هر که گوید جمله حق است احمقی است
آن که گوید جمله باطل، او شقی است
مولانا

سیستم های فازی

10

Presented By: A. Maleki
Fall 2021

دستورکار این جلسه:

ویژگی های تقریب در سیستم های فازی

- مقدمه
- طرح مفاهیم پایه
- طراحی سیستم فازی
- دقت تقریب در سیستم‌های فازی
- سیستم‌های فازی با دقت تقریب مرتبه‌ی دوم
- دقت تقریب در سیستم‌های فازی با نافازی‌ساز ماکزیمم
- مثال‌ها

مقدمه:

در مبحث قبل ثابت شد که سیستم‌های فازی* تقریب‌گر عمومی هستند یعنی قادرند هر تابعی در یک مجموعه‌ی فشرده را با دقت دلخواه تقریب بزنند.

اگر چه بر اساس قضیه‌ی تقریب عمومی، چنین سیستم فازی‌ای وجود دارد،

۱- آیا می‌توان همواره به آن دست یافت؟

۲- رهیافت دستیابی به این سیستم فازی چیست؟

- فرض کنید می‌خواهیم تابع غیرخطی $g(x): U \subset R^n \to R$ را با یک سیستم فازی تقریب بزنیم. اطلاعات $g(x)$ به چه صورت‌هایی ممکن است فراهم باشد.

(۱) رابطه‌ی تحلیلی $g(x)$ در اختیار است.

(۲) رابطه‌ی تحلیلی $g(x)$ در اختیار نیست ولی برای هر $x \in U$ می‌توان $g(x)$ را تعیین نمود.

(۳) رابطه‌ی تحلیلی $g(x)$ در اختیار نیست و تنها زوج‌های ورودی-خروجی محدودی $(x^j, g(x^j))$ در اختیار است (x^j را نمی‌توان به دلخواه انتخاب نمود).

در این مبحث، فرض بر آن است که رابطه‌ی تحلیلی تابع $g(x)$ در اختیار نیست ولی برای هر نقطه‌ی دلخواه، مقدار تابع قابل تعیین است.

طرح مفاهیم پایه:

- تابع عضویت شبه‌ذوزنقه‌ای
- کامل بودن مجموعه‌های فازی
- سازگار بودن مجموعه‌های فازی
- مجموعه‌ی بالای مجموعه‌ی فازی
- ترتیب مجموعه‌های فازی
- بررسی ویژگی‌های سیستم‌های فازی با تابع عضویت شبه‌ذوزنقه‌ای

تابع عضویت شبه‌ذوزنقه‌ای:

- فرض کنید $[a,d]\in R$. تابع عضویت شبه‌ذوزنقه‌ای مجموعه‌ی فازی A ، تابع پیوسته‌ای در R است که :

$$\mu_A(x;a,b,c,d,H)=\begin{cases} I(x) & x\epsilon[a,b) \\ H & x\epsilon[b,c] \\ D(x) & x\epsilon(c,d] \\ 0 & x\epsilon R-(a,d) \end{cases}$$

که در آن، I(x) تابعی غیرکاهشی در فاصله‌ی [a,b) و D(x) تابعی غیرافزایشی در محدوده‌ی [c,d) است و

$$a\le b\le c\le d$$
$$a<d$$
$$0<H\le 1$$
$$0\le I(x)\le 1$$
$$0\le D(x)\le 1$$

I(a) و D(d) چه مقادیری می‌تواند داشته باشد؟

واژه‌نامه

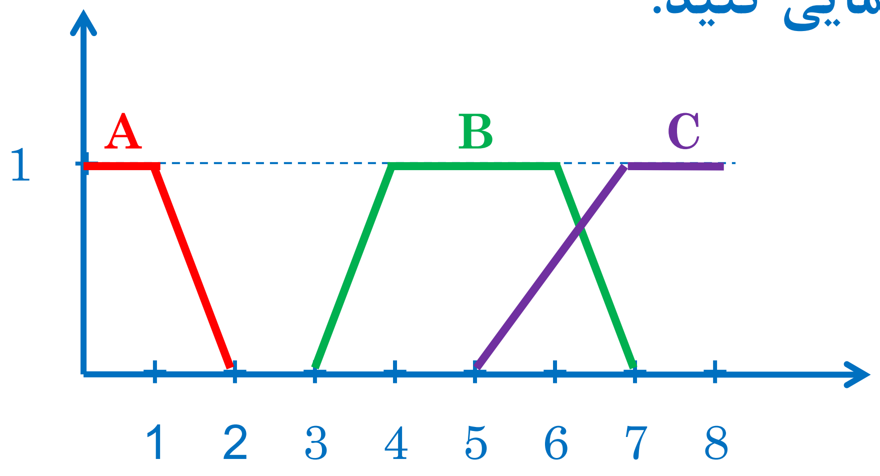
تابع عضویت شبه‌ذوزنقه‌ای	pseudo-trapezoid membership function

- اگر مجموعه‌ی فازی A با تابع عضویت شبه‌ذوزنقه‌ای، نُرمال باشد (یعنی H=1) می‌توان تابع عضویت آن را به صورت زیر نشان داد.

$\mu_A(x; a, b, c, d)$

مثال:

تابع عضویت مجموعه‌های فازی نرمال A ، B و C در شکل زیر نشان داده شده است. آنها را به فرم شبه ذوزنقه‌ای بازنمایی کنید.



$$\mu_A(x; -\infty, -\infty, 1, 2)$$

$$\mu_B(x; 3, 4, 6, 7)$$

$$\mu_C(x; 5, 7, \infty, \infty)$$

مثال:

تابع عضویت شبه‌ذوزنقه‌ای خانواده‌ی بسیار بزرگ و متنوعی از توابع عضویت را پوشش می‌دهد که توابع عضویت ذوزنقه‌ای، مثلثی و گوسی حالت‌های خاصی از آن می‌باشند. در چه شرایطی، این تابع عضویت به توابع عضویت زیر تبدیل می گردد؟

الف: تابع عضویت ذوزنقه‌ای

$$I(x) = \frac{x-a}{b-a} \;,\; D(x) = \frac{x-d}{c-d}$$

ب: تابع عضویت مثلثی

$$b = c \;,\; I(x) = \frac{x-a}{b-a} \;,\; D(x) = \frac{x-d}{c-d}$$

ج: تابع عضویت گوسی

$$a = -\infty$$
$$d = +\infty$$
$$b = c = \bar{x}$$
$$I(x) = D(x) = exp\left[-\left(\frac{x-\bar{x}}{\sigma}\right)^2\right]$$

کامل بودن مجموعه‌های فازی:

- مجموعه‌های فازی A^1 ، A^2 ، . . . و A^N را روی $W \subset R$ کامل گوییم اگر برای هر $x \in W$ ، A^j یی وجود داشته باشد که $\mu_{A^j}(x) > 0$ باشد.

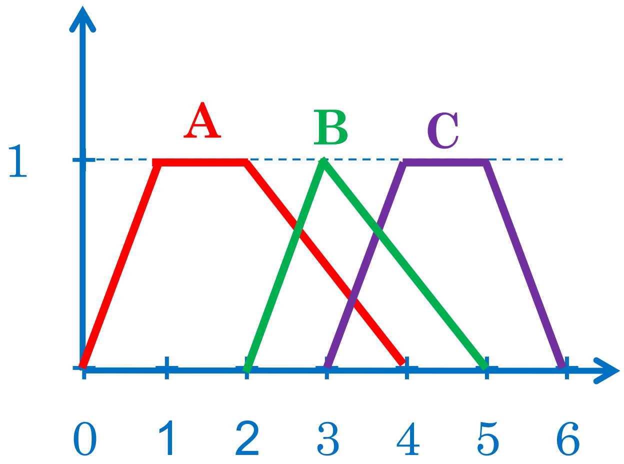
مثال:

آیا مجموعه‌های فازی نرمال A ، B و C در محدوده‌ی (0,6) کامل است؟

$\mu_A(x; 0, 1, 2, 4)$

$\mu_B(x; 2, 3, 3, 5)$

$\mu_C(x; 3, 4, 5, 6)$



سازگار بودن مجموعه‌های فازی:

- مجموعه‌های فازی A^1 ، A^2 ، . . . و A^N را روی $R \supset W$ سازگار گوییم اگر چنانچه برای هر $x \in W$ داریم $\mu_{A^j}(x) = 1$ آنگاه برای هر $i \neq j$ ، $\mu_{A^i}(x) = 0$ باشد.

