هرکه گوید جمله حق است احمقی است

آن که گوید جمله باطل، او شقی است

مولانا

سیستم‌های فازی

8

۱

Presented By: A. Maleki

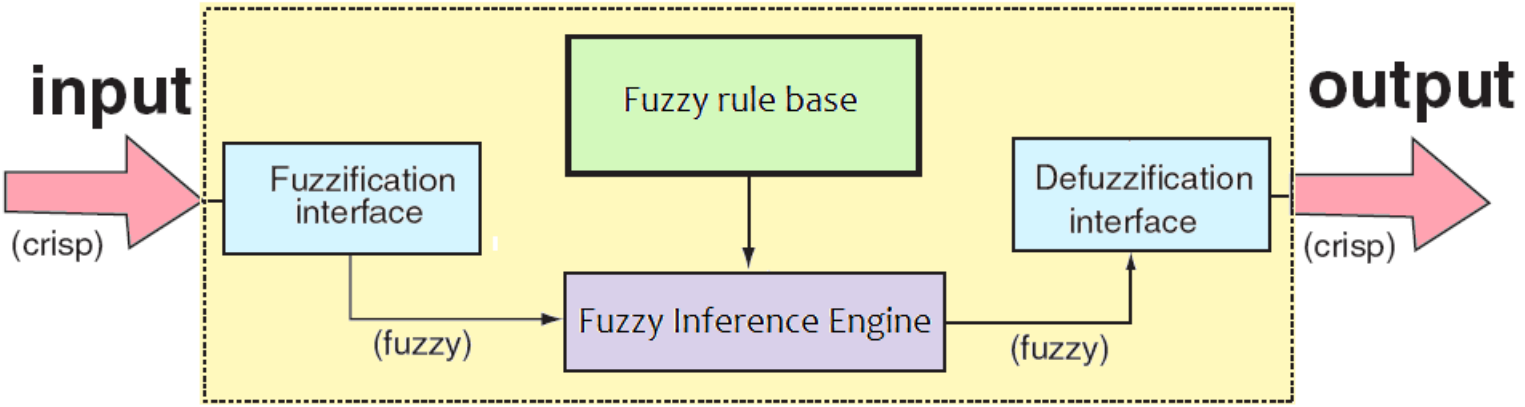
Fall 2021

دستورکار این جلسه:

فازی سازها و نافازی سازها

- مقدمه
- فازی‌سازها (معیارهای طراحی، معرفی انواع و مقایسه)
- نافازی‌سازها (معیارهای انتخاب، معرفی انواع و مقایسه)
- مثال‌ها

مقدمه:



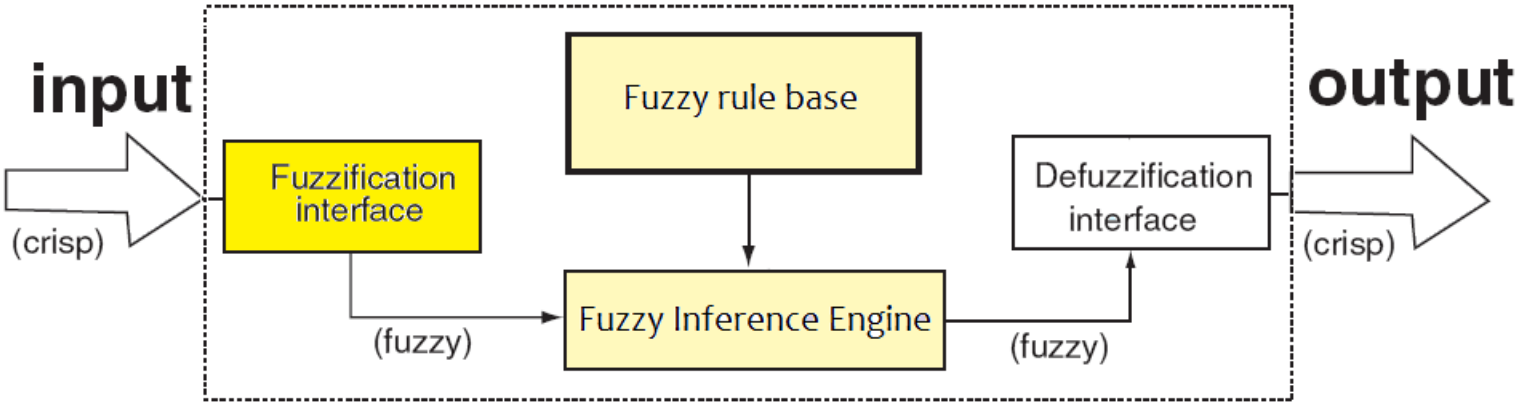
- ضرورت وجود فازی‌ساز و نافازی‌ساز:

ورودی و خروجی موتور استنتاج فازی، فازی هستند درحالی‌که در اغلب کاربردها، ورودی و خروجی سیستم فازی مقادیر عددی می‌باشند. از این رو به واسطه‌هایی نیاز است که تبدیل‌های لازم را انجام دهند.

واژه‌نامه

فازی ساز	fuzzifier
نافازی ساز	defuzzifier

فازی‌ساز:



- فازی‌ساز واسطی است که مقادیر حقیقی $x^* \in U \subset R^n$ را به مجموعه‌ی فازی A' در U می‌نگارد.

معیارهای طراحی فازی‌ساز:

- فازی ساز باید این حقیقت که ورودی در مقدار غیرفازی x^* است را لحاظ نماید بدان معنا که مجموعه ی فازی A' باید دارای مقدار عضویت بزرگی در x^* باشد.
- اگر ورودی سیستم فازی توسط نویز خراب شد مطلوب است که فازی ساز به حذف نویز کمک نماید.
- مطلوب است که فازی ساز به ساده شدن محاسبات در موتور استنتاج فازی کمک نماید.

پیچیده ترین عملیات محاسباتی در موتور استنتاج فازی، sup است بنابراین مطلوب است فازی ساز موجب ساده شدن محاسبات sup گردد.

