

هر که گوید جمله حق است احمق است

آن که گوید جمله باطل، اوستی است
مولانا

سیستم‌های فازی

9

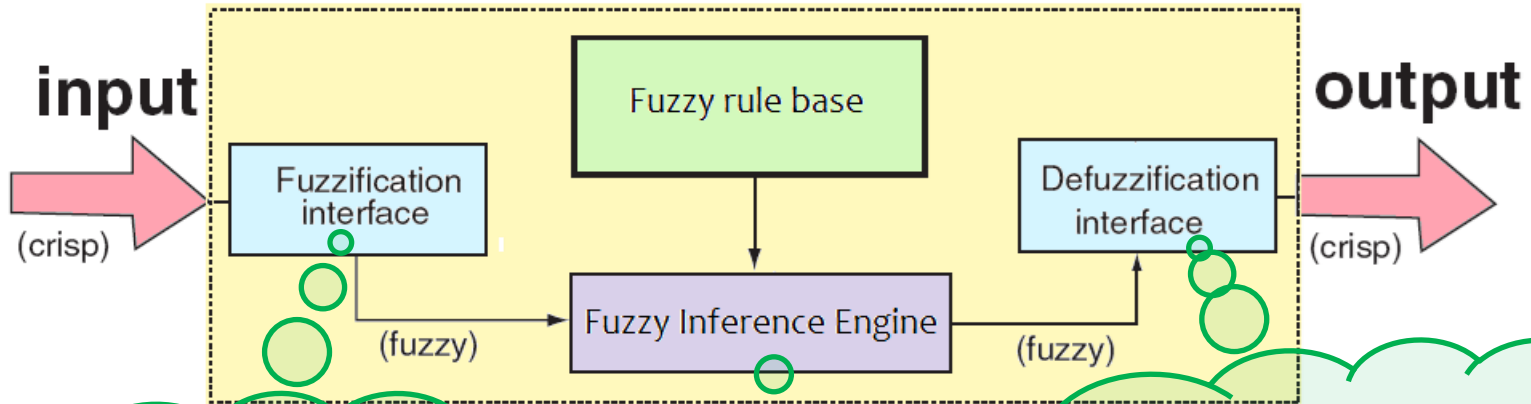
Presented By: A. Maleki
Fall 2021

دستور کار این جلسه:

سیستم های فازی در نقش مگاشت غیر خطی

- مقدمه
- سیستم های فازی با نافازی ساز متوسط مراکز
- سیستم های فازی با نافازی ساز ماکزیمم
- سیستم های فازی به عنوان تقریب گر عمومی
- قضیه ی تقریب عمومی

مقدمه:



فازی ساز Singleton
فازی ساز گوسی
فازی ساز مثلثی

نافازی ساز مرکز ثقل
نافازی ساز متوسط مراکز
نافازی ساز ماکزیمم

موتور استنتاج ضرب
موتور استنتاج مینیمم

موتور استنتاج Lukasiewicz

موتور استنتاج Zadeh

موتور استنتاج Dienes-Rescher

بنابراین، ترکیب های
مختلف سیستم فازی:

$3 \times 5 \times 3$

«نافازی ساز مرکز ثقل» از نظر محاسباتی بسیار پرهزینه است در حالی که «نافازی ساز متوسط مراکز» تقریب خوبی از آن است و هزینه‌ی محاسباتی بسیار کمتری دارد. از این رو، سیستم‌های فازی را به دو دسته تقسیم می‌کنیم:

- ۱- سیستم‌های فازی با نافازی ساز متوسط مراکز
- ۲- سیستم‌های فازی با نافازی ساز ماکزیمم



سیستم‌های فازی با نافازی‌ساز متوسط مراکز:

○ سیستم فازی با موتور استنتاج ضرب، فازی‌ساز singleton و نافازی‌ساز متوسط مراکز

○ سیستم فازی با موتور استنتاج مینیمم، فازی‌ساز singleton و نافازی‌ساز متوسط مراکز

○ سیستم فازی با موتور استنتاج ضرب، فازی‌ساز گوسی با ضرب جبری برای t-norm و

نافازی‌ساز متوسط مراکز

○ سیستم فازی با موتور استنتاج مینیمم، فازی‌ساز گوسی با مینیمم برای t-norm و

نافازی‌ساز متوسط مراکز

○ سیستم فازی با موتور استنتاج Lukasiewicz یا موتور استنتاج Dienes-Rescher

، یکی از فازی‌سازهای singleton، گوسی یا مثلثی و نافازی‌ساز متوسط مراکز

سیستم فازی با موتور استنتاج ضرب، فازی ساز singleton و نافازی ساز متوسط مراکز:

سیستم فازی با پایگاه قواعدی به صورت زیر را در نظر بگیرید:

$Ru^{(l)}$: IF x_1 is A_1^l and ... and x_n is A_n^l , THEN y is B^l , $l = 1, \dots, M$