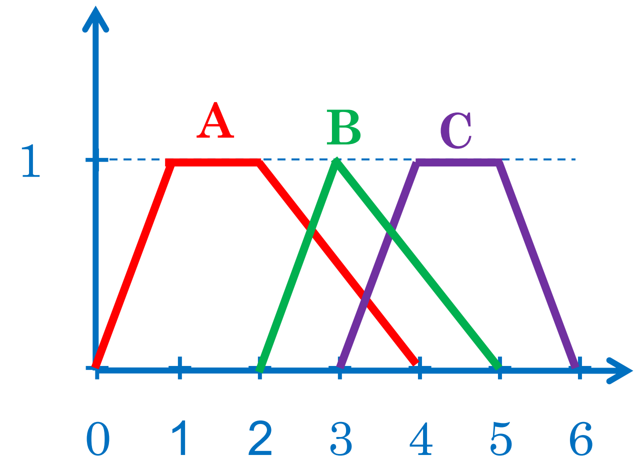
مثال:

آیا مجموعه‌های فازی نرمال A ، B و C در محدوده‌ی (0,6) سازگار هستند؟

$\mu_A(x; 0, 1, 2, 4)$

$\mu_B(x; 2, 3, 3, 5)$

$\mu_C(x; 3, 4, 5, 6)$



مجموعه‌ی بالای یک مجموعه‌ی فازی:

- مجموعه‌ی بالای مجموعه‌ی فازی A در R ، $W \subset R$ ، زیر مجموعه‌ای از W است چنان که:

$$hgh(A) = \left\{ x \epsilon W \,\middle|\, \mu_A(x) = \sup_{x' \epsilon W} \mu_A(x') \right\}$$

واژه‌نامه

high set of a fuzzy set	مجموعه‌ی بالای یک مجموعه‌ی فازی

مثال:

اگر مجموعه‌ی فازی A نرمال با تابع عضویت شبه ذوزنقه‌ای زیر باشد مجموعه‌ی بالای آن را تعیین نمایید.

$\boldsymbol{\mu_A(x; a, b, c, d)}$

$$\boldsymbol{hgh(A) = [b, c]}$$

ترتیب مجموعه‌های فازی:

- برای دو مجموعه‌ی فازی A و B در $R \subset W$ ، گوییم $A > B$ است اگر $hgh(A) > hgh(B)$ باشد (یا به عبارت دیگر، اگر $x \in hgh(A)$ و $y \in hgh(B)$ باشد آنگاه $x > y$ باشد).

واژه‌نامه

ترتیب مجموعه‌ی فازی	order between fuzzy sets

مثال:

مجموعه‌های فازی نرمال با تابع عضویت شبه‌ذوزنقه‌ای زیر را مرتب نمایید.

$\mu_A(x; 0, 5, 6, 7)$

$\mu_B(x; 0, 3, 4, 8)$

$\mu_C(x; 1, 2, 2, 4)$

$$hgh(A) = [5, 6]$$

$$hgh(B) = [3, 4]$$

$$hgh(C) = 2$$

$$\Rightarrow C < B < A$$

بررسی ویژگی های سیستم های فازی ... :

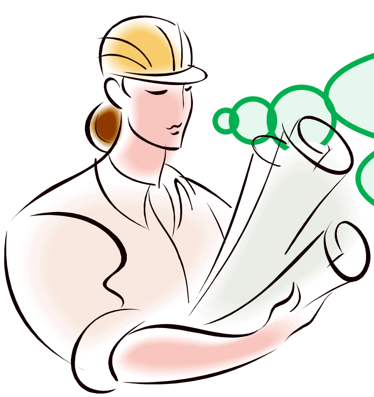
- اگر A^1 ، A^2 ، . . . و A^N مجموعه‌های فازی نرمال و سازگار در R $W \subset R$ با تابع عضویت شبه‌ذوزنقه‌ای $\mu_{A^i}(x; a_i, b_i, c_i, d_i), \quad i = 1, 2, \cdots, N$ باشند چیدمان جدید $\{i_1, i_2, \cdots, i_N\}$ از $\{1, 2, \cdots, N\}$ وجود دارد به نحوی که: $A^{i_1} < A^{i_2} < \cdots < A^{i_N}$

با توجه به سازگاری مجموعه‌های فازی:

$$\forall\, i, j \in \{1, 2, \cdots, N\},\ [b_i, c_i] \cap [b_j, c_j] = \emptyset$$

بنابراین می توان چیدمان را چنان انتخاب کرد که:

$$[b_{i1}, c_{i1}] < [b_{i2}, c_{i2}] < \cdots < [b_{iN}, c_{iN}] \quad \Rightarrow A^{i_1} < A^{i_2} < \cdots < A^{i_N}$$



بنابراین، بدون اینکه به عمومیت موضوع خدشه‌ای
وارد شود می‌توان مجموعه‌های فازی نُرمال سازگار
با تابع عضویت شبه‌ذوزنقه‌ای را مرتب فرض نمود.

بررسی ویژگی های سیستم های فازی ... :

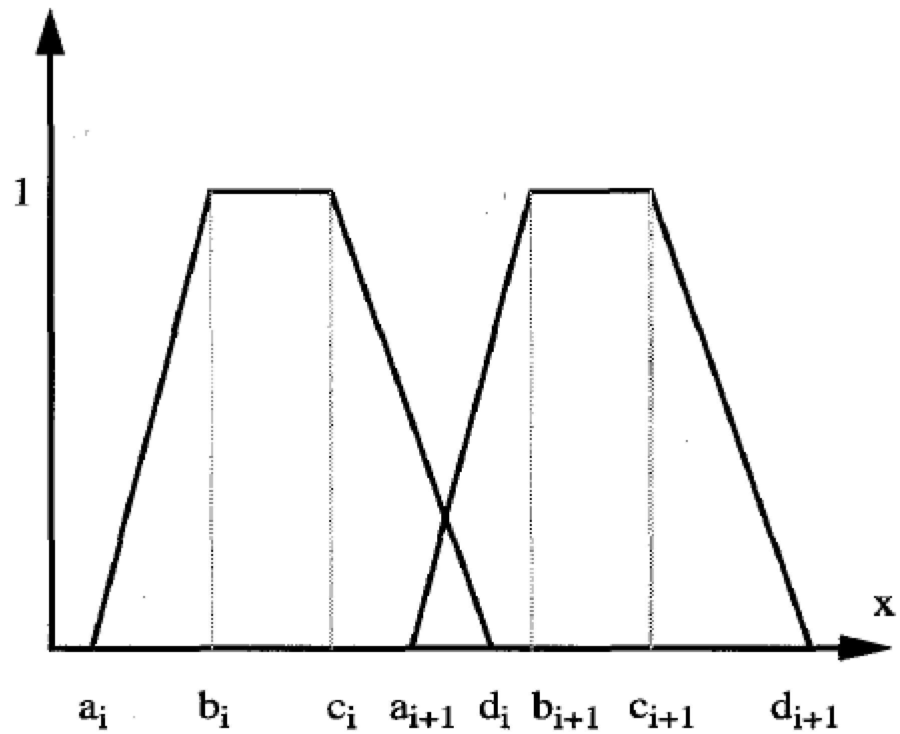
- فرض کنید مجموعه های فازی A^1 ، A^2 ، . . . و A^N در $W \subset R$ ، نرمال، سازگار و کامل با تابع عضویت شبه‌ذوزنقه‌ای $\mu_{A^i}(x; a_i, b_i, c_i, d_i), \quad i = 1, 2, \cdots, N$ باشند. اگر $A^1 < A^2 < \cdots < A^N$ باشد آنگاه:

$$c_i \leq a_{i+1} < d_i \leq b_{i+1}$$

سازگاری

کامل بودن

سازگاری



طراحی سیستم فازی :

- فرض کنید $g(x)$ تابعی در مجموعه‌ی فشرده‌ی $U = [\alpha_1,\beta_1] \times [\alpha_2,\beta_2]$ باشد که رابطه‌ی تحلیلی آن نامشخص است. با این حال، فرض بر آن است که برای هر $x \in U$ ، می‌توان $g(x)$ را تعیین نمود. می‌خواهیم یک سیستم فازی طراحی نماییم که $g(x)$ را تقریب بزند. این کار در سه مرحله انجام می گردد.

اگرچه برای سادگی، طراحی سیستم فازی برای حالت دو ورودی مطرح شده است ولی به سادگی به حالت کلی (n ورودی) قابل تعمیم است.

مرحله‌ی اول:

- N_i مجموعه‌ی فازی A_i^1، A_i^2، . . . و $A_i^{N_i}$ را در $[\alpha_i,\beta_i]$ تعریف نمایید به نحوی که نرمال، سازگار و کامل و دارای تابع عضویت شبه‌ذوزنقه‌ای باشند. همچنین:

$$\mu_{A_i^1}(x_i; a_i^1, b_i^1, c_i^1, d_i^1), \cdots, \mu_{A_i^{N_i}}(x_i; a_i^{N_i}, b_i^{N_i}, c_i^{N_i}, d_i^{N_i})$$

