P به $U_1 \times \dots \times U_n$ ، رابطه‌ی فازی Q_{PE} در $U_1 \times \dots \times U_n$ است که با تابع عضویت زیر تعریف می‌گردد:

$$\mu_{Q_{PE}}(u_1, \dots, u_n) = \mu_{Q_P}(u_{i_1}, \dots, u_{i_k})$$

مثال:

فرض کنید U و V مجموعه اعداد حقیقی باشند یعنی $U=V=R$. رابطه‌ی فازی « x »

تقریباً برابر y « یا AE در $U \times V$ با تابع عضویت داده شده را در نظر بگیرید.

$$\mu_{AE}(x, y) = e^{-(x-y)^2}$$

الف: تصویر رابطه‌ی AE بر U یا AE_1 .

ب: تصویر رابطه‌ی AE بر V یا AE_2 .

ج: گسترش استوانه‌ای AE_1 به $U \times V$.

د: گسترش استوانه‌ای AE_2 به $U \times V$.

$$\mu_{AE_1}(x) = \max_{y \in V} e^{-(x-y)^2} = 1 \rightarrow AE_1 = \int_U \frac{1}{x}$$

$$\mu_{AE_2}(y) = \max_{x \in U} e^{-(x-y)^2} = 1 \rightarrow AE_2 = \int_V \frac{1}{y}$$

$$AE_{1E} = \int_{U \times V} \frac{1}{(x, y)} = U \times V$$

$$AE_{2E} = \int_{U \times V} \frac{1}{(x, y)} = U \times V$$

همانطور که در مثال‌های قبل مشاهده گردید، اگر یک رابطه‌ی فازی ابتدا تصویر شده و سپس گسترش استوانه‌ای داده شود به رابطه‌ی فازی بزرگ‌تری منجر خواهد شد.



ضرب کارتزین مجموعه‌های فازی:

○ فرض کنید A_1, A_2, \dots, A_n مجموعه‌هایی فازی به ترتیب در U_1, U_2, \dots ,

U_n باشند. ضرب کارتزین این مجموعه‌های فازی که با $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$

نشان داده می‌شود رابطه‌ای فازی در $U_1 \times \dots \times U_n$ با تابع عضویت زیر است

که در آن $t(\cdot)$ نشانگر t-norm می‌باشد.

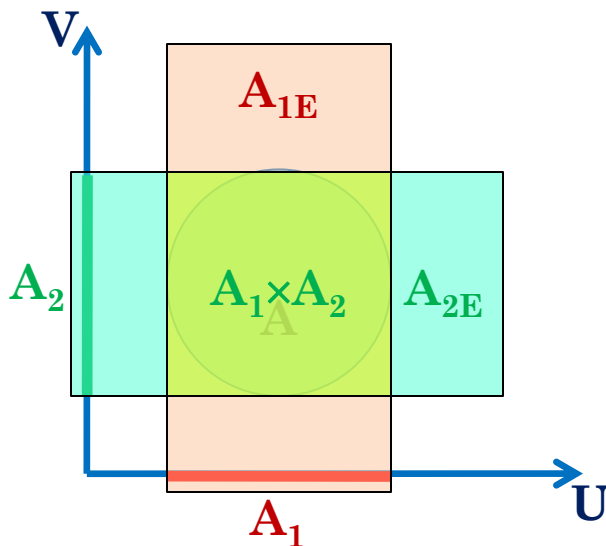
$$\mu_{A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n}(u_1, \dots, u_n) = t(\mu_{A_1}(u_1), \dots, \mu_{A_n}(u_n))$$

توجه!

○ اگر Q رابطه‌ای فازی در $U_1 \times \dots \times U_n$ و Q_1, Q_2, \dots, Q_n به ترتیب تصویر آن بر U_1, U_2, \dots, U_n باشند آنگاه $Q \subset Q_1 \times \dots \times Q_n$

مثال ۱:

مجموعه‌ی غیر فازی A که نشانگر رابطه‌ای در فضای $U \times V = \mathbb{R}^2$ است را در نظر بگیرید.



دستور کار این جلسه:

رابطه های فازی

- ✓ ضرب کارت‌تزیین
- ✓ رابطه‌ی کلاسیک
- ✓ رابطه‌ی فازی
- ✓ تصویر کردن و گسترش استوانه‌ای روابط
- ترکیب روابط تُرد ←
- ترکیب روابط فازی
- اصل توسعه

ترکیب روابط باینری تُرد:

○ فرض کنید $P(U,V)$ و $Q(V,W)$ دو رابطه ی باینری تُرد باشند که در مجموعه ی V اشتراک دارند. ترکیب P و Q که با $P \circ Q$ نشان داده می شود به صورت رابطه ای در $U \times W$ تعریف می گردد که $(x,z) \in P \circ Q$ اگر و فقط اگر بتوان $y \in V$ یافت که $(x,y) \in P$ و $(y,z) \in Q$ باشد.

ترکیب روابط:

○ $P \circ Q$ ترکیب روابط $P(U, V)$ و $Q(V, W)$ است اگر و فقط اگر برای هر

$(x, z) \in U \times W$ داشته باشیم:

$$\mu_{P \circ Q}(x, z) = \max_{y \in V} t[\mu_P(x, y), \mu_Q(y, z)]$$

که $t(\cdot)$ نشانگر t -norm است.