اگر مجموعه‌ی فازی B^l ، نرمال با مرکز \bar{y}^l باشد، برای موتور استنتاج ضرب، فازی ساز

singleton و نافازی ساز متوسط مراکز، سیستم فازی به صورت زیر خواهد بود:

$$f(x) = \frac{\sum_{l=1}^M \bar{y}^l \left(\prod_{i=1}^n \mu_{A_i^l}(x_i) \right)}{\sum_{l=1}^M \left(\prod_{i=1}^n \mu_{A_i^l}(x_i) \right)}, \quad x \in U \subset R^n, \quad f(x) \in V \subset R$$

$$y^* = \frac{\sum_{l=1}^M \bar{y}^l w_l}{\sum_{l=1}^M w_l}$$

یادآوری: نافازی ساز متوسط مراکز:

$$\mu_{B'}(y) = \max_{l=1:M} \left[\prod_{i=1}^n \mu_{A_i^l}(x_i^*) \mu_{B^l}(y) \right] : \text{موتور استنتاج ضرب با فازی ساز singleton}$$

سیستم فازی با موتور استنتاج ضرب، فازی ساز singleton و نافازی ساز متوسط مراکز:

سیستم فازی با پایگاه قواعدی به صورت زیر را در نظر بگیرید:

$Ru^{(l)}$: IF x_1 is A_1^l and ... and x_n is A_n^l , THEN y is B^l , $l = 1, \dots, M$

اگر مجموعه‌ی فازی B^l ، نرمال با مرکز \bar{y}^l باشد، برای موتور استنتاج ضرب، فازی ساز

singleton و نافازی ساز متوسط مراکز، سیستم فازی به صورت زیر خواهد بود:

$$f(x) = \frac{\sum_{l=1}^M \bar{y}^l \left(\prod_{i=1}^n \mu_{A_i^l}(x_i) \right)}{\sum_{l=1}^M \left(\prod_{i=1}^n \mu_{A_i^l}(x_i) \right)}, \quad x \in U \subset R^n, \quad f(x) \in V \subset R$$

این رابطه نشانگر آن است که خروجی سیستم فازی، یک میانگین وزن دار مراکز مجموعه‌های فازی تالی قواعد فازی می‌باشد که مقدار وزن‌ها نیز بر حسب مقدار عضویت مجموعه‌های فازی مقدم قواعد در نقطه‌ی ورودی است.



سیستم فازی با موتور استنتاج ضرب، فازی ساز singleton و نافازی ساز متوسط مراکز:

سیستم فازی با پایگاه قواعدی به صورت زیر را در نظر بگیرید:

Ru^(l): IF x_1 is A_1^l and ... and x_n is A_n^l , THEN y is B^l , $l = 1, \dots, M$

اگر مجموعه‌ی فازی B^l ، نرمال با مرکز \bar{y}^l باشد، برای موتور استنتاج ضرب، فازی ساز

singleton و نافازی ساز متوسط مراکز، سیستم فازی به صورت زیر خواهد بود:

$$f(x) = \frac{\sum_{l=1}^M \bar{y}^l \left(\prod_{i=1}^n \mu_{A_i^l}(x_i) \right)}{\sum_{l=1}^M \left(\prod_{i=1}^n \mu_{A_i^l}(x_i) \right)}, \quad x \in U \subset R^n, \quad f(x) \in V \subset R$$

از ارتباط بین $x \in U \subset R^n$ و $f(x) \in V \subset R$ می‌توان تعبیر یک **نگاشت غیرخطی** را برای سیستم‌های فازی مطرح نمود.



نقش دوگانه‌ی سیستم‌های فازی:

○ از یک سو، سیستم‌های مبتنی بر قاعده هستند که از مجموعه‌ای از قواعد زبانی تشکیل شده‌اند.

○ از سوی دیگر، نشانگر یک نگاشت غیرخطی هستند که می‌توان با فرمولی دقیق و فشرده آن را بازنمایی نمود.

یک ویژگی ارزشمند نظریه‌ی سیستم‌های فازی آن است که یک روند سیستماتیک برای تبدیل مجموعه‌ای از قواعد زبانی به نگاشتی غیرخطی فراهم می‌سازد. به واسطه‌ی سادگی پیاده‌سازی این نگاشت غیرخطی، فازی جایگاه ویژه‌ای در حوزه‌های مختلف مهندسی یافته است.



سیستم فازی با موتور استنتاج ضرب، فازی ساز singleton و نافازی ساز متوسط مراکز و توابع عضویت گوسی:

سیستم فازی با پایگاه قواعدی به صورت زیر را در نظر بگیرید:

Ru^(l): IF x_1 is A_1^l and ... and x_n is A_n^l , THEN y is B^l , $l = 1, \dots, M$