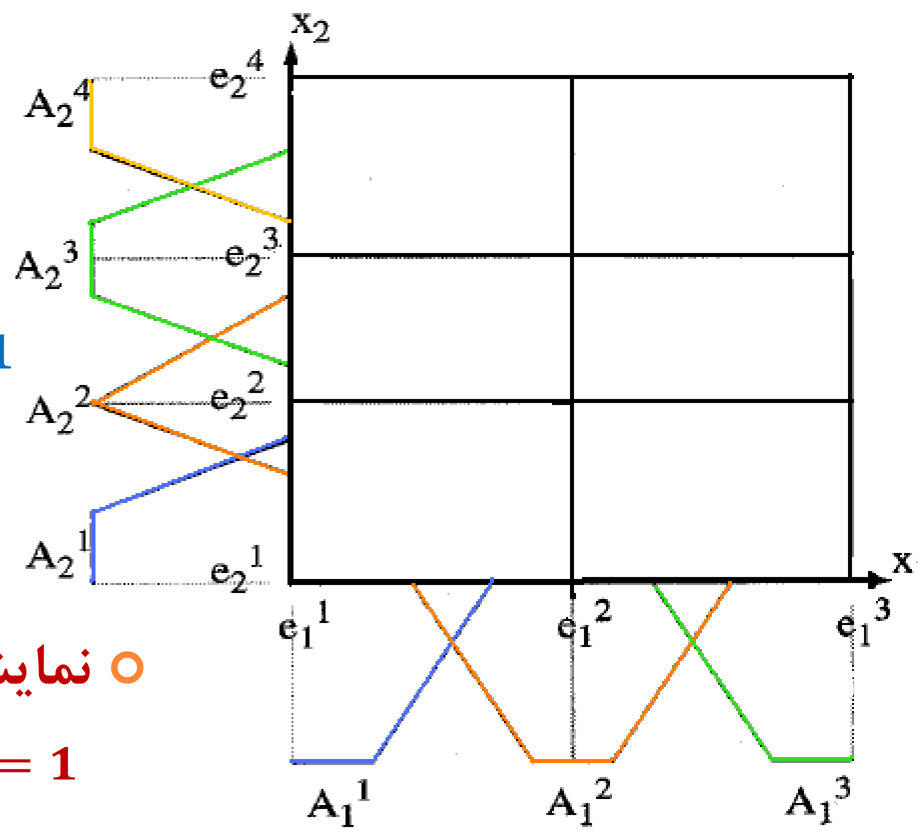
$$A_i^1 < A_i^2 < \cdots < A_i^{N_i}$$

$$a_i^1 = b_i^1 = \alpha_i$$

$$c_i^{N_i} = d_i^{N_i} = \beta_i$$

$$e_i^1 = \alpha_i \,, e_i^{N_i} = \beta_i$$

$$e_i^j = \frac{1}{2}(b_i^j + c_i^j) \; for \; j = 2, \cdots, N_i - 1$$



- نمایش ترسیمی برای:

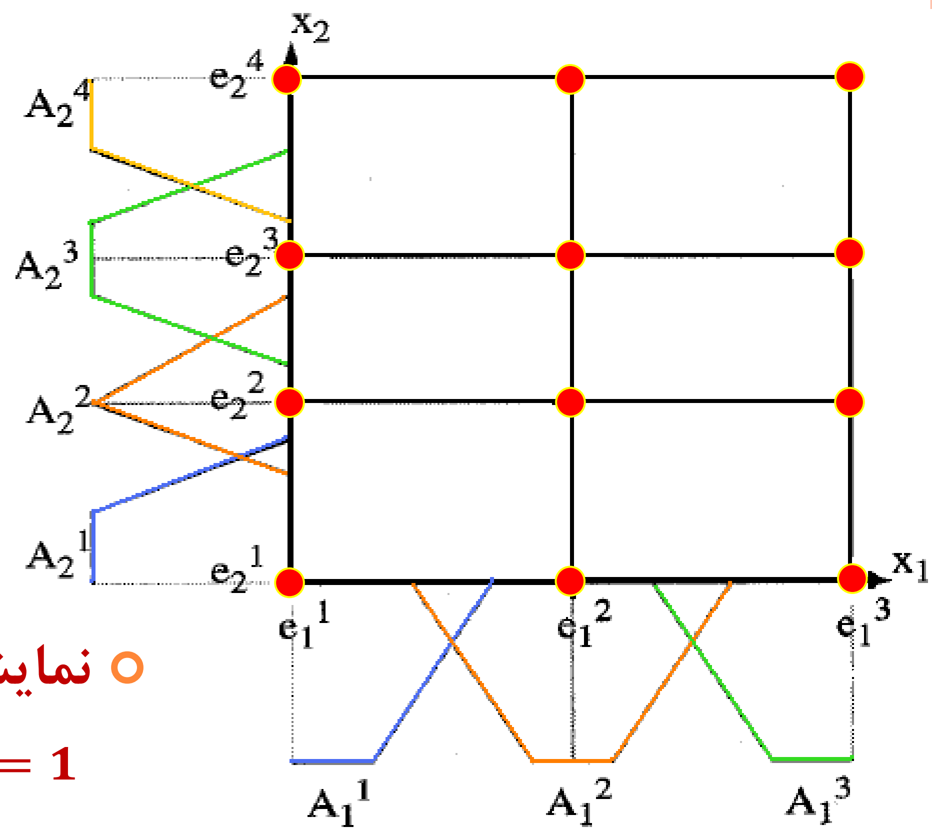
$$N_1 = 3, N_2 = 4, \alpha_1 = \alpha_2 = 0 \,, \beta_1 = \beta_2 = 1$$

مرحله‌ی دوم:

- پایگاه قواعدی شامل $M=N_1\times N_2$ قاعده‌ی اگر-آنگاه به صورت زیر بسازید

$$Ru^{i_1 i_2}: IF\ x_1 is\ A_1^{i_1}\ and\ x_2 is\ A_2^{i_2}, THEN\ y\ is\ B^{i_1 i_2}$$

که در آن $i_1=1,2,\ldots,N_1$ و $i_2=1,2,\ldots,N_2$ است و مرکز مجموعه‌ی فازی $B^{i_1 i_2}$ که با $\bar{y}^{i_1 i_2}$ مشخص می‌گردد به صورت $\bar{y}^{i_1 i_2}=g\left(e_1^{i_1},e_2^{i_2}\right)$ انتخاب می‌شود.



- نمایش ترسیمی برای:

$$N_1=3, N_2=4, \alpha_1=\alpha_2=0\ , \beta_1=\beta_2=1$$

مرحله‌ی سوم:

- سیستم فازی را با استفاده از پایگاه قواعد ایجاد شده در مرحله‌ی قبل و موتور استنتاج ضرب، فازی‌ساز singleton و نافازی‌ساز متوسط مراکز ایجاد نمایید.

$$f(x)=\frac{\sum_{i_1=1}^{N_1}\sum_{i_2=1}^{N_2}\bar{y}^{i_1 i_2}\left(\mu_{A_1^{i_1}}(x_1)\,\mu_{A_2^{i_2}}(x_2)\right)}{\sum_{i_1=1}^{N_1}\sum_{i_2=1}^{N_2}\left(\mu_{A_1^{i_1}}(x_1)\,\mu_{A_2^{i_2}}(x_2)\right)}$$

نکته‌ها:

- از آنجا که مجموعه‌های فازی A_i^1 ، A_i^2 ، . . . و $A_i^{N_i}$ کامل هستند در هر $x \in U$ ، می‌توان i_1 و i_2 را چنان یافت که $\mu_{A_1^{i_1}}(x_1)\, \mu_{A_2^{i_2}}(x_2) \neq 0$ باشد. یعنی سیستم فازی خوش‌تعریف است (مخرج رابطه همواره غیر صفر می‌باشد).

- در حالت کلی، اگر تابع n ورودی باشد و N مجموعه‌ی فازی برای هر متغیر ورودی تعریف گردد تعداد قواعد N^n خواهد شد که نشان می‌دهد **با افزایش ورودی‌ها، تعداد قواعد سیستم فازی به طور نمایی افزایش می‌یابد.** از این مسئله در اصطلاح به عنوان **curse of dimensionality** نام برده می‌شود.

واژه‌نامه

خوش تعریف	well defined

دقت تقریب سیستم فازی :

قضیه:

- فرض کنید $g(x)$ تابعی نامشخص و $f(x)$ سیستم فازی طراحی شده برای تقریب آن باشد. اگر $g(x)$ در $U = [\alpha_1,\beta_1] \times [\alpha_2,\beta_2]$ پیوسته مشتق‌پذیر باشد

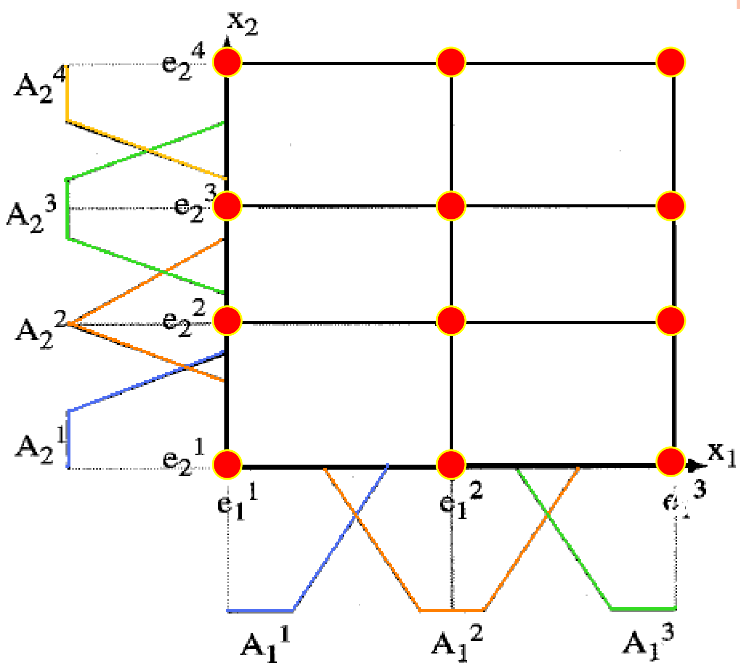
آنگاه:

$$\|g - f\|_\infty \leq \left\|\frac{\partial g}{\partial x_1}\right\|_\infty h_1 + \left\|\frac{\partial g}{\partial x_2}\right\|_\infty h_2$$

که نُرم بی‌نهایت و h_i به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$\|d(x)\|_\infty = \max_{x \epsilon U} |d(x)|$$

$$h_i = \max_{1 \leq j \leq N_i - 1} \left|e_i^{j+1} - e_i^j\right| \quad ,(i = 1,2)$$



در صورت علاقه‌مندی، می توانید اثبات این قضیه را از کتاب مطالعه نمایید.