در این توصیف، به فازی یا تُرد بودن اشاره‌ای نشده است و برای هر دو حالت معتبر است.



دستور کار این جلسه:

رابطه های فازی

- ضرب کارت‌تزیین
- رابطه‌ی کلاسیک
- رابطه‌ی فازی
- تصویر کردن و گسترش استوانه‌ای روابط
- ترکیب روابط تُرد
- ترکیب روابط فازی 
- اصل توسعه

ترکیب روابط فازی:

- در ترکیب روابط فازی، از آنجا که گزینه‌های متنوعی برای t -norm وجود دارد ترکیب روابط فازی نیز متنوع خواهد بود که از آن جمله می‌توان به \max -min و \max -product اشاره نمود.

ترکیب max-min روابط فازی:

- ترکیب max-min روابط فازی $P(U,V)$ و $Q(V,W)$ ، یک رابطه‌ی فازی $P \circ Q$ در $U \times W$ با تابع عضویت زیر است که $(x,z) \in U \times W$ می‌باشد.

$$\mu_{P \circ Q}(x, z) = \max_{y \in V} \min[\mu_P(x, y), \mu_Q(y, z)]$$

ترکیب max-product روابط فازی:

- ترکیب max-product روابط فازی $P(U,V)$ و $Q(V,W)$ ، یک رابطه‌ی فازی $P \circ Q$ در $U \times W$ با تابع عضویت زیر است که $(x,z) \in U \times W$ می‌باشد.

$$\mu_{P \circ Q}(x, z) = \max_{y \in V} [\mu_P(x, y) \cdot \mu_Q(y, z)]$$

مثال:

برای روابط فازی S و R داده شده، رابطه‌ی $T=RoS$ را به روش‌های ترکیب

max-product و max-min تعیین نمایید.

$$R = \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array} \begin{array}{cc} y_1 & y_2 \\ \begin{bmatrix} 0.7 & 0.6 \\ 0.8 & 0.3 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$S = \begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \end{array} \begin{array}{ccc} z_1 & z_2 & z_3 \\ \begin{bmatrix} 0.8 & 0.5 & 0.4 \\ 0.1 & 0.6 & 0.7 \end{bmatrix} \end{array}$$

برای روابط فازی S و R داده شده، رابطه‌ی T=RoS را به روش‌های ترکیب

max-min و **max-product** تعیین نمایید.

$$R = \begin{matrix} & y_1 & y_2 \\ x_1 & \boxed{0.7} & \boxed{0.6} \\ x_2 & \boxed{0.8} & \boxed{0.3} \end{matrix} \quad S = \begin{matrix} & z_1 & z_2 & z_3 \\ y_1 & \boxed{0.8} & \boxed{0.5} & \boxed{0.4} \\ y_2 & \boxed{0.1} & \boxed{0.6} & \boxed{0.7} \end{matrix}$$

$$\mu_{RoS}(x_1, z_1) = \max_{y \in \{y_1, y_2\}} \{\min(0.7, 0.8), \min(0.6, 0.1)\} = \max_{y \in \{y_1, y_2\}} \{0.7, 0.1\} = 0.7$$

$$\mu_{RoS}(x_1, z_2) = \max_{y \in \{y_1, y_2\}} \{\min(0.7, 0.5), \min(0.6, 0.6)\} = \max_{y \in \{y_1, y_2\}} \{0.5, 0.6\} = 0.6$$

$$\mu_{RoS}(x_1, z_3) = \max_{y \in \{y_1, y_2\}} \{\min(0.7, 0.4), \min(0.6, 0.7)\} = \max_{y \in \{y_1, y_2\}} \{0.4, 0.6\} = 0.6$$

$$\mu_{RoS}(x_2, z_1) = \max_{y \in \{y_1, y_2\}} \{\min(0.8, 0.8), \min(0.3, 0.1)\} = \max_{y \in \{y_1, y_2\}} \{0.8, 0.1\} = 0.8$$

$$\mu_{RoS}(x_2, z_2) = \max_{y \in \{y_1, y_2\}} \{\min(0.8, 0.5), \min(0.3, 0.6)\} = \max_{y \in \{y_1, y_2\}} \{0.5, 0.3\} = 0.5$$

$$\mu_{RoS}(x_2, z_3) = \max_{y \in \{y_1, y_2\}} \{\min(0.8, 0.4), \min(0.3, 0.7)\} = \max_{y \in \{y_1, y_2\}} \{0.4, 0.3\} = 0.4$$

$$T = RoS = \begin{matrix} & z_1 & z_2 & z_3 \\ x_1 & 0.7 & 0.6 & 0.6 \\ x_2 & 0.8 & 0.5 & 0.4 \end{matrix}$$

برای روابط فازی S و R داده شده، رابطه‌ی T=RoS را به روش‌های ترکیب

max-product و max-min تعیین نمایید.