فازی‌سازها:

- فازی‌ساز singleton
- فازی‌ساز گوسی
- فازی‌ساز مثلثی

فازی‌ساز singleton:

- این فازی‌ساز، مقدار عددی حقیقی $x^* \in U$ را به singleton فازی A' در U می نگارد:

$$\mu_{A'}(x) = \begin{cases} 1 & if\ x = x^* \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

فازی‌ساز گوسی:

- این فازی‌ساز، مقدار عددی حقیقی $x^* \in U$ را به مجموعه‌ی فازی A' در U می نگارد:

$$\mu_{A'}(x) = e^{-\left(\frac{x_1 - x_1^*}{a_1}\right)^2} \star \cdots \star e^{-\left(\frac{x_n - x_n^*}{a_n}\right)^2}$$

که در آن a_i پارامتری مثبت است و معمولا برای t-norm (★) از ضرب جبری یا مینیمم استفاده می‌گردد.

فازی‌ساز مثلثی:

- این فازی‌ساز، مقدار عددی حقیقی $x^* \in U$ را به مجموعه‌ی فازی A' در U می نگارد:

$$\mu_{A'}(x) = \begin{cases} \left(1 - \frac{|x_1 - x_1^*|}{b_1}\right) \star \cdots \star \left(1 - \frac{|x_n - x_n^*|}{b_n}\right) & if\ |x_i - x_i^*| \le b_i \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

که در آن b_i پارامتری مثبت است و معمولا برای t-norm ($\star$) از ضرب جبری یا مینیمم استفاده می‌گردد.

ساده شدن محاسبات موتور استنتاج فازی برای فازی‌ساز singleton

یادآوری:

- موتور استنتاج ضرب:

$$\mu_{B'}(y) = \max_{l=1:M}\left[\sup_{x\epsilon U}\left(\mu_{A'}(x)\prod_{i=1}^{n}\mu_{A_i^l}(x_i)\,\mu_{B^l}(y)\right)\right]$$

$$\xrightarrow{yields}\ \mu_{B'}(y) = \max_{l=1:M}\left[\prod_{i=1}^{n}\mu_{A_i^l}(x_i^*)\,\mu_{B^l}(y)\right]$$

- موتور استنتاج مینیمم:

$$\mu_{B'}(y) = \max_{l=1:M}\left[\sup_{x\epsilon U} min\left(\mu_{A'}(x), \mu_{A_1^l}(x_1), \cdots, \mu_{A_n^l}(x_n), \mu_{B^l}(y)\right)\right]$$

$$\xrightarrow{yields}\ \mu_{B'}(y) = \max_{l=1:M}\left[min\left(\mu_{A_1^l}(x_1^*), \cdots, \mu_{A_n^l}(x_n^*), \mu_{B^l}(y)\right)\right]$$

ساده شدن محاسبات موتور استنتاج فازی برای فازی‌ساز singleton

یادآوری:

- موتور استنتاج Lukasiewicz:

$$\mu_{B'}(y) = \min_{l=1:M}\left[\sup_{x\epsilon U} min\left(\mu_{A'}(x), 1 - \min_{i=1:n}\left(\mu_{A_i^l}(x_i)\right) + \mu_{B^l}(y)\right)\right]$$

$$\xrightarrow{yields} \mu_{B'}(y) = \min_{l=1:M}\left[1, 1 - \min_{i=1:n}\left(\mu_{A_i^l}(x_i^*)\right) + \mu_{B^l}(y)\right]$$

- موتور استنتاج Zadeh:

$$\mu_{B'}(y) = \min_{l=1:M}\left[\sup_{x\epsilon U} min\left(\mu_{A'}(x), max\left(min\left(\mu_{A_1^l}(x_1), \cdots, \mu_{A_n^l}(x_n), \mu_{B^l}(y)\right), 1 - \min_{i=1:n}\left(\mu_{A_i^l}(x_i)\right)\right)\right)\right]$$

$$\mu_{B'}(y) = \min_{l=1:M}\left[max\left(min\left(\mu_{A_1^l}(x_1^*), \cdots, \mu_{A_n^l}(x_n^*), \mu_{B^l}(y)\right), 1 - \min_{i=1:n}\left(\mu_{A_i^l}(x_i^*)\right)\right)\right]$$

ساده شدن محاسبات موتور استنتاج فازی برای فازی‌ساز singleton

یادآوری:

- موتور استنتاج Dienes-Rescher :

$$\mu_{B'}(y) = \min_{l=1:M} \left[\sup_{x \epsilon U} min \left(\mu_{A'}(x) , max \left(1 - \min_{i=1:n} \left(\mu_{A_i^l}(x_i) \right) , \mu_{B^l}(y) \right) \right) \right]$$

$$\xrightarrow{yields} \mu_{B'}(y) = \min_{l=1:M} \left[max \left(1 - \min_{i=1:n} \left(\mu_{A_i^l}(x_i^*) \right) , \mu_{B^l}(y) \right) \right]$$

ساده شدن محاسبات موتور استنتاج فازی برای فازی‌ساز گوسی:

- فرض کنید پایگاه قواعدی شامل M قاعده با ویژگی‌های زیر باشد:

$$Ru^{(l)}: IF\ x_1 is\ A_1^l\ and \dots and\ x_n is\ A_n^l, THEN\ y\ is\ B^l, \quad l = 1, \cdots, M$$

$$\mu_{A_i^l}(x_i) = e^{-\left(\frac{x_i - \bar{x}_i^l}{\sigma_i^l}\right)^2} \qquad \bar{x}_i^l\ and\ \sigma_i^l : constant\ parameters, \quad i = 1, \cdots, n, \quad l = 1, \cdots, M$$