نتایج حاصل از این قضیه:

(۱) سیستم‌های فازی طراحی شده در این بخش، تقریب‌گر عمومی هستند.

از آنجا که g(x) پیوسته مشتق‌پذیر است پس $\left\|\frac{\partial g}{\partial x_1}\right\|_\infty$ و $\left\|\frac{\partial g}{\partial x_2}\right\|_\infty$ اعداد کران‌داری هستند. بنابراین برای هر $\varepsilon > 0$ دلخواه، می‌توان h_1 و h_2 را چنان انتخاب کرد که :

$$\left\|\frac{\partial g}{\partial x_1}\right\|_\infty h_1 + \left\|\frac{\partial g}{\partial x_2}\right\|_\infty h_2 < \varepsilon$$

$$\sup_{x\epsilon U}|g(x) - f(x)| = \|g - f\|_\infty < \varepsilon$$

نتایج حاصل از این قضیه:

(۱) سیستم‌های فازی طراحی شده در این بخش، تقریب‌گر عمومی هستند.

(۲) برای دستیابی به دقت بالاتر در تقریب، لازم است مجموعه های فازی بیشتری در هر بعد در نظر گرفته شود. به عبارت دیگر، افزایش تعداد قواعد در پایگاه قواعد به افزایش قدرت تقریب سیستم فازی منجر می گردد.

(۳) برای طراحی سیستم فازی با دقت مطلوب، لازم است علاوه بر مقدار تابع در نقاط مشخص، کران مشتق $g(x)$ نسبت به x_1 و x_2 یعنی $\left\|\frac{\partial g}{\partial x_1}\right\|_\infty$ و $\left\|\frac{\partial g}{\partial x_2}\right\|_\infty$ را نیز بدانیم.

(۴) اگر در سیستم فازی، موتور استنتاج ضرب با موتور استنتاج مینیمم جایگزین گردد باز هم این قضیه معتبر است.

نقاط یکسان در تابع و سیستم فازی:

- اگر $f(x)$ سیستم فازی طراحی شده و $e_1^{i_1}$ و $e_2^{i_2}$ نقاط مورد استفاده در روند طراحی باشند آنگاه:

$$f(e_1^{i_1}, e_2^{i_2}) = g(e_1^{i_1}, e_2^{i_2}), \quad i_1 = 1, \cdots, N_1, \quad i_2 = 1, \cdots, N_2$$

نرمال بودن

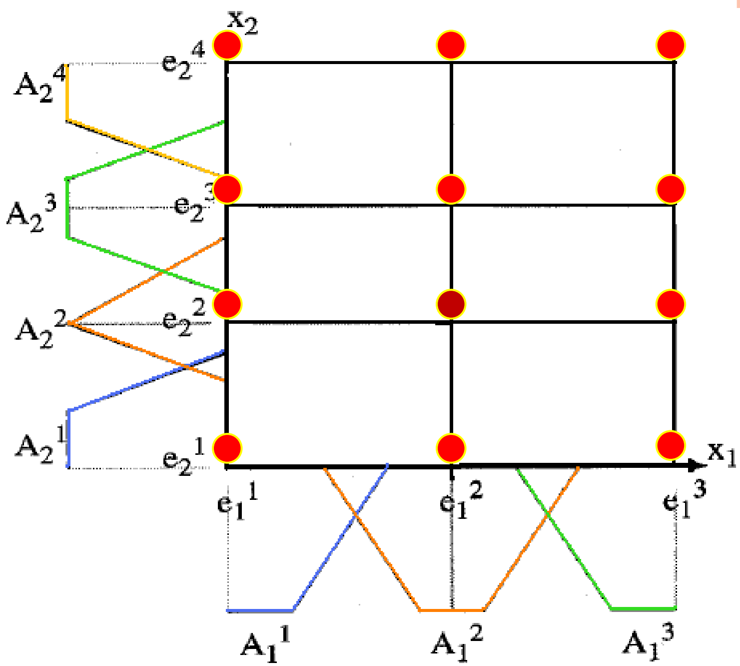
$$\mu_{A_1^{i_1}}(e_1^{i_1}) = \mu_{A_2^{i_2}}(e_2^{i_2}) = 1$$

سازگار بودن

$$\mu_{A_1^{j_1}}(e_1^{i_1}) = \mu_{A_2^{j_2}}(e_2^{i_2}) = 0 \ \ for\, j_1 \neq i_1, \quad j_2 \neq i_2$$

$$f(x) = \frac{\sum_{i_1=1}^{N_1} \sum_{i_2=1}^{N_2} \bar{y}^{i_1 i_2} \left(\mu_{A_1^{i_1}}(x_1)\, \mu_{A_2^{i_2}}(x_2) \right)}{\sum_{i_1=1}^{N_1} \sum_{i_2=1}^{N_2} \left(\mu_{A_1^{i_1}}(x_1)\, \mu_{A_2^{i_2}}(x_2) \right)}$$

$$\Rightarrow f(x) = \bar{y}^{i_1 i_2} = g(e_1^{i_1}, e_2^{i_2})$$



مثال:

سیستم فازی f(x) را چنان طراحی نمایید که تابع پیوسته‌ی g(x)=sin(x) را در فاصله‌ی U=[-3,3] با دقت 0.2ε = تقریب بزند به نحوی که:

$$\sup_{x\epsilon U}|g(x)-f(x)|<\varepsilon$$

یادآوری $\|g-f\|_\infty \le \left\|\frac{\partial g}{\partial x}\right\|_\infty h$

$$\left\|\frac{\partial g}{\partial x}\right\|_\infty = \|cos(x)\|_\infty = 1 \qquad \Rightarrow h = 0.2$$

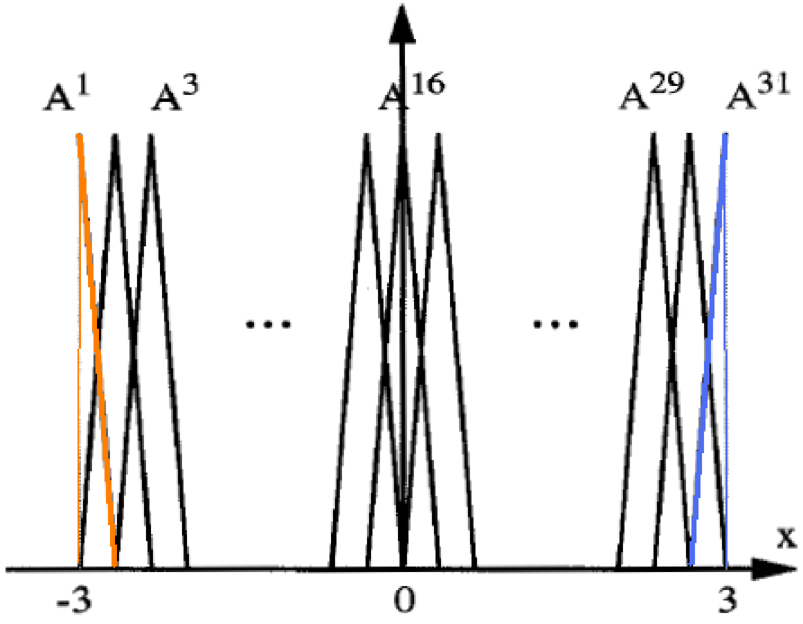
بنابراین در فاصله‌ی U=[-3,3] ، ۳۱ مجموعه‌ی فازی با تابع عضویت مثلثی تعریف می‌کنیم:

$$\mu_{A^1}(x) = \mu_{A^1}(x; -3, -3, -2.8)$$

$$\mu_{A^{31}}(x) = \mu_{A^{31}}(x; 2.8, 3, 3)$$

$$\mu_{A^j}(x) = \mu_{A^j}\left(x; e^{j-1}, e^j, e^{j+1}\right),$$

$$j = 2, \cdots, 30, \quad e^j = -3 + 0.2(j-1)$$



$$f(x) = \frac{\sum_{j=1}^{31} sin(e^j)\, \mu_{A^j}(x)}{\sum_{j=1}^{31} \mu_{A^j}(x)}$$