$$R = \begin{matrix} & y_1 & y_2 \\ x_1 & [0.7 & 0.6] \\ x_2 & [0.8 & 0.3] \end{matrix}$$

$$S = \begin{matrix} & z_1 & z_2 & z_3 \\ y_1 & [0.8] & [0.5] & [0.4] \\ y_2 & [0.1] & [0.6] & [0.7] \end{matrix}$$

$$\mu_{RoS}(x_1, z_1) = \max_{y \in \{y_1, y_2\}} \{0.7 \times 0.8, 0.6 \times 0.1\} = \max_{y \in \{y_1, y_2\}} \{0.56, 0.06\} = 0.56$$

$$\mu_{RoS}(x_1, z_2) = \max_{y \in \{y_1, y_2\}} \{0.7 \times 0.5, 0.6 \times 0.6\} = \max_{y \in \{y_1, y_2\}} \{0.35, 0.36\} = 0.36$$

$$\mu_{RoS}(x_1, z_3) = \max_{y \in \{y_1, y_2\}} \{0.7 \times 0.4, 0.6 \times 0.7\} = \max_{y \in \{y_1, y_2\}} \{0.28, 0.42\} = 0.42$$

$$\mu_{RoS}(x_2, z_1) = \max_{y \in \{y_1, y_2\}} \{0.8 \times 0.8, 0.3 \times 0.1\} = \max_{y \in \{y_1, y_2\}} \{0.64, 0.03\} = 0.64$$

$$\mu_{RoS}(x_2, z_2) = \max_{y \in \{y_1, y_2\}} \{0.8 \times 0.5, 0.3 \times 0.6\} = \max_{y \in \{y_1, y_2\}} \{0.40, 0.18\} = 0.40$$

$$\mu_{RoS}(x_2, z_3) = \max_{y \in \{y_1, y_2\}} \{0.8 \times 0.4, 0.3 \times 0.7\} = \max_{y \in \{y_1, y_2\}} \{0.32, 0.21\} = 0.32$$

$$T = RoS = \begin{matrix} & z_1 & z_2 & z_3 \\ x_1 & [0.56 & 0.36 & 0.42] \\ x_2 & [0.64 & 0.40 & 0.32] \end{matrix}$$

مثال:

فرض کنید U, V و W مجموعه اعداد حقیقی باشند یعنی $U=V=W=R$. برای

روابط فازی AE « تقریبا برابر » و ML یا « بسیار بزرگ تر از » داده شده،

ترکیب AEOML را به روش ترکیب max-product تعیین نمایید.

$$\mu_{AE}(x, y) = e^{-(x-y)^2}$$

$$\mu_{ML}(x, y) = \frac{1}{1 + e^{-(x-y)}}$$

$$\mu_{AEOML}(x, z) = \max_{y \in R} \left[\frac{e^{-(x-y)^2}}{1 + e^{-(y-z)}} \right]$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{e^{-(x-y)^2}}{1 + e^{-(y-z)}} \right] = 0$$

$$y = ? \quad \rightarrow \quad \mu_{AEOML}(x, z) = ?$$

مثال (تمرین ۲-۴ کتاب):

مجموعه‌های مرجع U_1 ، U_2 ، U_3 و U_4 و همچنین رابطه‌ی Q که در فضای ضرب

کارتزین $U_1 \times U_2 \times U_3 \times U_4$ تعریف شده است را در نظر بگیرید. موارد خواسته

شده را به دست آورید.

$$U_1 = \{a, b, c\} \quad U_2 = \{s, t\} \quad U_3 = \{x, y\} \quad U_4 = \{i, j\}$$

$$Q = \frac{0.4}{(b, t, y, i)} + \frac{0.6}{(a, s, x, i)} + \frac{0.9}{(b, s, y, i)} + \frac{1}{(b, s, y, j)} + \frac{0.6}{(a, t, y, j)} + \frac{0.2}{(c, s, y, i)}$$

○ الف: تصویر رابطه‌ی Q بر $U_1 \times U_2 \times U_4$

○ ب: تصویر رابطه‌ی Q بر $U_1 \times U_3$

○ ج: تصویر رابطه‌ی Q بر U_4

○ د: گسترش استوانه‌ای رابطه‌ی حاصل از بند الف به فضای $U_1 \times U_2 \times U_3 \times U_4$

○ ه: گسترش استوانه‌ای رابطه‌ی حاصل از بند ب به فضای $U_1 \times U_2 \times U_3 \times U_4$

○ و: گسترش استوانه‌ای رابطه‌ی حاصل از بند ج به فضای $U_1 \times U_2 \times U_3 \times U_4$

مثال (تمرین ۲-۴ کتاب):

$$U_1=\{a,b,c\} \quad U_2=\{s,t\} \quad U_3=\{x,y\} \quad U_4=\{i,j\}$$

$$Q = \frac{0.4}{(b,t,y,i)} + \frac{0.6}{(a,s,x,i)} + \frac{0.9}{(b,s,y,i)} + \frac{1}{(b,s,y,j)} + \frac{0.6}{(a,t,y,j)} + \frac{0.2}{(c,s,y,i)}$$

الف: تصویر رابطه‌ی Q بر $U_1 \times U_2 \times U_4$

Projection of Q on $U_1 \times U_2 \times U_4$

$$= \frac{0.4}{(b,t,i)} + \frac{0.6}{(a,s,i)} + \frac{0.9}{(b,s,i)} + \frac{1}{(b,s,j)} + \frac{0.6}{(a,t,j)} + \frac{0.2}{(c,s,i)}$$

مثال (تمرین ۲-۴ کتاب):

$$U_1=\{a,b,c\} \quad U_2=\{s,t\} \quad U_3=\{x,y\} \quad U_4=\{i,j\}$$

$$Q = \frac{0.4}{(b,t,y,i)} + \frac{0.6}{(a,s,x,i)} + \frac{0.9}{(b,s,y,i)} + \frac{1}{(b,s,y,j)} + \frac{0.6}{(a,t,y,j)} + \frac{0.2}{(c,s,y,i)}$$