با استفاده از فازی‌ساز گوسی، موتور استنتاج ضرب و ضرب جبری برای t-norm داریم:

$$\mu_{B'}(y) = \max_{l=1:M}\left[\prod_{i=1}^{n} e^{-\left(\frac{x_{iP}^l - \bar{x}_i^l}{\sigma_i^l}\right)^2} e^{-\left(\frac{x_{iP}^l - x_i^*}{a_i}\right)^2} \mu_{B^l}(y)\right], \qquad x_{iP}^l = \frac{a_i^2 \bar{x}_i^l + (\sigma_i^l)^2 x_i^*}{a_i^2 + (\sigma_i^l)^2}$$

یادآوری موتور استنتاج ضرب:

$$\mu_{B'}(y) = \max_{l=1:M}\left[\sup_{x \epsilon U}\left(\mu_{A'}(x) \prod_{i=1}^{n} \mu_{A_i^l}(x_i)\, \mu_{B^l}(y)\right)\right]$$

یادآوری فازی‌ساز گوسی:

$$\mu_{A'}(x) = e^{-\left(\frac{x_1 - x_1^*}{a_1}\right)^2} \star \cdots \star e^{-\left(\frac{x_n - x_n^*}{a_n}\right)^2}$$

ساده شدن محاسبات موتور استنتاج فازی برای فازی‌ساز گوسی:

- فرض کنید پایگاه قواعدی شامل M قاعده با ویژگی‌های زیر باشد:

$$Ru^{(l)}: IF\ x_1 is\ A_1^l\ and \dots and\ x_n is\ A_n^l, THEN\ y\ is\ B^l, \qquad l = 1, \cdots, M$$

$$\mu_{A_i^l}(x_i) = e^{-\left(\frac{x_i - \bar{x}_i^l}{\sigma_i^l}\right)^2} \qquad \bar{x}_i^l\ and\ \sigma_i^l : constant\ parameters, \quad i = 1, \cdots, n, \quad l = 1, \cdots, M$$

با استفاده از فازی‌ساز گوسی، موتور استنتاج مینیمم و مینیمم برای t-norm داریم:

$$\mu_{B'}(y) = \max_{l=1:M}\left[min\left(e^{-\left(\frac{x_{1M}^l - \bar{x}_1^l}{\sigma_1^l}\right)^2}, \cdots, e^{-\left(\frac{x_{nM}^l - \bar{x}_n^l}{a_n}\right)^2}, \mu_{B^l}(y)\right)\right], \quad x_{iM}^l = \frac{a_i \bar{x}_i^l + \sigma_i^l x_i^*}{a_i + \sigma_i^l}$$

یادآوری موتور استنتاج مینیمم:

$$\mu_{B'}(y) = \max_{l=1:M}\left[\sup_{x \epsilon U} min\left(\mu_{A'}(x), \mu_{A_1^l}(x_1), \cdots, \mu_{A_n^l}(x_n), \mu_{B^l}(y)\right)\right]$$

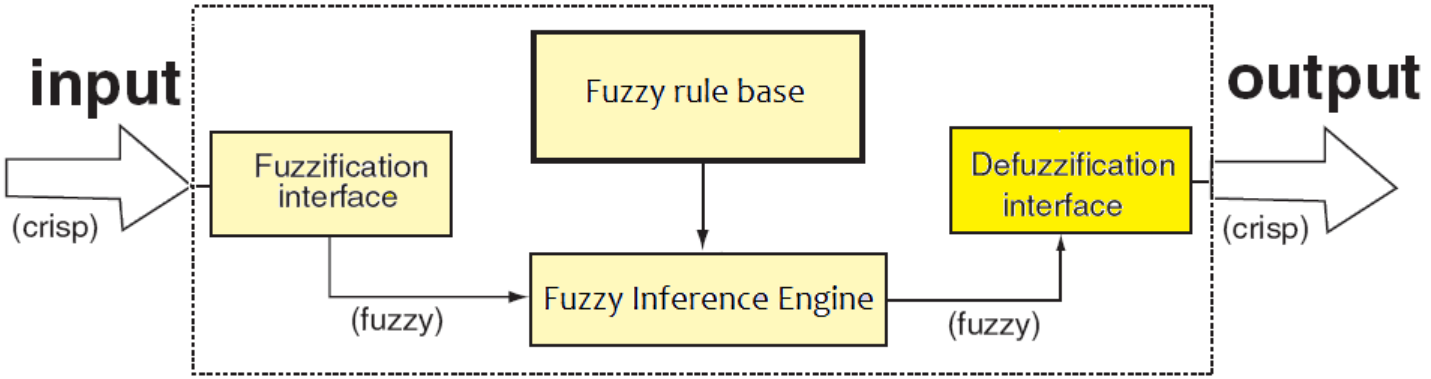
یادآوری فازی ساز گوسی:

$$\mu_{A'}(x) = e^{-\left(\frac{x_1 - x_1^*}{a_1}\right)^2} \star \cdots \star e^{-\left(\frac{x_n - x_n^*}{a_n}\right)^2}$$

جمع‌بندی ویژگی‌های فازی‌سازها:

- در هر سه فازی ساز $\mu_{A'}(x^*) = 1$ است که نشانگر برآورده شدن معیار اول طراحی فازی سازها می باشد.
- مستقل از نوع قواعد فازی، استفاده از فازی ساز singleton ، محاسبات موتور استنتاج فازی را به میزان قابل توجهی کاهش می دهد.
- درصورتی که توابع عضویت قواعد فازی، گوسی باشند استفاده از فازی ساز گوسی موجب کاهش محاسبات در موتور استنتاج فازی می گردد.
- درصورتی که تابع عضویت قواعد فازی، مثلثی باشند استفاده از فازی ساز مثلثی موجب کاهش محاسبات در موتور استنتاج فازی می گردد.
- فازی سازهای گوسی و مثلثی از قابلیت جلوگیری از نویز در ورودی برخوردارند ولی فازی ساز singleton فاقد این قابلیت است.

نافازی‌ساز:



- نافازی ساز واسطی است که مجموعه ی فازی B' در V (خروجی موتور استنتاج) را به مقادیر غیرفازی $y^* \in V$ می نگارد.