اگر مجموعه‌ی فازی B^l ، نرمال با مرکز \bar{y}^l باشد، برای موتور استنتاج ضرب، فازی ساز

singleton، نافازی ساز متوسط مراکز و توابع عضویت گوسی

$$\mu_{A_i^l}(x_i) = a_i^l \exp \left[- \left(\frac{x_i - \bar{x}_i^l}{\sigma_i^l} \right)^2 \right], \quad a_i^l \in [0, 1], \quad \sigma_i^l \in (0, \infty), \quad \bar{x}_i^l \in R$$

$$\mu_{B^l}(y) = \exp \left[- (y - \bar{y}^l)^2 \right], \quad \bar{y}^l \in R$$

سیستم فازی به صورت زیر خواهد بود:

$$f(x) = \frac{\sum_{l=1}^M \bar{y}^l \left(\prod_{i=1}^n a_i^l \exp \left(- \left(\frac{x_i - \bar{x}_i^l}{\sigma_i^l} \right)^2 \right) \right)}{\sum_{l=1}^M \left(\prod_{i=1}^n a_i^l \exp \left(- \left(\frac{x_i - \bar{x}_i^l}{\sigma_i^l} \right)^2 \right) \right)}$$

سیستم فازی با موتور استنتاج مینیمم، فازی ساز singleton و نافازی ساز متوسط مراکز:

سیستم فازی با پایگاه قواعدی به صورت زیر را در نظر بگیرید:

$Ru^{(l)}$: IF x_1 is A_1^l and ... and x_n is A_n^l , THEN y is B^l , $l = 1, \dots, M$

اگر مجموعه‌ی فازی B^l ، نرمال با مرکز \bar{y}^l باشد، برای موتور استنتاج مینیمم، فازی ساز

singleton و نافازی ساز متوسط مراکز، سیستم فازی به صورت زیر خواهد بود:

$$f(x) = \frac{\sum_{l=1}^M \bar{y}^l \left(\min_{i=1}^n \mu_{A_i^l}(x_i) \right)}{\sum_{l=1}^M \left(\min_{i=1}^n \mu_{A_i^l}(x_i) \right)}, \quad x \in U \subset R^n, \quad f(x) \in V \subset R$$

$$y^* = \frac{\sum_{l=1}^M \bar{y}^l w_l}{\sum_{l=1}^M w_l}$$

یادآوری: نافازی ساز متوسط مراکز:

موتور استنتاج مینیمم با فازی ساز singleton:

$$\mu_{B'}(y) = \max_{l=1:M} \left[\min \left(\mu_{A_1^l}(x_1^*), \dots, \mu_{A_n^l}(x_n^*), \mu_{B^l}(y) \right) \right]$$

سیستم فازی با موتور استنتاج ضرب، فازی ساز گوسی با ضرب جبری
برای t-norm و نافازی ساز متوسط مراکز:

سیستم فازی با پایگاه قواعدی به صورت زیر را در نظر بگیرید:

$Ru^{(l)}$: IF x_1 is A_1^l and ... and x_n is A_n^l , THEN y is B^l , $l = 1, \dots, M$

برای موتور استنتاج ضرب، فازی ساز گوسی با ضرب جبری برای t-norm و نافازی ساز
متوسط مراکز و توابع عضویت گوسی

$$\mu_{A_i^l}(x_i) = a_i^l \exp \left[- \left(\frac{x_i - \bar{x}_i^l}{\sigma_i^l} \right)^2 \right], \quad a_i^l \in [0, 1], \quad \sigma_i^l \in (0, \infty), \quad \bar{x}_i^l \in R$$

$$\mu_{B^l}(y) = \exp \left[- (y - \bar{y}^l)^2 \right], \quad \bar{y}^l \in R$$

سیستم فازی به صورت زیر خواهد بود:

$$f(x) = \frac{\sum_{l=1}^M \bar{y}^l \left(\prod_{i=1}^n \exp \left(- \left(\frac{(x_i - \bar{x}_i^l)^2}{a_i^2 + (\sigma_i^l)^2} \right) \right) \right)}{\sum_{l=1}^M \left(\prod_{i=1}^n \exp \left(- \left(\frac{(x_i - \bar{x}_i^l)^2}{a_i^2 + (\sigma_i^l)^2} \right) \right) \right)}$$

یادآوری: موتور استنتاج ضرب با فازی ساز گوسی و ضرب جبری برای t-norm:

$$\begin{aligned} \mu_{B'}(\mathbf{y}) &= \max_{l=1:M} \left[\prod_{i=1}^n e^{-\left(\frac{x_{iP}^l - \bar{x}_i^l}{\sigma_i^l}\right)^2} e^{-\left(\frac{x_{iP}^l - x_i^*}{a_i}\right)^2} \mu_{B^l}(\mathbf{y}) \right], & x_{iP}^l &= \frac{a_i^2 \bar{x}_i^l + (\sigma_i^l)^2 x_i^*}{a_i^2 + (\sigma_i^l)^2} \\ & \dots = - \left(\frac{\left(\frac{a_i^2 \bar{x}_i^l + (\sigma_i^l)^2 x_i}{a_i^2 + (\sigma_i^l)^2} - \bar{x}_i^l \right)^2}{\sigma_i^l} - \left(\frac{a_i^2 \bar{x}_i^l + (\sigma_i^l)^2 x_i}{a_i^2 + (\sigma_i^l)^2} - x_i \right)^2 \right) \\ & = - \left(\frac{a_i^2 \bar{x}_i^l + (\sigma_i^l)^2 x_i - a_i^2 \bar{x}_i^l - (\sigma_i^l)^2 \bar{x}_i^l}{\sigma_i^l (a_i^2 + (\sigma_i^l)^2)} \right)^2 - \left(\frac{a_i^2 \bar{x}_i^l + (\sigma_i^l)^2 x_i - a_i^2 x_i - (\sigma_i^l)^2 x_i}{a_i (a_i^2 + (\sigma_i^l)^2)} \right)^2 \\ & = - \left(\frac{\sigma_i^l (x_i - \bar{x}_i^l)}{a_i^2 + (\sigma_i^l)^2} \right)^2 - \left(\frac{a_i (\bar{x}_i^l - x_i)}{a_i^2 + (\sigma_i^l)^2} \right)^2 = - \frac{(x_i - \bar{x}_i^l)^2 (a_i^2 + (\sigma_i^l)^2)}{(a_i^2 + (\sigma_i^l)^2)^2} = - \frac{(x_i - \bar{x}_i^l)^2}{a_i^2 + (\sigma_i^l)^2} \\ f(\mathbf{x}) &= \frac{\sum_{l=1}^M \bar{y}^l \left(\prod_{i=1}^n \exp \left(- \left(\frac{(x_i - \bar{x}_i^l)^2}{a_i^2 + (\sigma_i^l)^2} \right) \right) \right)}{\sum_{l=1}^M \left(\prod_{i=1}^n \exp \left(- \left(\frac{(x_i - \bar{x}_i^l)^2}{a_i^2 + (\sigma_i^l)^2} \right) \right) \right)} \end{aligned}$$

سیستم فازی با موتور استنتاج مینیمم، فازی ساز گوسی با مینیمم برای t-norm و نافازی ساز متوسط مراکز:

سیستم فازی با پایگاه قواعدی به صورت زیر را در نظر بگیرید:

$Ru^{(l)}$: IF x_1 is A_1^l and ... and x_n is A_n^l , THEN y is B^l , $l = 1, \dots, M$

برای موتور استنتاج مینیمم، فازی ساز گوسی با مینیمم برای t-norm و نافازی ساز متوسط مراکز و توابع عضویت گوسی

$$\mu_{A_i^l}(x_i) = a_i^l \exp \left[- \left(\frac{x_i - \bar{x}_i^l}{\sigma_i^l} \right)^2 \right], \quad a_i^l \in [0, 1], \quad \sigma_i^l \in (0, \infty), \quad \bar{x}_i^l \in R$$

$$\mu_{B^l}(y) = \exp \left[- (y - \bar{y}^l)^2 \right], \quad \bar{y}^l \in R$$

سیستم فازی به صورت زیر خواهد بود:

$$f(x) = \frac{\sum_{l=1}^M \bar{y}^l \left(\min_{i=1}^n \exp \left(- \left(\frac{x_i - \bar{x}_i^l}{a_i + \sigma_i^l} \right)^2 \right) \right)}{\sum_{l=1}^M \left(\min_{i=1}^n \exp \left(- \left(\frac{x_i - \bar{x}_i^l}{a_i + \sigma_i^l} \right)^2 \right) \right)}$$

یادآوری: موتور استنتاج مینیمم با فازی ساز گوسی و مینیمم برای t-norm:

$$\mu_{B'}(\mathbf{y}) = \max_{l=1:M} \left[\min \left(e^{-\left(\frac{x_{1M}^l - \bar{x}_1^l}{\sigma_1^l}\right)^2}, \dots, e^{-\left(\frac{x_{nM}^l - \bar{x}_n^l}{a_n}\right)^2}, \mu_{B^l}(\mathbf{y}) \right) \right], \quad x_{iM}^l = \frac{a_i \bar{x}_i^l + \sigma_i^l x_i^*}{a_i + \sigma_i^l}$$

$$\left(\frac{x_{iM}^l - \bar{x}_i^l}{\sigma_i^l}\right)^2 = \left(\frac{\frac{a_i \bar{x}_i^l + \sigma_i^l x_i}{a_i + \sigma_i^l} - \bar{x}_i^l}{\sigma_i^l}\right)^2 = \left(\frac{a_i \bar{x}_i^l + \sigma_i^l x_i - a_i \bar{x}_i^l - \sigma_i^l \bar{x}_i^l}{\sigma_i^l (a_i + \sigma_i^l)}\right)^2 = \left(\frac{x_i - \bar{x}_i^l}{a_i + \sigma_i^l}\right)^2$$

$$f(x) = \frac{\sum_{l=1}^M \bar{y}^l \left(\min_{i=1}^n \exp \left(- \left(\frac{x_i - \bar{x}_i^l}{a_i + \sigma_i^l} \right)^2 \right) \right)}{\sum_{l=1}^M \left(\min_{i=1}^n \exp \left(- \left(\frac{x_i - \bar{x}_i^l}{a_i + \sigma_i^l} \right)^2 \right) \right)}$$