○ ب: تصویر رابطه‌ی Q بر $U_1 \times U_3$

Projection of Q on $U_1 \times U_3$

$$\begin{aligned} &= \frac{\max(0.4, 0.9, 1)}{(b,y)} + \frac{0.6}{(a,x)} + \frac{0.6}{(a,y)} + \frac{0.2}{(c,y)} \\ &= \frac{1}{(b,y)} + \frac{0.6}{(a,x)} + \frac{0.6}{(a,y)} + \frac{0.2}{(c,y)} \end{aligned}$$

مثال (تمرین ۲-۴ کتاب):

$$U_1=\{a,b,c\} \quad U_2=\{s,t\} \quad U_3=\{x,y\} \quad U_4=\{i,j\}$$

$$Q = \frac{0.4}{(b,t,y,i)} + \frac{0.6}{(a,s,x,i)} + \frac{0.9}{(b,s,y,i)} + \frac{1}{(b,s,y,j)} + \frac{0.6}{(a,t,y,j)} + \frac{0.2}{(c,s,y,i)}$$

○ ج: تصویر رابطه‌ی Q بر U_4

Projection of Q on U_4

$$= \frac{\max(0.4, 0.6, 0.9, 0.2)}{i} + \frac{\max(1, 0.6)}{j} = \frac{0.9}{i} + \frac{1}{j}$$

مثال (تمرین ۲-۴ کتاب):

$$U_1 = \{a, b, c\} \quad U_2 = \{s, t\} \quad U_3 = \{x, y\} \quad U_4 = \{i, j\}$$

$$Q = \frac{0.4}{(b, t, y, i)} + \frac{0.6}{(a, s, x, i)} + \frac{0.9}{(b, s, y, i)} + \frac{1}{(b, s, y, j)} + \frac{0.6}{(a, t, y, j)} + \frac{0.2}{(c, s, y, i)}$$

Projection of Q on $U_1 \times U_2 \times U_4$

$$= \frac{0.4}{(b, t, i)} + \frac{0.6}{(a, s, i)} + \frac{0.9}{(b, s, i)} + \frac{1}{(b, s, j)} + \frac{0.6}{(a, t, j)} + \frac{0.2}{(c, s, i)}$$

○ د: گسترش استوانه‌ای رابطه‌ی حاصل از بند الف به فضای $U_1 \times U_2 \times U_3 \times U_4$

Cylindric Expansion to $U_1 \times U_2 \times U_3 \times U_4$

$$= \frac{0.4}{(b, t, \mathbf{x}, i)} + \frac{0.4}{(b, t, \mathbf{y}, i)} + \frac{0.6}{(a, s, \mathbf{x}, i)} + \frac{0.6}{(a, s, \mathbf{y}, i)} + \frac{0.9}{(b, s, \mathbf{x}, i)} + \frac{0.9}{(b, s, \mathbf{y}, i)}$$

$$+ \frac{1}{(b, s, \mathbf{x}, j)} + \frac{1}{(b, s, \mathbf{y}, j)} + \frac{0.6}{(a, t, \mathbf{x}, j)} + \frac{0.6}{(a, t, \mathbf{y}, j)} + \frac{0.2}{(c, s, \mathbf{x}, i)} + \frac{0.2}{(c, s, \mathbf{y}, i)}$$

مثال (تمرین ۲-۴ کتاب):

$$U_1 = \{a, b, c\} \quad U_2 = \{s, t\} \quad U_3 = \{x, y\} \quad U_4 = \{i, j\}$$

$$Q = \frac{0.4}{(b, t, y, i)} + \frac{0.6}{(a, s, x, i)} + \frac{0.9}{(b, s, y, i)} + \frac{1}{(b, s, y, j)} + \frac{0.6}{(a, t, y, j)} + \frac{0.2}{(c, s, y, i)}$$

Projection of Q on $U_1 \times U_3$

$$\begin{aligned} &= \frac{\max(0.4, 0.9, 1)}{(b, y)} + \frac{0.6}{(a, x)} + \frac{0.6}{(a, y)} + \frac{0.2}{(c, y)} \\ &= \frac{1}{(b, y)} + \frac{0.6}{(a, x)} + \frac{0.6}{(a, y)} + \frac{0.2}{(c, y)} \end{aligned}$$

○ ه: گسترش استوانه‌ای رابطه‌ی حاصل از بند ب به فضای $U_1 \times U_2 \times U_3 \times U_4$

Cylindric Expansion to $U_1 \times U_2 \times U_3 \times U_4$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{(b, s, y, i)} + \frac{1}{(b, s, y, j)} + \frac{1}{(b, t, y, i)} + \frac{1}{(b, t, y, j)} \\ &+ \frac{0.6}{(a, s, x, i)} + \frac{0.6}{(a, s, x, j)} + \frac{0.6}{(a, t, x, i)} + \frac{0.6}{(a, t, x, j)} \\ &+ \frac{0.6}{(a, s, y, i)} + \frac{0.6}{(a, s, y, j)} + \frac{0.6}{(a, t, y, i)} + \frac{0.6}{(a, t, y, j)} \\ &+ \frac{0.2}{(c, s, y, i)} + \frac{0.2}{(c, s, y, j)} + \frac{0.2}{(c, t, y, i)} + \frac{0.2}{(c, t, y, j)} \end{aligned}$$