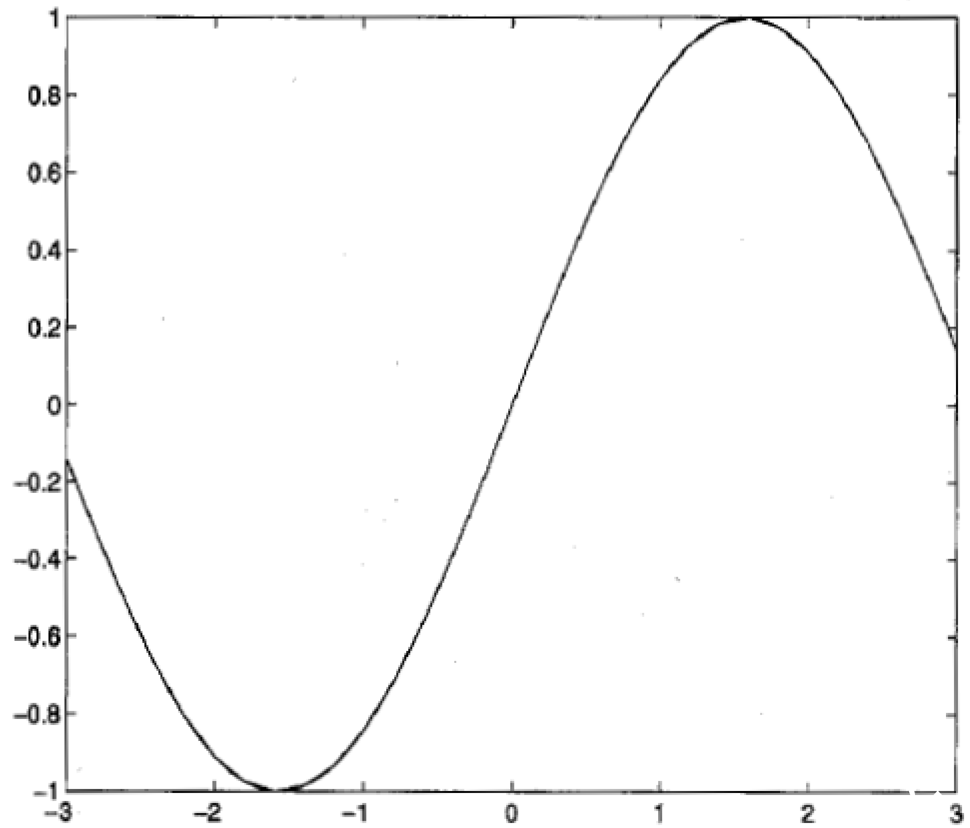


Figure 10.5. The designed fuzzy system $f(x)$ and the function $g(x) = six(x)$ (they are almost identical).

مثال:

سیستم فازی $f(x)$ را چنان طراحی نمایید که تابع $g(x)=0.52+0.1x_1+0.28x_2-0.06x_1x_2$ را در محدوده‌ی $U=[-1,1]\times[-1,1]$ با دقت $\varepsilon = 0.1$ تقریب بزند.

یادآوری $\|g-f\|_\infty \le \left\|\frac{\partial g}{\partial x_1}\right\|_\infty h_1 + \left\|\frac{\partial g}{\partial x_2}\right\|_\infty h_2$

$$\left\|\frac{\partial g}{\partial x_1}\right\|_\infty = \sup_{x\epsilon U}|0.1-0.06x_2| = 0.16$$

$$\left\|\frac{\partial g}{\partial x_2}\right\|_\infty = \sup_{x\epsilon U}|0.28-0.06x_1| = 0.34$$

$$\Rightarrow for\ h_1 = h_2 = 0.2 \Rightarrow \|g-f\|_\infty \le 0.16\times 0.2 + 0.34\times 0.2 = 0.1$$

بنابراین در فاصله‌ی $U=[-1,1]$ ، ۱۱ مجموعه‌ی فازی با تابع عضویت مثلثی تعریف می‌کنیم:

$$\mu_{A^1}(x) = \mu_{A^1}(x;-1,-1,-0.8)$$

$$\mu_{A^{11}}(x) = \mu_{A^{11}}(x;0.8,1,1)$$

$$\mu_{A^j}(x) = \mu_{A^j}\left(x;e^{j-1},e^j,e^{j+1}\right),\quad j=2,\cdots,10,\quad e^j = -1+0.2(j-1)$$

سیستم فازی شامل ۱۲۱= ۱۱×۱۱ قاعده به فرم زیر خواهد بود:

$$Ru^{i_1 i_2}: IF\ x_1 is\ A^{i_1}\ and\ x_2 is\ A^{i_2}, THEN\ y\ is\ B^{i_1 i_2}$$

که $i_1 = i_2 = 1, 2, \cdots, 11$ و مرکز $B^{i_1 i_2}$ برابر $\bar{y}^{\,i_1 i_2} = g(e^{i_1}, e^{i_2})$ است.

$$f(x) = \frac{\sum_{i_1=1}^{11} \sum_{i_2=1}^{11} g(e^{i_1}, e^{i_2}) \left(\mu_{A^{i_1}}(x_1)\, \mu_{A^{i_2}}(x_2) \right)}{\sum_{i_1=1}^{11} \sum_{i_2=1}^{11} \left(\mu_{A^{i_1}}(x_1)\, \mu_{A^{i_2}}(x_2) \right)}$$

آیا واقعا برای تقریب این تابع به
۱۲۱ قاعده نیاز است؟

طراحی سیستم فازی با دقت تقریب مرتبه‌ی دوم:

- فرض کنید $g(x)$ تابعی در مجموعه‌ی فشرده‌ی $U = [\alpha_1,\beta_1] \times [\alpha_2,\beta_2]$ باشد که رابطه‌ی تحلیلی آن نامشخص است. با این حال، فرض بر آن است که برای هر $x \in U$ ، می‌توان $g(x)$ را تعیین نمود. می‌خواهیم یک سیستم فازی **با دقت تقریب مرتبه‌ی دوم** برای تقریب $g(x)$ طراحی نماییم. این کار در سه مرحله انجام می‌گردد.

مرحله‌ی اول:

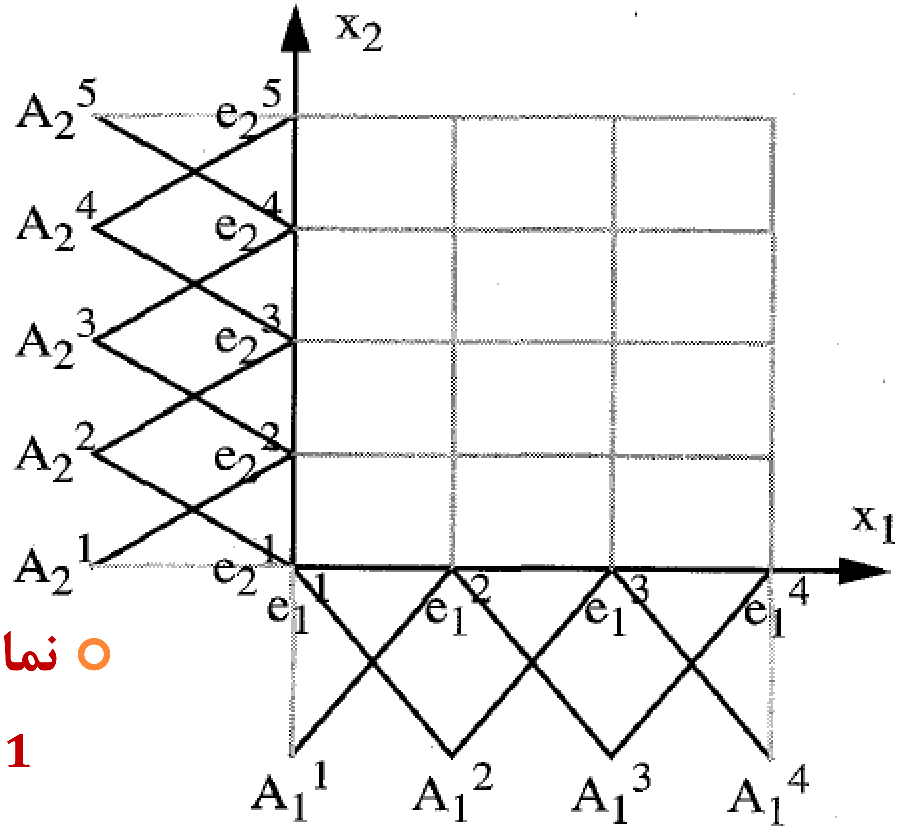
- N_i مجموعه‌ی فازی A_i^1 ، A_i^2 ، . . . و A_i^{Ni} را در محدوده‌ی $[\alpha_i,\beta_i]$ تعریف نمایید به نحوی که نرمال، سازگار و کامل و دارای تابع عضویت **مثلثی** باشند. همچنین:

$$\mu_{A_i^1}(x_i) = \mu_{A_i^1}(x_i; e_i^1, e_i^1, e_i^2)$$

$$\mu_{A_i^j}(x_i) = \mu_{A_i^j}(x_i; e_i^{j-1}, e_i^j, e_i^{j+1}), \qquad for\, j = 2, 3, \cdots, N_i - 1$$

$$\mu_{A_i^{N_i}}(x_i) = \mu_{A_i^{N_i}}(x_i; e_i^{N_i-1}, e_i^{N_i}, e_i^{N_i})$$

$$\alpha_i = e_i^1 < e_i^2 < \cdots < e_i^{N_i} = \beta_i$$



- نمایش ترسیمی برای:

$$N_1 = 4, N_2 = 5, \alpha_1 = \alpha_2 = 0\,, \beta_1 = \beta_2 = 1$$

مرحله‌ی دوم:

همانند قبل

- پایگاه قواعدی شامل $M=N_1\times N_2$ قاعده‌ی اگر-آنگاه به صورت زیر بسازید

$$Ru^{i_1 i_2}: IF\ x_1 is\ A_1^{i_1}\ and\ x_2 is\ A_2^{i_2}, THEN\ y\ is\ B^{i_1 i_2}$$

که در آن $i_1=1,2,\ldots,N_1$ و $i_2=1,2,\ldots,N_2$ است و مرکز مجموعه‌ی فازی $B^{i_1 i_2}$ که

با $\bar{y}^{i_1 i_2}$ مشخص می‌گردد به صورت $\bar{y}^{i_1 i_2}=g\left(e_1^{i_1},e_2^{i_2}\right)$ انتخاب می‌شود.