سیستم فازی با موتور استنتاج Lukasiewicz یا Dienes-Rescher ،

فازی ساز singleton ، گوسی یا مثلثی و نافازی ساز متوسط مراکز:

سیستم فازی با پایگاه قواعدی به صورت زیر را در نظر بگیرید که در آن، مجموعه فازی B^l نرمال و با مرکز \bar{y}^l می باشد:

$Ru^{(l)}$: IF x_1 is A_1^l and ... and x_n is A_n^l , THEN y is B^l , $l = 1, \dots, M$

برای موتور استنتاج Lukasiewicz یا موتور استنتاج Dienes-Rescher ، هر کدام

از فازی سازهای singleton ، گوسی یا مثلثی، نافازی ساز متوسط مراکز، سیستم فازی به

صورت زیر خواهد بود: این دسته سیستم های فازی از دیدگاه کاربردی فاقد ارزش هستند.

$$f(x) = \frac{1}{M} \sum_{l=1}^M \bar{y}^l$$

یادآوری: موتور استنتاج Lukasiewicz:

$$\mu_{B'}(y) = \min_{l=1:M} \left[\sup_{x \in U} \min \left(\mu_{A'}(x), 1 - \min_{i=1:n} \left(\mu_{A_i^l}(x_i) \right) + \mu_{B^l}(y) \right) \right]$$

یادآوری: موتور استنتاج Dienes-Rescher:

$$\mu_{B'}(y) = \min_{l=1:M} \left[\sup_{x \in U} \min \left(\mu_{A'}(x), \max \left(1 - \min_{i=1:n} \left(\mu_{A_i^l}(x_i) \right), \mu_{B^l}(y) \right) \right) \right]$$

سیستم‌های فازی با نافازی ساز ماکزیمم:

- سیستم فازی با موتور استنتاج ضرب، فازی ساز singleton و نافازی ساز ماکزیمم
- سیستم فازی با موتور استنتاج مینیمم، فازی ساز singleton و نافازی ساز ماکزیمم

سیستم فازی با موتور استنتاج ضرب، فازی ساز singleton و نافازی ساز ماکزیمم:

سیستم فازی با پایگاه قواعدی به صورت زیر را در نظر بگیرید که در آن، مجموعه فازی B^l نرمال و با مرکز \bar{y}^l می باشد:

Ru^(l): IF x_1 is A_1^l and ... and x_n is A_n^l , THEN y is B^l , $l = 1, \dots, M$

با موتور استنتاج ضرب، فازی ساز singleton و نافازی ساز ماکزیمم، سیستم فازی به

صورت زیر خواهد بود:

$$f(x) = \bar{y}^{l*}$$

$$l^* \in \{1, \dots, M\} \text{ such that } \prod_{i=1}^n \mu_{A_i^{l^*}}(x_i) \geq \prod_{i=1}^n \mu_{A_i^l}(x_i) \text{ for all } l = 1, \dots, M$$

موتور استنتاج ضرب با فازی ساز singleton: $\mu_{B'}(y) = \max_{l=1:M} \left[\prod_{i=1}^n \mu_{A_i^l}(x_i^*) \mu_{B^l}(y) \right]$

$$\begin{aligned} \sup_{y \in V} \mu_{B'}(y) &= \sup_{y \in V} \max_{l=1:M} \left[\prod_{i=1}^n \mu_{A_i^l}(x_i) \mu_{B^l}(y) \right] \\ &= \max_{l=1:M} \sup_{y \in V} \left[\prod_{i=1}^n \mu_{A_i^l}(x_i) \mu_{B^l}(y) \right] \\ &= \max_{l=1:M} \left[\prod_{i=1}^n \mu_{A_i^l}(x_i) \right] = \prod_{i=1}^n \mu_{A_i^{l^*}}(x_i) \end{aligned}$$

$$\mu_{B^l}(\bar{y}^{l^*}) = \begin{cases} \leq 1 & l \neq l^* \\ 1 & l = l^* \end{cases}$$

$$\mu_{B'}(\bar{y}^{l^*}) = \max_{l=1:M} \left[\prod_{i=1}^n \mu_{A_i^l}(x_i) \mu_{B^l}(\bar{y}^{l^*}) \right] = \prod_{i=1}^n \mu_{A_i^{l^*}}(x_i)$$

بنابراین $\sup_{y \in V}$ در $y = \bar{y}^{l^*}$ است.

$$f(x) = \bar{y}^{l^*}$$

$$f(x) = \bar{y}^{l^*}$$

$l^* \in \{1, \dots, M\}$ such that $\prod_{i=1}^n \mu_{A_i^{l^*}}(x_i) \geq \prod_{i=1}^n \mu_{A_i^l}(x_i)$ for all $l = 1, \dots, M$

تعبیر شهودی این سیستم فازی:

در این حالت، سیستم فازی یک تابع تکه‌ای ثابت است که مقادیر ثابت آن، مرکز توابع عضویت بخش تالی قواعد می‌باشد.