مثال (تمرین ۲-۴ کتاب):

$$U_1 = \{a, b, c\} \quad U_2 = \{s, t\} \quad U_3 = \{x, y\} \quad U_4 = \{i, j\}$$

$$Q = \frac{0.4}{(b, t, y, i)} + \frac{0.6}{(a, s, x, i)} + \frac{0.9}{(b, s, y, i)} + \frac{1}{(b, s, y, j)} + \frac{0.6}{(a, t, y, j)} + \frac{0.2}{(c, s, y, i)}$$

$$\text{Projection of } Q \text{ on } U_4 = \frac{\max(0.4, 0.6, 0.9, 0.2)}{i} + \frac{\max(1, 0.6)}{j} = \frac{0.9}{i} + \frac{1}{j}$$

○ و: گسترش استوانه‌ای رابطه‌ی حاصل از بند ج به فضای $U_1 \times U_2 \times U_3 \times U_4$

Cylindric Expansion to $U_1 \times U_2 \times U_3 \times U_4$

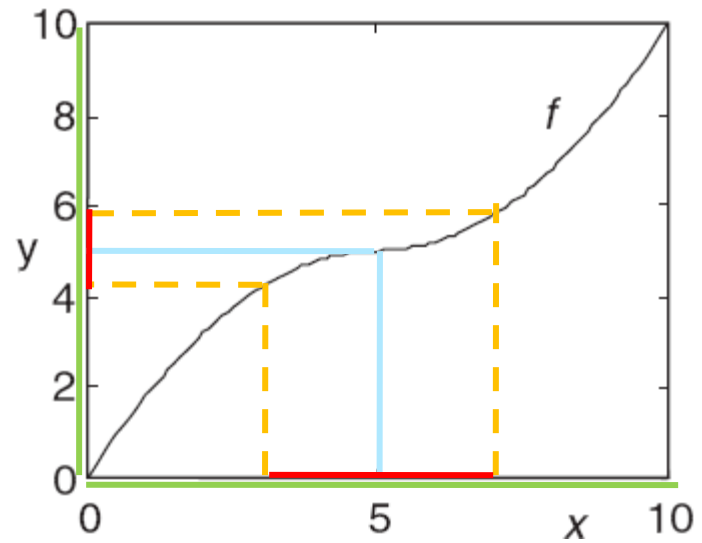
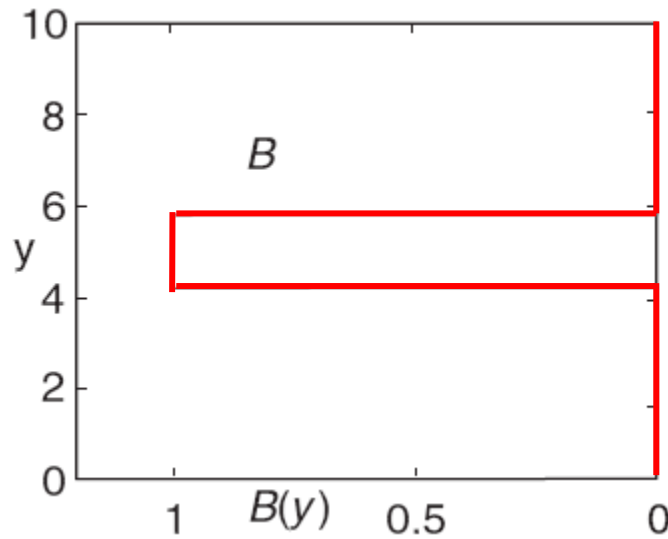
$$\begin{aligned} &= \frac{0.9}{(a, s, x, i)} + \frac{0.9}{(a, s, y, i)} + \frac{0.9}{(a, t, x, i)} + \frac{0.9}{(a, t, y, i)} \\ &+ \frac{0.9}{(b, s, x, i)} + \frac{0.9}{(b, s, y, i)} + \frac{0.9}{(b, t, x, i)} + \frac{0.9}{(b, t, y, i)} \\ &+ \frac{0.9}{(c, s, x, i)} + \frac{0.9}{(c, s, y, i)} + \frac{0.9}{(c, t, x, i)} + \frac{0.9}{(c, t, y, i)} \\ &+ \frac{1}{(a, s, x, j)} + \frac{1}{(a, s, y, j)} + \frac{1}{(a, t, x, j)} + \frac{1}{(a, t, y, j)} \\ &+ \frac{1}{(b, s, x, j)} + \frac{1}{(b, s, y, j)} + \frac{1}{(b, t, x, j)} + \frac{1}{(b, t, y, j)} \\ &+ \frac{1}{(c, s, x, j)} + \frac{1}{(c, s, y, j)} + \frac{1}{(c, t, x, j)} + \frac{1}{(c, t, y, j)} \end{aligned}$$

دستور کار این جلسه:

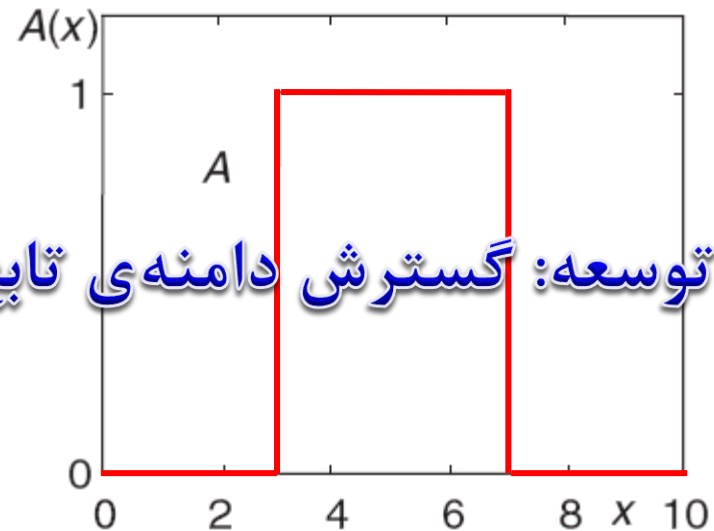
رابطه های فازی

- ضرب کارت‌تزی
- رابطه‌ی کلاسیک
- رابطه‌ی فازی
- تصویر کردن و گسترش استوانه‌ای روابط
- ترکیب روابط تُرد
- ترکیب روابط فازی
- اصل توسعه

اصل توسعه (Extension Principle):



$$f(x) = \begin{cases} -0.2(x - 5)^2 + 5, & \text{if } 0 \leq x \leq 5 \\ 0.2(x - 5)^2 + 5, & \text{if } 5 < x \leq 10 \end{cases}$$

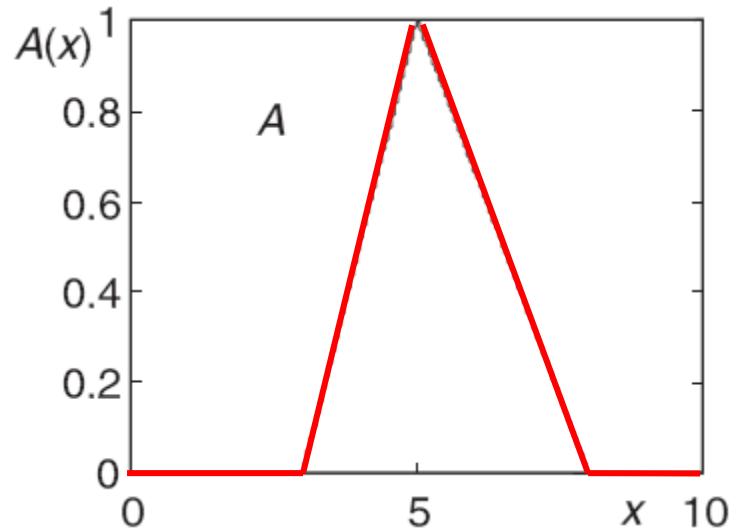
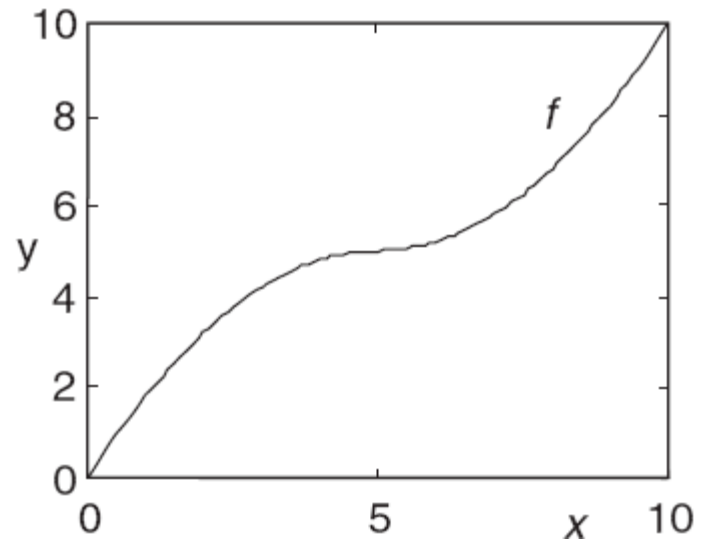
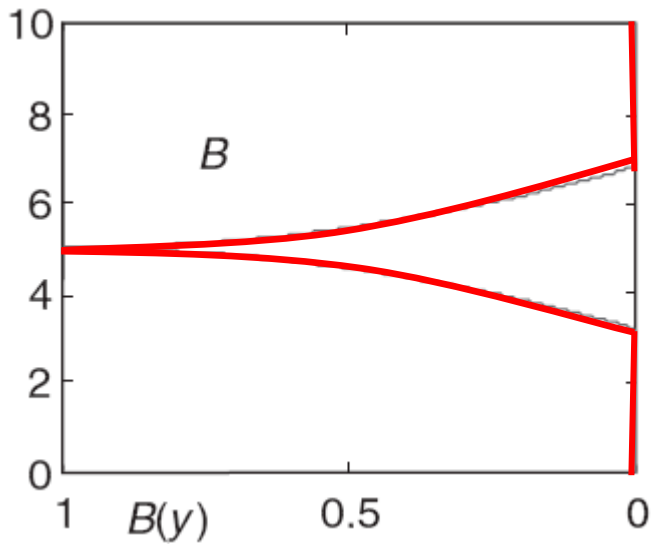


اصل توسعه: گسترش دامنه‌ی تابع از مقادیر تُرد به مجموعه‌های فازی

○ تابع: نگاشت ترد

○ اصل توسعه: نگاشت فازی

اصل توسعه (Extension Principle):



○ تابع: نگاشت ترد

○ اصل توسعه: نگاشت فازی

اصل توسعه (Extension Principle) :

فرض کنید $f: U \rightarrow V$ تابعی از مجموعه‌ی U به مجموعه‌ی V باشد.