مرحله‌ی سوم:

همانند قبل

- سیستم فازی را با استفاده از پایگاه قواعد ایجاد شده در مرحله‌ی قبل و موتور استنتاج ضرب، فازی‌ساز singleton و نافازی‌ساز متوسط مراکز ایجاد نمایید.

$$f(x) = \frac{\sum_{i_1=1}^{N_1} \sum_{i_2=1}^{N_2} \bar{y}^{i_1 i_2} \left(\mu_{A_1^{i_1}}(x_1)\, \mu_{A_2^{i_2}}(x_2) \right)}{\sum_{i_1=1}^{N_1} \sum_{i_2=1}^{N_2} \left(\mu_{A_1^{i_1}}(x_1)\, \mu_{A_2^{i_2}}(x_2) \right)}$$

دقت تقریب سیستم فازی با دقت تقریب مرتبه دوم :

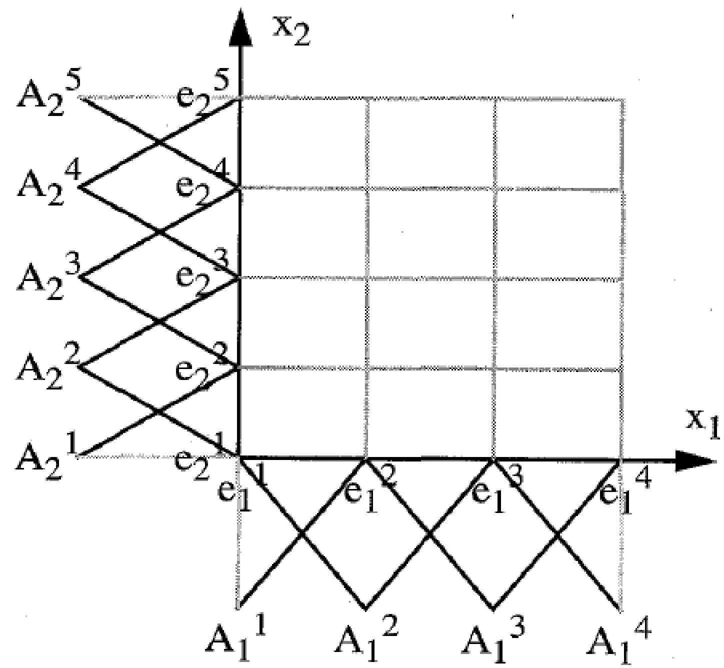
قضیه:

- فرض کنید $f(x)$ سیستم فازی‌ای باشد که از مراحل سه‌گانه‌ی اخیر حاصل شده است. اگر $g(x)$ در $U = [\alpha_1,\beta_1] \times [\alpha_2,\beta_2]$ پیوسته دو بار مشتق‌پذیر باشد آنگاه:

$$\|g-f\|_\infty \le \frac{1}{8}\left[\ \left\|\frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2}\right\|_\infty h_1^2 + \left\|\frac{\partial^2 g}{\partial x_2^2}\right\|_\infty h_2^2\ \right]$$

که در آن h_i به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$h_i = \max_{1 \le j \le N_i - 1} \left|e_i^{j+1} - e_i^j\right| \quad , (i = 1, 2)$$



در صورت علاقه‌مندی، می‌توانید اثبات این قضیه را از کتاب مطالعه نمایید.

نتیجه خاص حاصل از این قضیه:

اگر تابع عضویت مثلثی انتخاب گردد یک تقریب‌گر با دقت از مرتبه‌ی دو حاصل می‌گردد.

مثال:

سیستم فازی f(x) (با دقت تقریب مرتبه‌ی دوم) را چنان طراحی نمایید که تابع پیوسته‌ی g(x)=sin(x) را در فاصله‌ی U=[-3,3] با دقت 0.2 = ε تقریب بزنند.

یادآوری $\|g-f\|_\infty \leq \frac{1}{8}\left[\ \left\|\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}\right\|_\infty h^2\ \right]$

$$\left\|\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}\right\|_\infty = \|-sin(x)\|_\infty = 1$$

بنابراین در فاصله‌ی U=[-3,3] ، ۷ مجموعه‌ی فازی با تابع عضویت مثلثی تعریف می‌نماییم:

$$\mu_{A^1}(x) = \mu_{A^1}(x\,; -3, -3, -2)$$

$$\mu_{A^7}(x) = \mu_{A^7}(x\,; 2, 3, 3)$$

$$\mu_{A^j}(x) = \mu_{A^j}\left(x\,; e^{j-1}, e^j, e^{j+1}\right),$$
$$j = 2, \cdots, 6,\quad e^j = -3 + (j-1)$$

$$f(x) = \frac{\sum_{j=1}^{7} sin\left(e^j\right)\, \mu_{A^j}(x)}{\sum_{j=1}^{7}\, \mu_{A^j}(x)}$$

مثال:

سیستم فازی $f(x)$ (با دقت تقریب مرتبه‌ی دوم) را چنان طراحی نمایید که تابع $g(x)=0.52+0.1x_1+0.28x_2-0.06x_1x_2$ را در محدوده‌ی $U=[-1,1]\times[-1,1]$ با دقت $= 0.1\varepsilon$ تقریب بزنند.

یادآوری $\|g-f\|_\infty \le \frac{1}{8}\left[\left\|\frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2}\right\|_\infty h_1^2 + \left\|\frac{\partial^2 g}{\partial x_2^2}\right\|_\infty h_2^2\right]$

$$\left\|\frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2}\right\|_\infty = \left\|\frac{\partial^2 g}{\partial x_2^2}\right\|_\infty = 0 \qquad \Rightarrow f(x) = g(x) \qquad for\ all\ x\epsilon U$$

بنابراین در فاصله‌ی $U=[-1,1]$ ، ۲ مجموعه‌ی فازی با تابع عضویت مثلثی تعریف می‌کنیم:

$$\mu_{A_i^1}(x_i) = \mu_{A_i^1}(x\,;-1,-1,1) = \frac{1}{2}\,(1-x_i)$$

$$\mu_{A_i^2}(x_i) = \mu_{A_i^2}(x_i\,;-1,1,1) = \frac{1}{2}\,(1+x_i)$$

$$g(e_1^1, e_2^1) = g(-1,-1) = 0.08$$

$$g(e_1^1, e_2^2) = g(-1,1) = 0.76$$

$$g(e_1^2, e_2^1) = g(1,-1) = 0.4$$

$$g(e_1^2, e_2^2) = g(1,1) = 0.84$$

$$f(x)=\frac{\sum_{i_1=1}^{2}\sum_{i_2=1}^{2} g(e_1^{i_1},e_2^{i_2})\left(\mu_{A_1^{i_1}}(x_1)\,\mu_{A_2^{i_2}}(x_2)\right)}{\sum_{i_1=1}^{2}\sum_{i_2=1}^{2}\left(\mu_{A_1^{i_1}}(x_1)\,\mu_{A_2^{i_2}}(x_2)\right)}$$

$$=\frac{\frac{1}{4}\{0.08(1-x_1)(1-x_2)+0.76(1-x_1)(1+x_2)+0.4(1+x_1)(1-x_2)+0.84(1+x_1)(1+x_2)\}}{\frac{1}{4}\{(1-x_1)(1-x_2)+(1-x_1)(1+x_2)+(1+x_1)(1-x_2)+(1+x_1)(1+x_2)\}}$$

$$=0.52+0.1x_1+0.28x_2-0.06x_1x_2=g(x)$$

تعداد قواعد از ۱۲۱ به ۴ کاهش پیدا کرد.

مثال: تعمیم نتیجه‌ی حاصل از مثال قبل

فرض کنید f(x) سیستم فازی طراحی شده طی مراحل سه‌گانه‌ی اخیر باشد.