به بیان مفهومی‌تر، وظیفه‌ی نافازی‌ساز، تعیین نقطه‌ای در V است که به بهترین صورت، مجموعه‌ی فازی B' را بازنمایی می‌کند.

معیارهای انتخاب نافازی‌ساز:

- **معقول بودن:** نقطه‌ی y^* بایستی به طور شهودی نمایانگر B' باشد. به عنوان مثال، به طور تقریبی در میانه‌ی تکیه‌گاه باشد یا دارای مقدار عضویت بزرگی در B' باشد.
- **سادگی محاسباتی:** این معیار به طور خاص برای **کنترل فازی** اهمیت دارد زیرا کنترل‌گرهای فازی باید به طور **real-time** عمل نمایند.
- **پیوسته بودن:** تغییرات اندک در B' نبایستی به تغییرات بزرگ در y^* منجر گردد.

واژه‌نامه

معقول بودن	plausibility
سادگی محاسباتی	computational simplicity
پیوسته بودن	continuity
تکیه‌گاه	support

نافازی‌سازها:

- نافازی‌ساز مرکز ثقل
- نافازی‌ساز متوسط مراکز
- نافازی‌ساز ماکزیمم

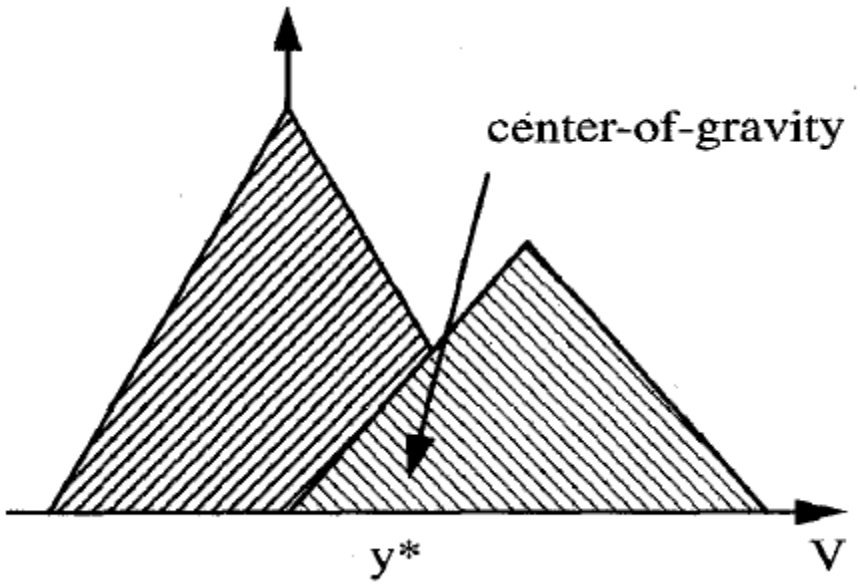
واژه‌نامه

نافازی‌ساز مرکز ثقل	center of gravity defuzzifier
نافازی‌ساز متوسط مراکز	center average defuzzifier
نافازی‌ساز ماکزیمم	maximum defuzzifier

نافازی‌ساز مرکز ثقل:

$$y^* = \frac{\int_V y\,\mu_{B'}(y)dy}{\int_V \mu_{B'}(y)dy}$$

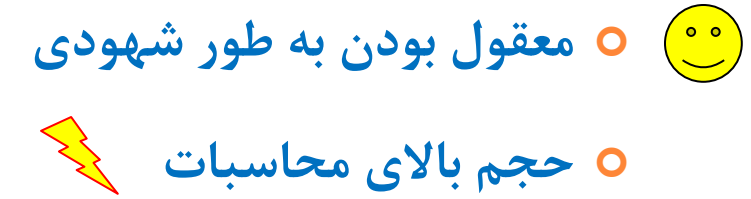
مرکز ناحیه‌ی پوشش داده شده
توسط تابع عضویت B'



- گاهی اوقات بهتر است نقاطی که میزان تعلق آنها در B' بسیار کوچک است از محاسبات حذف گردد که در این صورت به آن **indexed center of gravity defuzzifier** گوییم.

$$y^* = \frac{\int_{V_\alpha} y\,\mu_{B'}(y)dy}{\int_{V_\alpha} \mu_{B'}(y)dy} \qquad ,V_\alpha = \{y\varepsilon V \mid \mu_{B'}(y) \geq \alpha\}$$

ارزیابی نافازی‌ساز مرکز ثقل:



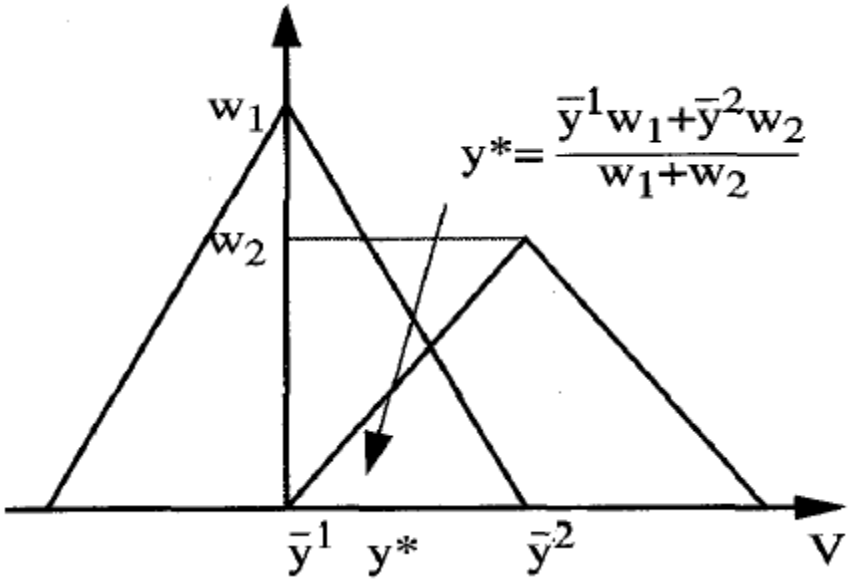
- معقول بودن به طور شهودی
- حجم بالای محاسبات

نافازی‌ساز متوسط مراکز:

$$y^* = \frac{\sum_{l=1}^{M} \bar{y}^l \, w_l}{\sum_{l=1}^{M} w_l}$$

$\bar{y}^l$: the center of the l′th fuzzy set

w_l : the height of the l′th fuzzy set



این نافازی‌ساز، پرکاربردترین نافازی‌ساز در سیستم‌های فازی و کنترل فازی می‌باشد.