مجموعه‌ی فازی A در U داده شده است و می‌خواهیم مجموعه‌ی فازی $B=f(A)$ در V را که توسط این تابع حاصل می‌گردد تعیین نماییم.

$f: U \rightarrow V$ $U, V: \text{crisp sets}$

$A: \text{a fuzzy set in } U$

$B: \text{a fuzzy set in } V$

if f is an one to one mapping: $\mu_B(y) = \mu_A[f^{-1}(y)] , y \in V$

otherwise: $\mu_B(y) = \max_{x \in f^{-1}(y)} \mu_A(x) , y \in V$

مثال:

مجموعه‌ی $U = \{1, 2, \dots, 10\}$ و تابع $f(x) = x^2$ را در نظر بگیرید. اگر $small$ مجموعه‌ای فازی در U باشد، مجموعه‌ی تُرد V و مجموعه‌ی فازی $small^2$ را تعیین نمایید.

$$small = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{0.8}{3} + \frac{0.6}{4} + \frac{0.4}{5}$$

$$V = \{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100\}$$

$$small^2 = \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{0.8}{9} + \frac{0.6}{16} + \frac{0.4}{25}$$

مثال:

مجموعه‌ی فازی A و تابع $f(x)=x^2+1$ را در نظر بگیرید. بر اساس اصل توسعه،

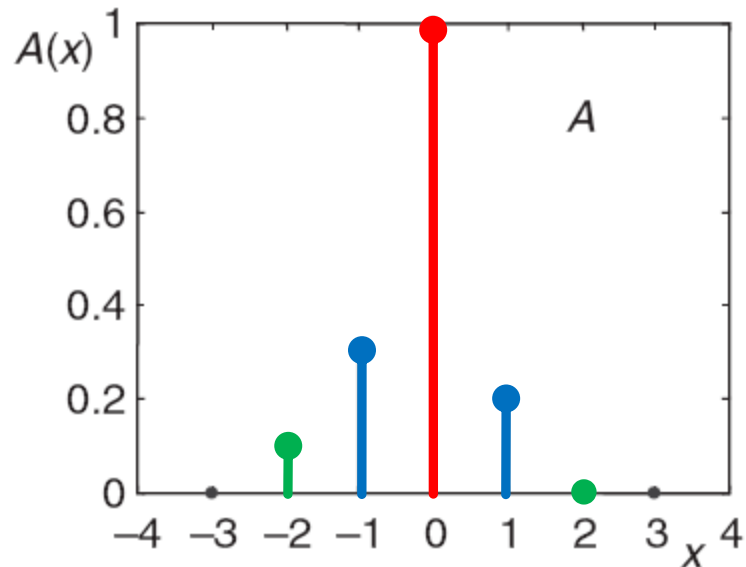
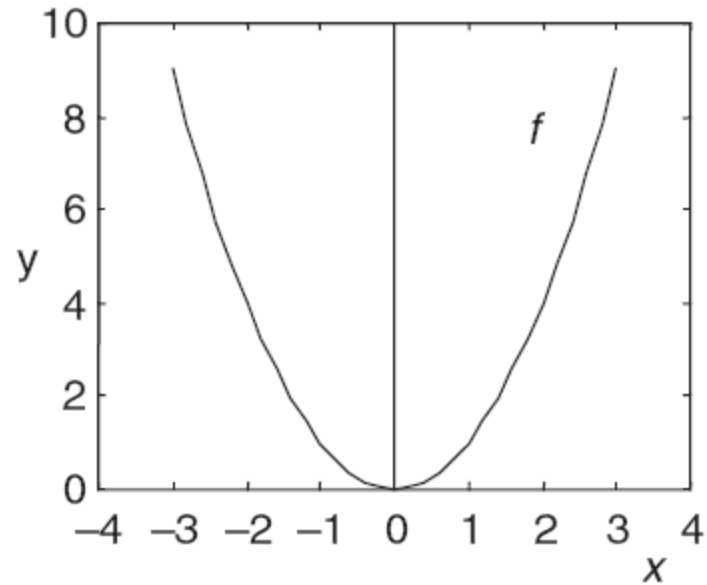
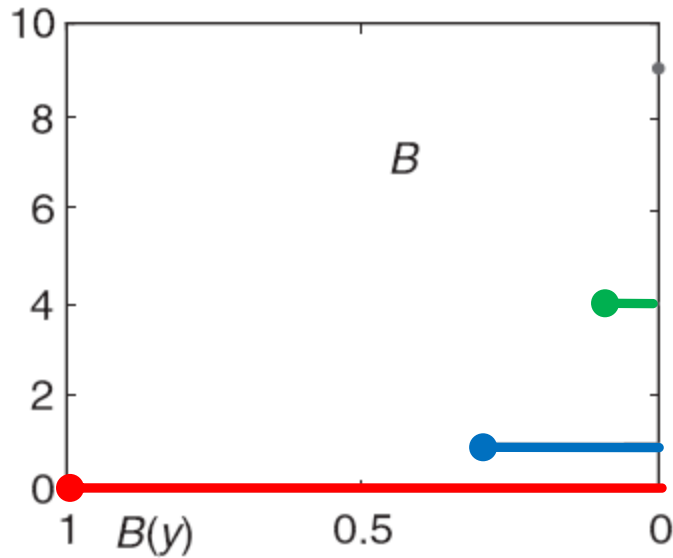
مجموعه‌ی فازی $B=f(A)$ را تعیین نمایید.