ویژگی‌های این سیستم فازی:

○ در این سیستم فازی، تا زمانی که حاصل ضرب مقادیر تابع عضویت مجموعه‌های فازی مقدم قاعده بزرگتر مساوی مقدار متناظر در دیگر قواعد باشد خروجی سیستم فازی بدون تغییر باقی می‌ماند.

○ در نتیجه، این نوع سیستم فازی نسبت به اغتشاشات کوچک در ورودی و در توابع عضویت $\mu_{A_i^l}(x_i)$ مقاوم است. 😊

○ این سیستم‌های فازی پیوسته نیستند بدان معنی که وقتی l از یک عدد به عدد دیگر تغییر می‌کند $f(x)$ به صورت گسسته تغییر می‌یابد که این رفتار در کنترل حلقه بسته نامطلوب است ⚡ (هرچند که در تصمیم‌گیری و دیگر کاربردهای حلقه باز اشکالی ایجاد نمی‌کند).

واژه‌نامه

۲۱

decision making

تصمیم‌گیری

سیستم فازی با موتور استنتاج مینیمم، فازی ساز singleton و نافازی ساز ماکزیمم:

سیستم فازی با پایگاه قواعدی به صورت زیر را در نظر بگیرید که در آن، مجموعه فازی B^l نرمال و با مرکز \bar{y}^l می باشد:

$Ru^{(l)}$: IF x_1 is A_1^l and ... and x_n is A_n^l , THEN y is B^l , $l = 1, \dots, M$

با موتور استنتاج مینیمم، فازی ساز singleton و نافازی ساز ماکزیمم، سیستم فازی به

صورت زیر خواهد بود:

$$f(x) = \bar{y}^{l^*}$$

$l^* \in \{1, \dots, M\}$ such that $\min_{i=1:n} [\mu_{A_i^{l^*}}(x_i)] \geq \min_{i=1:n} [\mu_{A_i^l}(x_i)]$ for all $l = 1, \dots, M$

موتور استنتاج مینیمم با فازی ساز singleton :

$$\mu_{B'}(y) = \max_{l=1:M} \left[\min \left(\mu_{A_1^l}(x_1^*), \dots, \mu_{A_n^l}(x_n^*), \mu_{B^l}(y) \right) \right]$$

$$\sup_{y \in V} \mu_{B'}(y) = \sup_{y \in V} \max_{l=1:M} \left[\min \left(\mu_{A_1^l}(x_1), \dots, \mu_{A_n^l}(x_n), \mu_{B^l}(y) \right) \right]$$

$$= \max_{l=1:M} \sup_{y \in V} \left[\min \left(\mu_{A_1^l}(x_1), \dots, \mu_{A_n^l}(x_n), \mu_{B^l}(y) \right) \right]$$

$$= \max_{l=1:M} \min_{i=1:n} \left[\mu_{A_i^l}(x_i) \right]$$

$$= \min_{i=1:n} \left[\mu_{A_i^{l^*}}(x_i) \right]$$

$$= \mu_{B'}(\bar{y}^{l^*})$$

$$f(x) = \bar{y}^{l^*}$$

سیستم فازی با موتورهای استنتاج Zadeh ، Lukasiewicz و Dienes-Rescher و نافیازی ساز ماکزیمم:

برای سیستم‌های فازی با نافیازی ساز ماکزیمم و موتورهای استنتاج Zadeh ، Lukasiewicz و Dienes-Rescher ، دستیابی به عبارتی به فرم بسته مشکل است. مشکل از آنجا سرچشمه می‌گیرد که \min و \sup بر خلاف \max و \sup ، در حالت کلی قابل جابجایی نیست. برای این موارد لازم است محاسبات اجزای مختلف سیستم فازی شامل محاسبه‌ی خروجی فازی ساز، خروجی موتور استنتاج فازی و خروجی نافیازی ساز، در پی هم انجام گردد که محاسبات بسیار پیچیده‌ای خواهد بود.



سیستم‌های فازی به عنوان تقریب‌گرهای عمومی:

مزیت‌های بازنمایی سیستم فازی به صورت رابطه‌ای غیرخطی:

- این فرم‌های فشرده، محاسبات سیستم‌های فازی را ساده می‌کند.
- امکان تحلیل سیستم‌های فازی به طور دقیق را فراهم می‌سازند.

یک سوال مهم و اساسی:

سیستم‌های فازی قادر است چه نوع توابع غیرخطی را بازنمایی کند یا تقریب بزند و با چه دقتی؟

قضیه‌ی تقریب عمومی:

با فرض این که U مجموعه‌ی فشرده‌ای در \mathbb{R}^n باشد برای هر تابع پیوسته‌ی حقیقی $g(x)$

در U و هر $\varepsilon > 0$ ، یک سیستم فازی به فرم

$$f(x) = \frac{\sum_{l=1}^M \bar{y}^l \left(\prod_{i=1}^l a_i^l \exp \left(- \left(\frac{x_i - \bar{x}_i^l}{\sigma_i^l} \right)^2 \right) \right)}{\sum_{l=1}^M \left(\prod_{i=1}^l a_i^l \exp \left(- \left(\frac{x_i - \bar{x}_i^l}{\sigma_i^l} \right)^2 \right) \right)}$$

وجود دارد به نحوی که:

$$\sup_{x \in U} |f(x) - g(x)| < \varepsilon$$

به عبارت دیگر،

سیستم‌های فازی با موتور استنتاج ضرب، فازی
ساز singleton، نافازی ساز متوسط مراکز و تابع
عضویت گوسی، تقریب‌گر عمومی هستند.