ارزیابی نافازی‌ساز متوسط مراکز:

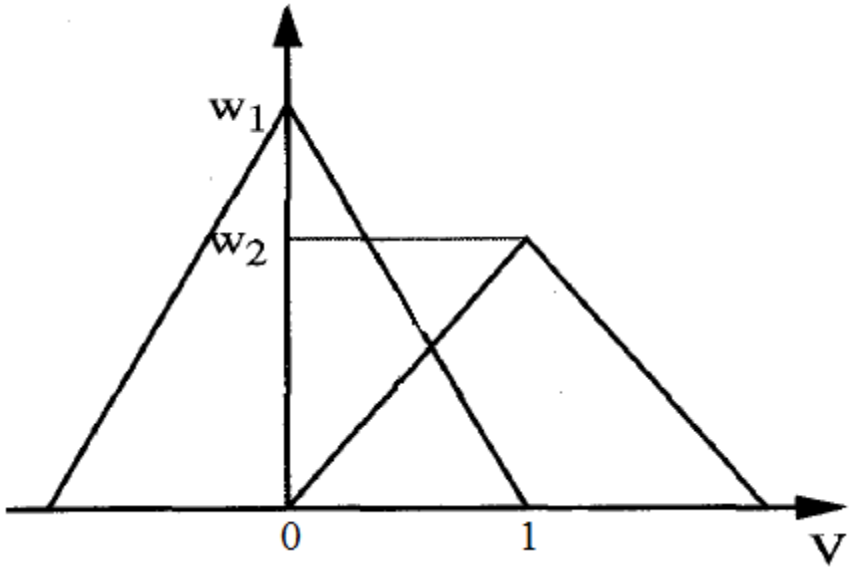
- معقول بودن به طور شهودی
- محاسبات ساده
- تغییرات اندک در $\bar{y}^l$ و w_l به تغییرات اندکی در y^* منجر می‌گردد.

مثال:

فرض کنید مجموعه‌ی فازی 'B اجتماع دو مجموعه‌ی فازی نشان داده شده در شکل زیر باشد. با استفاده از نافازی‌سازهای تعیین شده، *y را محاسبه نمایید.

الف: نافازی‌ساز متوسط مراکز

ب: نافازی‌ساز مرکز ثقل



محل برخورد دو مجموعه‌ی فازی $y = \frac{w_1}{w_1 + w_2}$

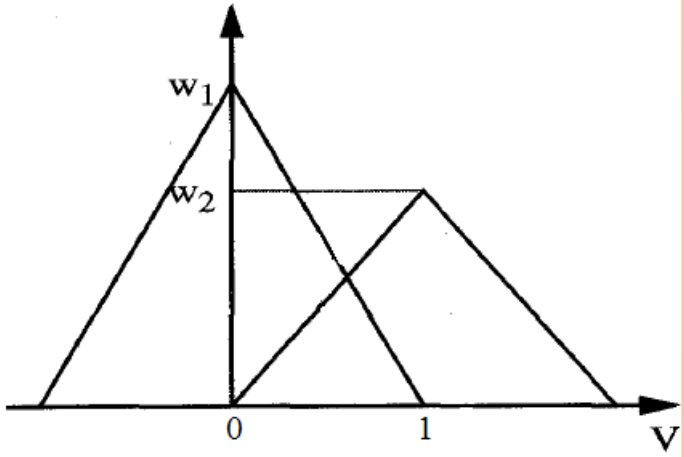
مثال:

فرض کنید مجموعه‌ی فازی B' اجتماع دو مجموعه‌ی فازی نشان داده شده در شکل زیر باشد. با استفاده از نافازی‌سازهای تعیین شده، y^* را محاسبه نمایید.

الف: نافازی‌ساز متوسط مراکز $y = \frac{w_1}{w_1 + w_2}$ **محل برخورد دو مجموعه‌ی فازی**

ب: نافازی‌ساز مرکز ثقل

$$y^* = \frac{w_2}{w_1 + w_2}$$

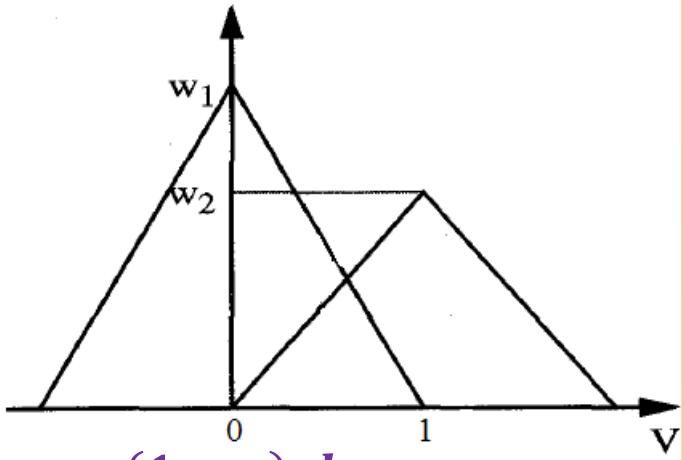


مثال:

فرض کنید مجموعه‌ی فازی B' اجتماع دو مجموعه‌ی فازی نشان داده شده در شکل زیر باشد. با استفاده از نافازی‌سازهای تعیین شده، y* را محاسبه نمایید.