$$A = \frac{0.2}{-2} + \frac{0.5}{-1} + \frac{0.7}{0} + \frac{0.9}{1} + \frac{0.4}{2}$$

$$B = \frac{\max(0.2, 0.4)}{5} + \frac{\max(0.5, 0.9)}{2} + \frac{0.7}{1} = \frac{0.4}{5} + \frac{0.9}{2} + \frac{0.7}{1}$$

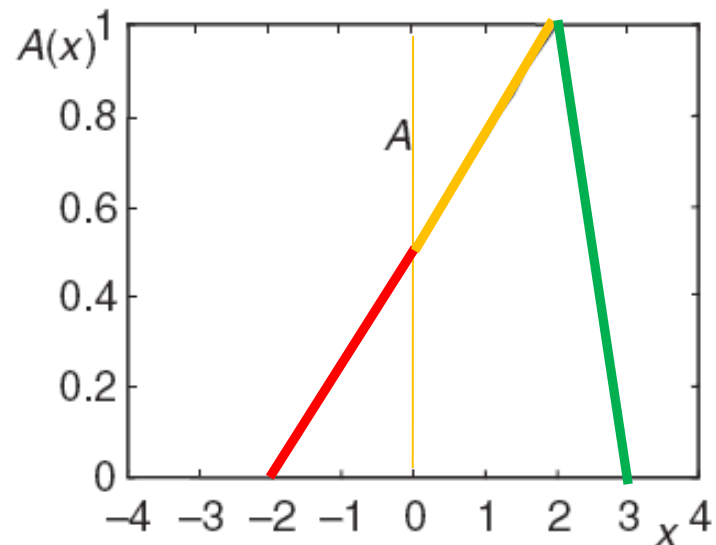
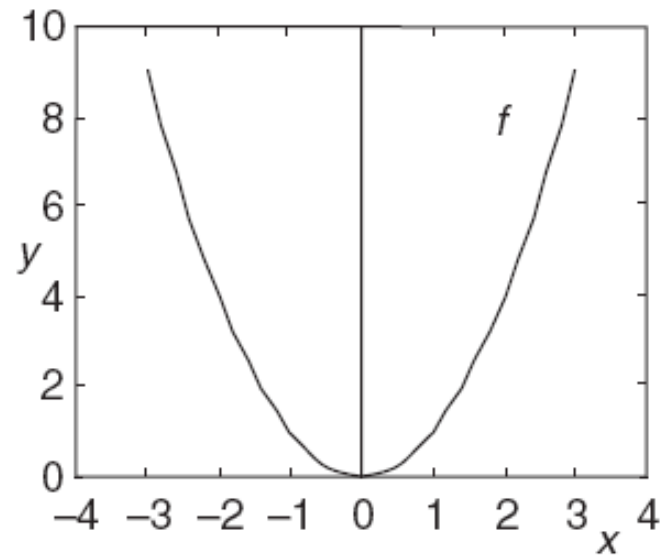
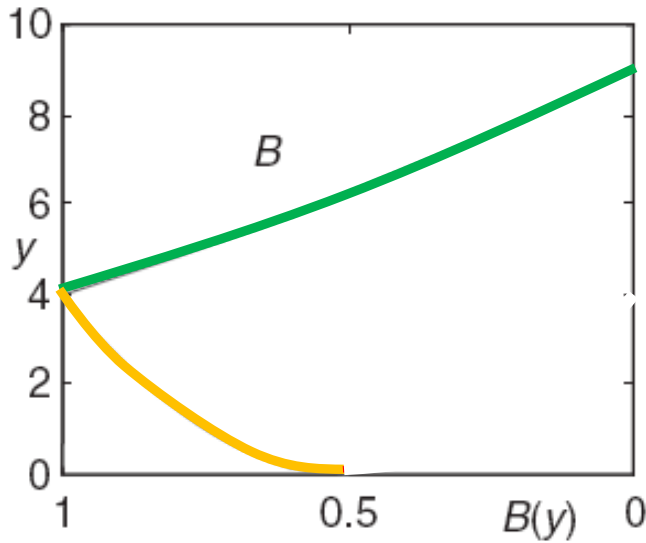
مثال: مجموعه‌ی فازی A و تابع $f(x)=x^2$ را در نظر بگیرید. بر اساس اصل

توسعه، مجموعه‌ی فازی $B=f(A)$ را تعیین نمایید.



مثال: مجموعه‌ی فازی A و تابع $f(x)=x^2$ را در نظر بگیرید. بر اساس اصل

توسعه، مجموعه‌ی فازی $B=f(A)$ را تعیین نمایید.



فرم کلی تر اصل توسعه :

دستور کار این جلسه:

رابطه های فازی

- ✓ ضرب کارت‌تزیین
- ✓ رابطه‌ی کلاسیک
- ✓ رابطه‌ی فازی
- ✓ تصویر کردن و گسترش استوانه‌ای روابط
- ✓ ترکیب روابط تُرد
- ✓ ترکیب روابط فازی
- ✓ اصل توسعه

QUESTIONS?



موعد تحویل سری اول تمرین‌های درس