قضیه‌ی stone-weierstrass :

فرض کنید Z مجموعه‌ای از توابع پیوسته‌ی حقیقی در مجموعه‌ی فشرده‌ی U باشد. اگر

۱- Z یک جبر باشد یعنی نسبت به جمع، ضرب و ضرب اسکالر بسته باشد،

۲- Z نقاط U را متمایز سازد یعنی برای هر $x, y \in U, x \neq y$ ، یک $f \in Z$ وجود داشته باشد به نحوی که $f(x) \neq f(y)$ باشد.

۳- Z در هیچ نقطه‌ای از U به صفر نرسد یعنی برای هر $x \in U$ یک $f \in Z$ وجود داشته باشد چنان که $f(x) \neq 0$ باشد.

آنگاه برای هر تابع پیوسته‌ی حقیقی $g(x) \in U$ و هر مقدار دلخواه $\varepsilon > 0$ ، یک $f \in Z$ وجود دارد چنان که:

$$\sup_{x \in U} |f(x) - g(x)| < \varepsilon$$

به منظور اثبات قضیه‌ی تقریب عمومی، با فرض اینکه Y مجموعه‌ای شامل تمام سیستم‌های فازی به فرم مورد نظر باشد نشان می‌دهیم که:

۱- Y یک جبر است.

۲- Y نقاط فضای ورودی را متمایز می‌سازد.

۳- در هیچ نقطه‌ای از فضای ورودی، Y به صفر نمی‌رسد.

۱- Y یک جبر است.

فرض کنید $f_1, f_2 \in Y$ باشد. از این رو، آنها را می توان به صورت روبرو نوشت:

$$f_1(x) = \frac{\sum_{l=1}^{M_1} \bar{y}_1^l \left(\prod_{i=1}^n a_{1_i}^l \exp \left(- \left(\frac{x_i - \bar{x}_{1_i}^l}{\sigma_{1_i}^l} \right)^2 \right) \right)}{\sum_{l=1}^{M_1} \left(\prod_{i=1}^n a_{1_i}^l \exp \left(- \left(\frac{x_i - \bar{x}_{1_i}^l}{\sigma_{1_i}^l} \right)^2 \right) \right)}$$

$$f_2(x) = \frac{\sum_{l=1}^{M_2} \bar{y}_2^l \left(\prod_{i=1}^n a_{2_i}^l \exp \left(- \left(\frac{x_i - \bar{x}_{2_i}^l}{\sigma_{2_i}^l} \right)^2 \right) \right)}{\sum_{l=1}^{M_2} \left(\prod_{i=1}^n a_{2_i}^l \exp \left(- \left(\frac{x_i - \bar{x}_{2_i}^l}{\sigma_{2_i}^l} \right)^2 \right) \right)}$$

در این صورت،

$$f_1(x) + f_2(x) = \frac{\sum_{l_1=1}^{M_1} \sum_{l_2=1}^{M_2} (\bar{y}_1^{l_1} + \bar{y}_2^{l_2}) \left(\prod_{i=1}^n a_{1_i}^{l_1} a_{2_i}^{l_2} \exp \left(- \left(\frac{x_i - \bar{x}_{1_i}^{l_1}}{\sigma_{1_i}^{l_1}} \right)^2 - \left(\frac{x_i - \bar{x}_{2_i}^{l_2}}{\sigma_{2_i}^{l_2}} \right)^2 \right) \right)}{\sum_{l_1=1}^{M_1} \sum_{l_2=1}^{M_2} \left(\prod_{i=1}^n a_{1_i}^{l_1} a_{2_i}^{l_2} \exp \left(- \left(\frac{x_i - \bar{x}_{1_i}^{l_1}}{\sigma_{1_i}^{l_1}} \right)^2 - \left(\frac{x_i - \bar{x}_{2_i}^{l_2}}{\sigma_{2_i}^{l_2}} \right)^2 \right) \right)}$$

$$f_1(x) f_2(x) = \frac{\sum_{l_1=1}^{M_1} \sum_{l_2=1}^{M_2} (\bar{y}_1^{l_1} \bar{y}_2^{l_2}) \left(\prod_{i=1}^n a_{1_i}^{l_1} a_{2_i}^{l_2} \exp \left(- \left(\frac{x_i - \bar{x}_{1_i}^{l_1}}{\sigma_{1_i}^{l_1}} \right)^2 - \left(\frac{x_i - \bar{x}_{2_i}^{l_2}}{\sigma_{2_i}^{l_2}} \right)^2 \right) \right)}{\sum_{l_1=1}^{M_1} \sum_{l_2=1}^{M_2} \left(\prod_{i=1}^n a_{1_i}^{l_1} a_{2_i}^{l_2} \exp \left(- \left(\frac{x_i - \bar{x}_{1_i}^{l_1}}{\sigma_{1_i}^{l_1}} \right)^2 - \left(\frac{x_i - \bar{x}_{2_i}^{l_2}}{\sigma_{2_i}^{l_2}} \right)^2 \right) \right)}$$