الف: نافازی‌ساز متوسط مراکز $y = \frac{w_1}{w_1 + w_2}$ محل برخورد دو مجموعه‌ی فازی

ب: نافازی‌ساز مرکز ثقل



$$y^* = \frac{\int_V y\,\mu_{B'}(y)dy}{\int_V \mu_{B'}(y)dy}$$

$$\int_V \mu_{B'}(y)\,dy = w_1 + w_2 - \frac{1}{2}w_2\frac{w_1}{w_1 + w_2}$$

$$\int_V y\,\mu_{B'}(y)\,dy = \int_{-1}^{0} y\,w_1\,(1+y)\,dy + \int_{0}^{\frac{w_1}{w_1+w_2}} y\,w_1\,(1-y)\,dy$$

$$+ \int_{\frac{w_1}{w_1+w_2}}^{1} y\,w_2\,y\,dy + \int_{1}^{2} y\,w_2\,(2-y)\,dy$$

$$= -\frac{1}{6}w_1 + w_2 + \frac{1}{6}\frac{w_1^3}{(w_1 + w_2)^2}$$

مثال:

فرض کنید مجموعه‌ی فازی B' اجتماع دو مجموعه‌ی فازی نشان داده شده در شکل زیر باشد. با استفاده از نافازی‌سازهای تعیین شده، y* را محاسبه نمایید.

الف: نافازی‌ساز متوسط مراکز

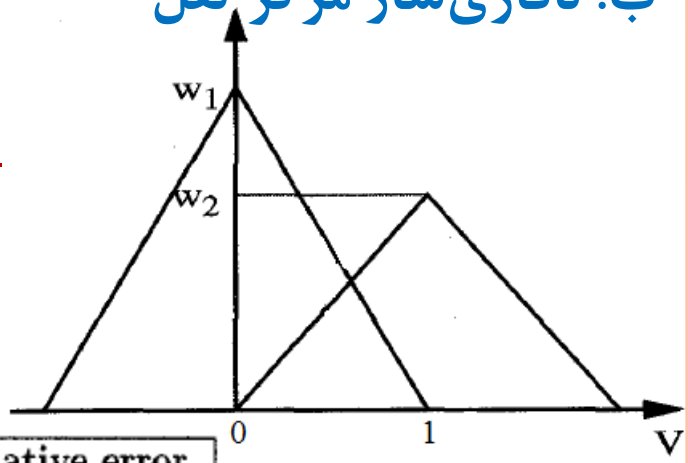
برای نافازی‌ساز متوسط مراکز $y^* = \dfrac{w_2}{w_1 + w_2}$

ب: نافازی‌ساز مرکز ثقل

$$\int_V \mu_{B'}(y)\, dy = w_1 + w_2 - \frac{1}{2} w_2 \frac{w_1}{w_1 + w_2}$$

$$\int_V y\, \mu_{B'}(y)\, dy = -\frac{1}{6} w_1 + w_2 + \frac{1}{6} \frac{w_1^3}{(w_1 + w_2)^2}$$

برای نافازی‌ساز مرکز ثقل $y^* = \dfrac{\int_V y\, \mu_{B'}(y) dy}{\int_V \mu_{B'}(y) dy}$



w_1	w_2	y^* (center of gravity)	y^* (center average)	relative error
0.9	0.7	0.4258	0.4375	0.0275
0.9	0.5	0.5457	0.5385	0.0133
0.9	0.2	0.7313	0.7000	0.0428
0.6	0.7	0.3324	0.3571	0.0743
0.6	0.5	0.4460	0.4545	0.0192
0.6	0.2	0.6471	0.6250	0.0342
0.3	0.7	0.1477	0.1818	0.2308
0.3	0.5	0.2155	0.2500	0.1600
0.3	0.2	0.3818	0.4000	0.0476

نافازی‌ساز ماکزیمم:

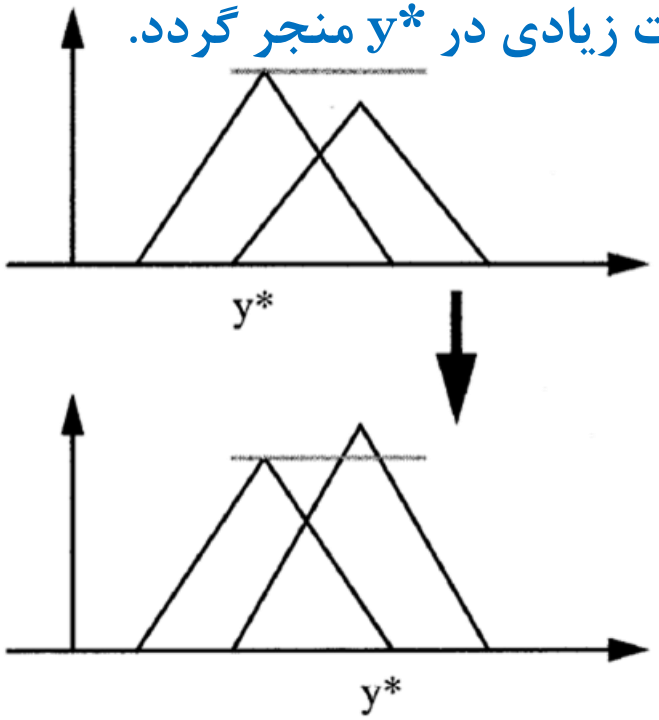
$$hgt(B') = \left\{ y \, \varepsilon \, V \mid \mu_{B'}(y) = \sup_{y \epsilon V} \mu_{B'}(y) \right\}$$