$$c f_1(x) = \frac{\sum_{l=1}^{M_1} c \bar{y}_1^l \left(\prod_{i=1}^n a_{1_i}^l \exp \left(- \left(\frac{x_i - \bar{x}_{1_i}^l}{\sigma_{1_i}^l} \right)^2 \right) \right)}{\sum_{l=1}^{M_1} \left(\prod_{i=1}^n a_{1_i}^l \exp \left(- \left(\frac{x_i - \bar{x}_{1_i}^l}{\sigma_{1_i}^l} \right)^2 \right) \right)}$$

بنابراین Y یک جبر است.

۲- Y نقاط فضای ورودی را متمایز می سازد.

فرض کنید $x^0, z^0 \in U$ دو نقطه‌ی دلخواه متمایز باشند ($x^0 \neq z^0$). اگر در رابطه‌ی

$$f(x) = \frac{\sum_{l=1}^M \bar{y}^l \left(\prod_{i=1}^n a_i^l \exp\left(-\left(\frac{x_i - \bar{x}_i^l}{\sigma_i^l}\right)^2\right) \right)}{\sum_{l=1}^M \left(\prod_{i=1}^n a_i^l \exp\left(-\left(\frac{x_i - \bar{x}_i^l}{\sigma_i^l}\right)^2\right) \right)}$$

پارامترها به صورت زیر باشند:

$$M = 2, \quad \bar{y}^1 = 0, \quad \bar{y}^2 = 1, \quad a_i^l = 1, \quad \sigma_i^l = 1, \quad \bar{x}_i^1 = x_i^0, \quad \bar{x}_i^2 = z_i^0$$

$$l = 1, \dots, M, \quad i = 1, \dots, n$$

سیستم فازی به صورت زیر خواهد بود:

$$f(x) = \frac{\exp(-\|x - z^0\|_2^2)}{\exp(-\|x - x^0\|_2^2) + \exp(-\|x - z^0\|_2^2)}$$

$$f(x^0) = \frac{\exp(-\|x^0 - z^0\|_2^2)}{1 + \exp(-\|x^0 - z^0\|_2^2)} \quad f(z^0) = \frac{1}{1 + \exp(-\|x^0 - z^0\|_2^2)}$$

از آنجا که $x^0 \neq z^0$ است در نتیجه، $\exp(-\|x^0 - z^0\|_2^2) \neq 1$ است و بنابراین

$f(x^0) \neq f(z^0)$ می باشد یعنی Y فضای ورودی را متمایز می سازد.

۳- در هیچ نقطه‌ای از فضای ورودی، Y به صفر نمی‌رسد.

در سیستم فازی به فرم

$$f(x) = \frac{\sum_{l=1}^M \bar{y}^l \left(\prod_{i=1}^l a_i^l \exp \left(- \left(\frac{x_i - \bar{x}_i^l}{\sigma_i^l} \right)^2 \right) \right)}{\sum_{l=1}^M \left(\prod_{i=1}^l a_i^l \exp \left(- \left(\frac{x_i - \bar{x}_i^l}{\sigma_i^l} \right)^2 \right) \right)}$$

اگر تمام \bar{y}^l ها بزرگتر از صفر باشند آنگاه $f(x) > 0, \quad \forall x \in U$

بنابراین Y در هیچ نقطه‌ای از فضای ورودی به صفر نمی‌رسد.

بدین ترتیب،

بر اساس قضیه‌ی stone-weierstrass،

قضیه‌ی تقریب عمومی اثبات می‌گردد.

تعمیم قضیه‌ی تقریب عمومی
به توابع گسسته

برای هر تابع مربع-انتگرال پذیر $g(x)$ در مجموعه‌ی فشرده‌ی $U \in \mathbb{R}^n$ ،

یا به عبارت دیگر، برای هر $g \in L_2(U) = \left\{ g: U \rightarrow \mathbb{R} \mid \int_U |g(x)|^2 dx < \infty \right\}$

سیستم فازی $f(x)$ به فرم

$$f(x) = \frac{\sum_{l=1}^M \bar{y}^l \left(\prod_{i=1}^l a_i^l \exp \left(- \left(\frac{x_i - \bar{x}_i^l}{\sigma_i^l} \right)^2 \right) \right)}{\sum_{l=1}^M \left(\prod_{i=1}^l a_i^l \exp \left(- \left(\frac{x_i - \bar{x}_i^l}{\sigma_i^l} \right)^2 \right) \right)}$$

وجود دارد به نحوی که:

$$\left(\int_U |f(x) - g(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon$$

QUESTIONS?