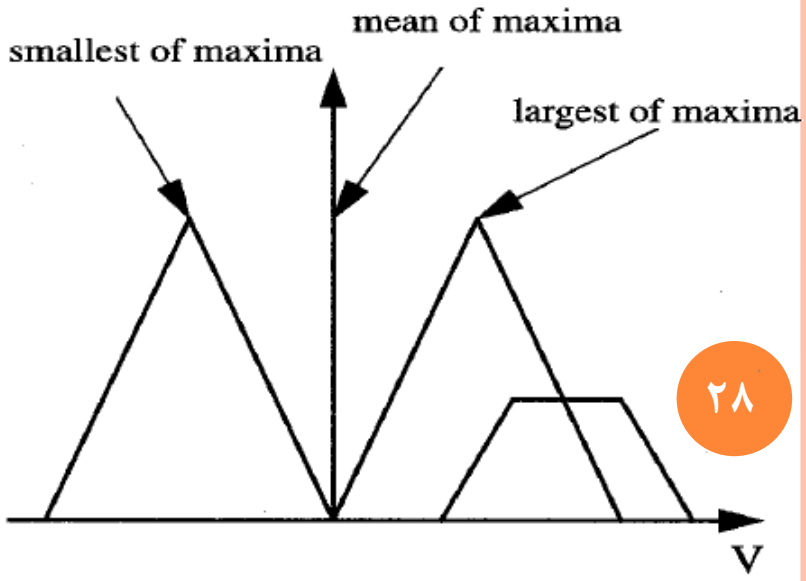
y^* : any point in $hgt(B')$

- Smallest of maxima defuzzifier: $y^* = inf \{ y \, \epsilon \, hgt(B') \}$
- Largest of maxima defuzzifier: $y^* = sup \{ y \, \epsilon \, hgt(B') \}$
- Mean of maxima defuzzifier: $y^* = \dfrac{\int_{hgt(B')} y \, dy}{\int_{hgt(B')} dy}$

ارزیابی نافازی‌ساز ماکزیمم:

- معقول بودن به طور شهودی
- سادگی محاسباتی
- تناقض mean of maxima defuzzifier با مفهوم شهودی ماکزیمم مقدار عضویت
- تغییرات اندک در B' ممکن است به تغییرات زیادی در y* منجر گردد.





مقایسه‌ی نافازی‌سازها:

	center of gravity	center average	maximum
plausibility	yes	yes	yes
computational simplicity	no	yes	yes
continuity	yes	yes	no

مثال:

یک سیستم دو ورودی- یک خروجی در نظر بگیرید که از دو قاعده‌ی زیر تشکیل شده است:

$$Ru^{(1)}: IF\ x_1 is\ A_1\ and\ x_2 is\ A_2, THEN\ y\ is\ A_1$$

$$Ru^{(2)}: IF\ x_1 is\ A_2\ and\ x_2 is\ A_1, THEN\ y\ is\ A_2$$

که A_1 و A_2 مجموعه‌های فازی در R با تابع عضویت زیر می‌باشند:

$$\mu_{A_1}(u) = \begin{cases} 1-|u| & -1 \le u \le 1 \\ 0 & otherwise \end{cases} \qquad \mu_{A_2}(u) = \begin{cases} 1-|u-1| & 0 \le u \le 2 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

فرض کنید ورودی سیستم فازی $(x_1^*, x_2^*) = (0.3, 0.6)$ است و از فازی‌ساز singleton استفاده می‌گردد. خروجی سیستم فازی y* را در شرایط زیر تعیین نمایید.

الف: موتور استنتاج ضرب و نافازی‌ساز متوسط مراکز

ب: موتور استنتاج ضرب و نافازی‌ساز مرکز ثقل

ج: موتور استنتاج Lukasiewicz و نافازی‌ساز mean of maxima

د: موتور استنتاج Lukasiewicz و نافازی‌ساز متوسط مراکز

حل الف:

الف: موتور استنتاج ضرب و نافازی‌ساز متوسط مراکز

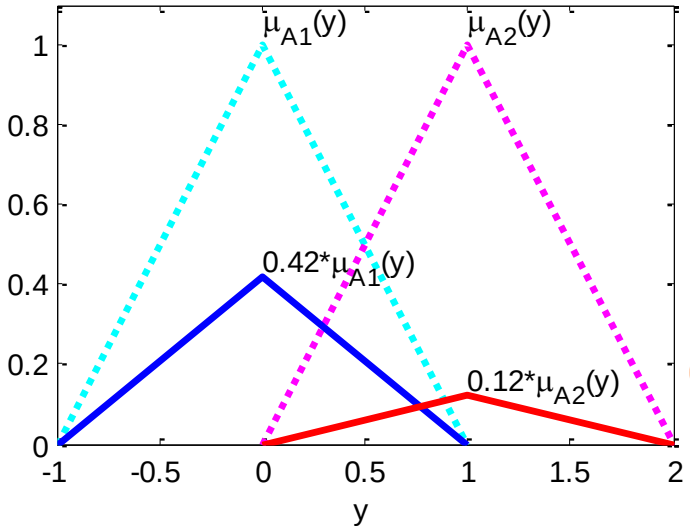
$$\mu_{B'}(y) = \max_{l=1:M}\left[\prod_{i=1}^{n}\mu_{A_i^l}(x_i^*)\,\mu_{B^l}(y)\right]$$

$$= max\left[\mu_{A_1}(0.3)\,\mu_{A_2}(0.6)\,\mu_{A_1}(y)\,,\mu_{A_2}(0.3)\,\mu_{A_1}(0.6)\,\mu_{A_2}(y)\right]$$

$$= max\left[(0.7)\,(0.6)\,\mu_{A_1}(y)\,,(0.3)\,(0.4)\;\mu_{A_2}(y)\right]$$

$$= max\left[0.42\,\mu_{A_1}(y)\,,0.12\;\mu_{A_2}(y)\right]$$

$$y^* = \frac{0.42\times 0 + 0.12\times 1}{0.42+0.12} = 0.\overline{2}$$



حل ب:

ب: موتور استنتاج ضرب و نافازی‌ساز مرکز ثقل

$$\mu_{B'}(y) = \max_{l=1:M}\left[\prod_{i=1}^{n}\mu_{A_i^l}(x_i^*)\,\mu_{B^l}(y)\right]$$

$$= max\left[\mu_{A_1}(0.3)\,\mu_{A_2}(0.6)\,\mu_{A_1}(y)\,,\mu_{A_2}(0.3)\,\mu_{A_1}(0.6)\,\mu_{A_2}(y)\right]$$

$$= max\left[(0.7)\,(0.6)\,\mu_{A_1}(y)\,,(0.3)\,(0.4)\;\mu_{A_2}(y)\right]$$

$$= max\left[0.42\,\mu_{A_1}(y)\,,0.12\;\mu_{A_2}(y)\right]$$

$$\int_V \mu_{B'}(y)dy = 0.42 + 0.12 - \frac{1}{2}\times\frac{0.42\times 0.12}{0.12+0.42} = 0.4933$$

$$\int_V y\,\mu_{B'}(y)dy = -\frac{1}{6}\,w_1 + w_2 + \frac{1}{6}\frac{w_1^3}{(w_1+w_2)^2}$$

$$= -\frac{1}{6}\times.42 + 0.12 + \frac{1}{6}\times\frac{(0.42)^3}{(0.42+0.12)^2} = 0.0932$$

$$y^* = \frac{\int_V y\,\mu_{B'}(y)dy}{\int_V \mu_{B'}(y)dy} = \frac{0.0932}{0.4933} = 0.1871$$

حل ج:

ج: موتور استنتاج Lukasiewicz و نافازی‌ساز mean of maxima

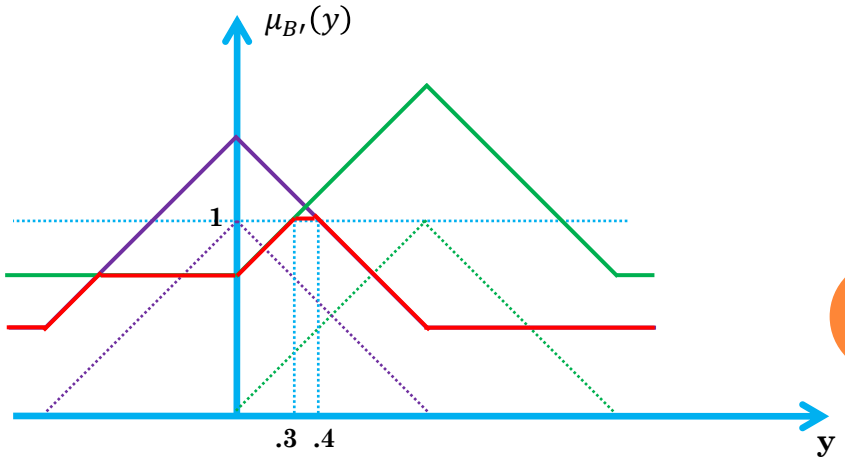
$$\mu_{B'}(y) = \min_{l=1:M}\left[1, 1 - \min_{i=1:n}\left(\mu_{A_i^l}(x_i^*)\right) + \mu_{B^l}(y)\right]$$

$$= \min\left[1, 1 - \min\left(\mu_{A_1}(0.3), \mu_{A_2}(0.6)\right) + \mu_{A_1}(y),\right.$$
$$\left. 1 - \min\left(\mu_{A_2}(0.3), \mu_{A_1}(0.6)\right) + \mu_{A_2}(y)\right]$$

$$= min\left[1, 1 - min(0.7, 0.6) + \mu_{A_1}(y), 1 - min(0.3, 0.4) + \mu_{A_2}(y)\right]$$

$$= min\left[1, 0.4 + \mu_{A_1}(y), 0.7 + \mu_{A_2}(y)\right]$$

$$y^* = 0.35$$



حل د:

د: موتور استنتاج Lukasiewicz و نافازی‌ساز متوسط مراکز

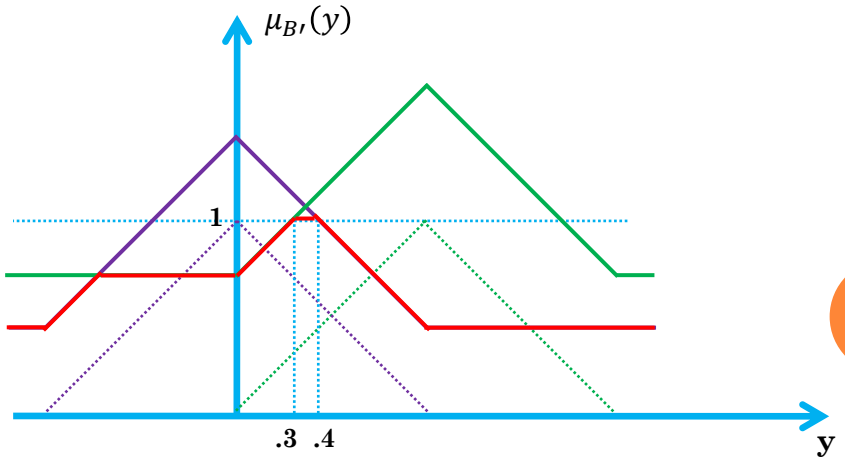
$$\mu_{B'}(y) = \min_{l=1:M}\left[1, 1 - \min_{i=1:n}\left(\mu_{A_i^l}(x_i^*)\right) + \mu_{B^l}(y)\right]$$

$$= \min\left[1, 1 - \min\left(\mu_{A_1}(0.3), \mu_{A_2}(0.6)\right) + \mu_{A_1}(y),\right.$$
$$\left. 1 - \min\left(\mu_{A_2}(0.3), \mu_{A_1}(0.6)\right) + \mu_{A_2}(y)\right]$$

$$= min\left[1, 1 - min(0.7, 0.6) + \mu_{A_1}(y), 1 - min(0.3, 0.4) + \mu_{A_2}(y)\right]$$

$$= min\left[1, 0.4 + \mu_{A_1}(y), 0.7 + \mu_{A_2}(y)\right]$$

$$y^* = \frac{0 \times 0.7 + 1 \times 0.4}{0.7 + 0.4} = \frac{4}{11} = 0.36$$



QUESTIONS?