چنانچه g(x) به صورت $g(x)=\sum_{k_1=0}^{1}\sum_{k_2=0}^{1} a_{k_1k_2}\, x_1^{k_1}\, x_2^{k_2}$ باشد که در آن $a_{k_1k_2}$ مقادیر ثابت هستند ثابت کنید:

$$f(x)=g(x)\quad for\ all\ \ x\epsilon U$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2}=\frac{\partial^2 g}{\partial x_2^2}=0$$

$$\|g-f\|_\infty \le \frac{1}{8}\left[\left\|\frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2}\right\|_\infty h_1^2+\left\|\frac{\partial^2 g}{\partial x_2^2}\right\|_\infty h_2^2\right]=0$$

$$\Rightarrow \|g-f\|_\infty=0$$

$$\Rightarrow\ \ f(x)=g(x)\quad for\ all\ \ x\epsilon U$$

دقت تقریب سیستم فازی با نافازی ساز ماکزیمم :

طراحی سیستم فازی با نافازی ساز ماکزیمم :

- فرض کنید $g(x)$ تابعی در مجموعه‌ی فشرده‌ی $U = [\alpha_1,\beta_1] \times [\alpha_2,\beta_2]$ باشد که رابطه‌ی تحلیلی آن نامشخص است. با این حال، فرض بر آن است که برای هر $x \in U$ ، می‌توان $g(x)$ را تعیین نمود. می‌خواهیم یک سیستم فازی **با نافازی‌ساز ماکزیمم** برای تقریب $g(x)$ طراحی نماییم. طراحی در سه مرحله انجام می‌گردد.

مرحله‌ی اول:

همانند قبل

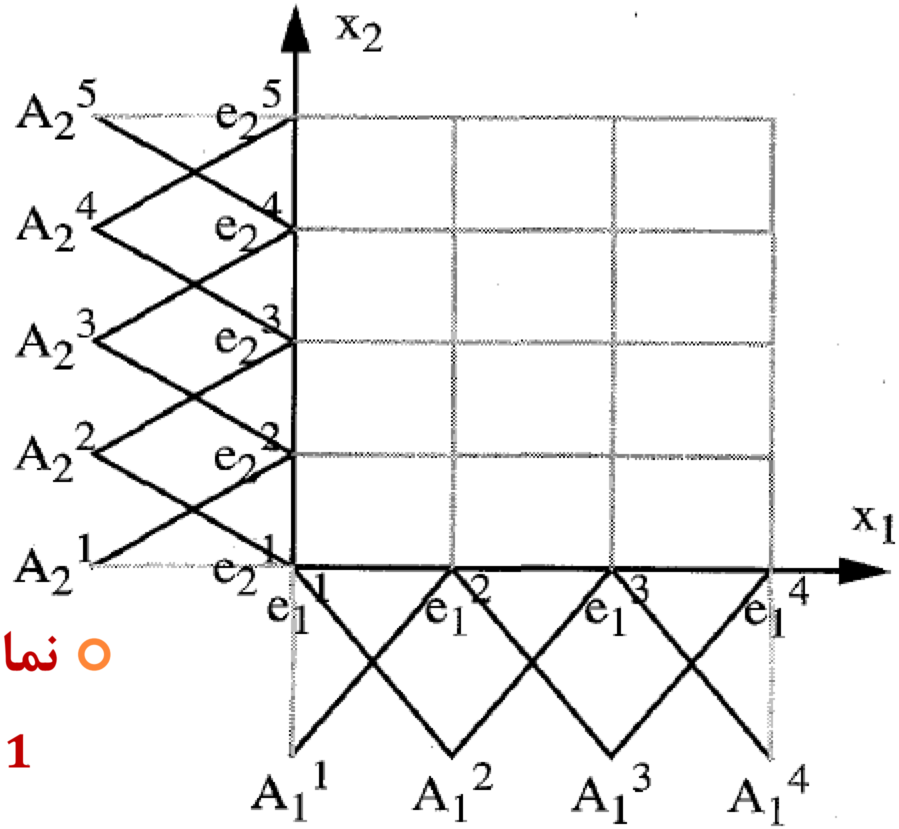
- N_i مجموعه‌ی فازی A_i^{1}، A_i^{2}، . . . و $A_i^{N_i}$ را در محدوده‌ی $[\alpha_i,\beta_i]$ تعریف نمایید به نحوی که نرمال، سازگار و کامل و دارای تابع عضویت مثلثی باشند. همچنین:

$$\mu_{A_i^1}(x_i) = \mu_{A_i^1}(x_i; e_i^1, e_i^1, e_i^2)$$

$$\mu_{A_i^j}(x_i) = \mu_{A_i^j}(x_i; e_i^{j-1}, e_i^j, e_i^{j+1}), \qquad for\ j = 2, 3, \cdots, N_i - 1$$

$$\mu_{A_i^{N_i}}(x_i) = \mu_{A_i^{N_i}}(x_i; e_i^{N_i-1}, e_i^{N_i}, e_i^{N_i})$$

$$\alpha_i = e_i^1 < e_i^2 < \cdots < e_i^{N_i} = \beta_i$$



- نمایش ترسیمی برای:

$N_1 = 4, N_2 = 5, \alpha_1 = \alpha_2 = 0\ , \beta_1 = \beta_2 = 1$

مرحله‌ی دوم:

همانند قبل

- پایگاه قواعدی شامل $M=N_1\times N_2$ قاعده‌ی اگر-آنگاه به صورت زیر بسازید

$$Ru^{i_1 i_2}: IF\ x_1 is\ A_1^{i_1}\ and\ x_2 is\ A_2^{i_2}, THEN\ y\ is\ B^{i_1 i_2}$$

که در آن $i_1=1,2,\ldots,N_1$ و $i_2=1,2,\ldots,N_2$ است و مرکز مجموعه‌ی فازی $B^{i_1 i_2}$ که با $\bar{y}^{i_1 i_2}$ مشخص می‌گردد به صورت $\bar{y}^{i_1 i_2} = g\left(e_1^{i_1}, e_2^{i_2}\right)$ انتخاب می‌شود.

مرحله‌ی سوم:

- سیستم فازی را با استفاده از پایگاه قواعد ایجاد شده در مرحله‌ی قبل و موتور استنتاج ضرب، فازی‌ساز singleton و نافازی‌ساز **ماکزیمم** ایجاد نمایید.

$$f(x) = \bar{y}^{\,i_1^* i_2^*} = g\left(e_1^{i_1^*}, e_2^{i_2^*}\right)$$

$$\mu_{A_1^{i_1^*}}(x_1)\ \mu_{A_2^{i_2^*}}(x_2) \geq \mu_{A_1^{i_1}}(x_1)\ \mu_{A_2^{i_2}}(x_2)\ , for\ all\ i_1 = 1, \cdots, N_1\ , i_2 = 1, \cdots, N_2$$

دقت تقریب سیستم فازی با نافازی‌ساز ماکزیمم :

قضیه:

- فرض کنید f(x) سیستم فازی طراحی شده طی مراحل سه‌گانه‌ی اخیر باشد.

اگر g(x) در $U = [\alpha_1,\beta_1] \times [\alpha_2,\beta_2]$ پیوسته مشتق پذیر باشد آنگاه:

$$\|g-f\|_\infty < \left\|\frac{\partial g}{\partial x_1}\right\|_\infty h_1 + \left\|\frac{\partial g}{\partial x_2}\right\|_\infty h_2$$

که در آن h_i به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$h_i = \max_{1 \le j \le N_i - 1} \left|e_i^{j+1} - e_i^j\right| \quad ,(i = 1,2)$$

در صورت علاقه‌مندی، می‌توانید اثبات این قضیه را از کتاب مطالعه نمایید.

بنابراین سیستم‌های فازی با موتور استنتاج ضرب، فازی‌ساز singleton و نافازی‌ساز ماکزیمم، تقریب‌گر عمومی هستند.

مثال:

سیستم فازی f(x) (با نافازی‌ساز ماکزیمم) را چنان طراحی نمایید که تابع پیوسته‌ی g(x)=sin(x) را در فاصله‌ی U=[-3,3] با دقت 0.2ε = تقریب بزند.

یادآوری $\|g-f\|_\infty \leq \left\|\frac{\partial g}{\partial x}\right\|_\infty h$

$$\left\|\frac{\partial g}{\partial x}\right\|_\infty = \|cos(x)\|_\infty = 1 \qquad \Rightarrow\ h = 0.2$$

بنابراین در فاصله‌ی U=[-3,3] ، ۳۱ مجموعه‌ی فازی با تابع عضویت مثلثی تعریف می‌نماییم:

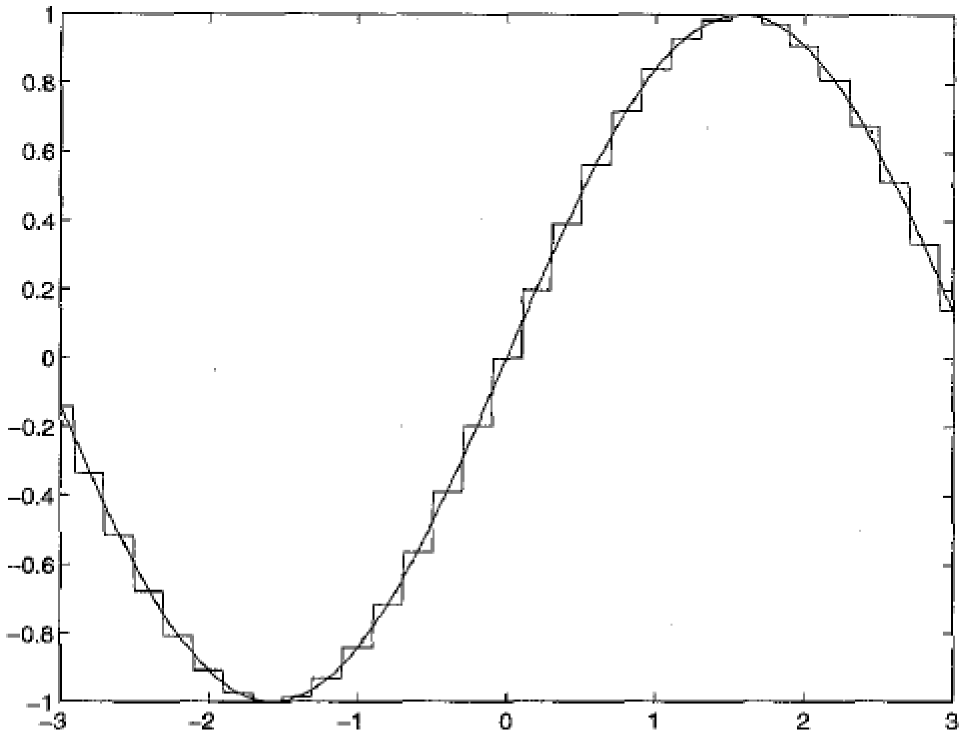
$$\mu_{A^1}(x) = \mu_{A^1}(x\,; -3, -3, -2.8)$$

$$\mu_{A^{31}}(x) = \mu_{A^{31}}(x\,; 2.8, 3, 3)$$

$$\mu_{A^j}(x) = \mu_{A^j}\left(x\,; e^{j-1}, e^j, e^{j+1}\right),$$

$$j = 2, \cdots, 30, \quad e^j = -3 + 0.2(j-1)$$

$$f(x) = \begin{cases} sin(-3) & x\epsilon[-3, -2.9] \\ sin(e^j) & x\epsilon\left(e^j - 0.1\,, e^j + 0.1\right), j = 2, \cdots, 30 \\ sin(3) & x\epsilon(2.9, 3] \end{cases}$$


1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
−0.2
−0.4
−0.6
−0.8
−1
−3
−2
−1
0
1
2
3

مثال:

سیستم فازی f(x) (با نافازی ساز ماکزیمم) را چنان طراحی نمایید که تابع

$g(x)=0.52+0.1x_1+0.28x_2-0.06x_1x_2$ را در محدوده‌ی $U=[-1,1]\times[-1,1]$ با دقت

$= 0.1\varepsilon$ تقریب بزند.

یادآوری $\|g-f\|_\infty < \left\|\frac{\partial g}{\partial x_1}\right\|_\infty h_1 + \left\|\frac{\partial g}{\partial x_2}\right\|_\infty h_2$

$$\left\|\frac{\partial g}{\partial x_1}\right\|_\infty = \sup_{x\epsilon U}|0.1-0.06x_2| = 0.16$$

$$\left\|\frac{\partial g}{\partial x_2}\right\|_\infty = \sup_{x\epsilon U}|0.28-0.06x_1| = 0.34$$

$$\Rightarrow for\ h_1 = h_2 = 0.2 \Rightarrow \|g-f\|_\infty \le 0.16\times 0.2 + 0.34\times 0.2 = 0.1$$

بنابراین در فاصله‌ی $U=[-1,1]$ ، ۱۱ مجموعه‌ی فازی با تابع عضویت مثلثی تعریف می‌کنیم:

$$\mu_{A^1}(x) = \mu_{A^1}(x;-1,-1,-0.8)$$

$$\mu_{A^{11}}(x) = \mu_{A^{11}}(x;0.8,1,1)$$

$$\mu_{A^j}(x) = \mu_{A^j}\left(x;e^{j-1},e^j,e^{j+1}\right),\quad j=2,\cdots,10,\ \ e^j=-1+0.2(j-1)$$

سیستم فازی شامل ۱۲۱= ۱۱×۱۱ قاعده به فرم زیر خواهد بود:

$Ru^{i_1 i_2}$: *IF* x_1 *is* A^{i_1} *and* x_2 *is* A^{i_2}, *THEN* y *is* $B^{i_1 i_2}$

که $i_1 = i_2 = 1, 2, \cdots, 11$ و مرکز $B^{i_1 i_2}$ برابر $\bar{y}^{\,i_1 i_2} = g(e^{i_1}, e^{i_2})$ است.

در این مثال داریم:

$$e^j = -1 + 0.2(j-1)\,, \qquad for\ \ j = 1, \cdots, 11$$

$$U^{i_1 i_2} = \left[e^{i_1}, e^{i_1+1}\right] \times \left[e^{i_2}, e^{i_2+1}\right], \qquad for\ i_1, i_2 = 1, \cdots, 10$$

همانطور که در شکل نشان داده شده است $U^{i_1 i_2}$ خود به چهار بخش تجزیه شده است:

$$U^{i_1 i_2} = \bigcup_{p=0}^{1} \bigcup_{q=0}^{1} U_{pq}^{i_1 i_2}$$

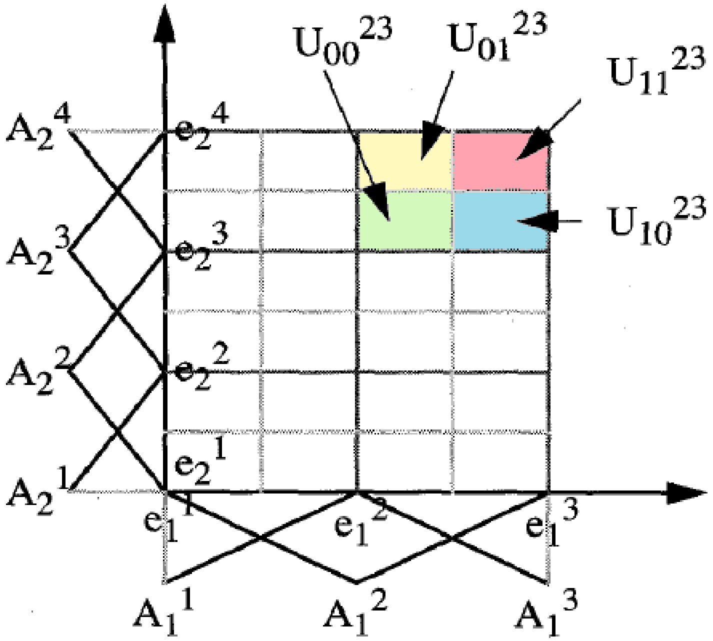
$$U_{00}^{i_1 i_2} = \left[e_1^{i_1}, \frac{1}{2}\left(e_1^{i_1} + e_1^{i_1+1}\right)\right] \times \left[e_2^{i_2}, \frac{1}{2}\left(e_2^{i_2} + e_2^{i_2+1}\right)\right]$$

$$U_{01}^{i_1 i_2} = \left[e_1^{i_1}, \frac{1}{2}\left(e_1^{i_1} + e_1^{i_1+1}\right)\right] \times \left[\frac{1}{2}\left(e_2^{i_2} + e_2^{i_2+1}\right), e_2^{i_2+1}\right]$$

$$U_{10}^{i_1 i_2} = \left[\frac{1}{2}\left(e_1^{i_1} + e_1^{i_1+1}\right), e_1^{i_1+1}\right] \times \left[e_2^{i_2}, \frac{1}{2}\left(e_2^{i_2} + e_2^{i_2+1}\right)\right]$$

$$U_{11}^{i_1 i_2} = \left[\frac{1}{2}\left(e_1^{i_1} + e_1^{i_1+1}\right), e_1^{i_1+1}\right] \times \left[\frac{1}{2}\left(e_2^{i_2} + e_2^{i_2+1}\right), e_2^{i_2+1}\right]$$

$$f(x) = g\left(e^{i_1+p}, e^{i_2+q}\right), \qquad x \epsilon U_{pq}^{i_1 i_2}$$



آیا سیستم‌های فازی با نافازی‌ساز
ماکزیمم، تقریب‌گر مرتبه‌ی دو
نیز می‌باشند؟

مثال نقض:

فرض کنید:

$$g(x) = x, \qquad x\epsilon U = [0,1]$$

$$\mu_{A^i}(x) = \mu_{A^i}(x\,; e^{i-1}, e^i, e^{i+1})\ , e^0 = 0\ , e^{N+1} = 1\ , e^i = \frac{i-1}{N-1}\ , i = 1, \cdots, N$$

که N می‌تواند هر مقدار صحیح مثبتی باشد. سیستم فازی شامل N قاعده است و داریم $h = \dfrac{1}{N-1}$.

همچنین فرض کنید:

$$U^i = \left[e^i\ , e^{i+1}\right], i = 1, \cdots, N-1$$

$$if\ x\epsilon U^i \Rightarrow \|g-f\|_\infty = \max_{x\epsilon U^i}|g(x) - f(x)| = \max_{x\epsilon[e^i\ , e^{i+1}]}\left|x - g\left(e^i\right)\ or\ g\left(e^{i+1}\right)\right|$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^{i+1} - e^i\right) = \frac{1}{2}h$$

از آنجا که برای هر مقدار صحیح N ، داریم $h = \dfrac{1}{N-1} \geq h^2$ این سیستم فازی نمی‌تواند تقریب‌گر مرتبه دو باشد.

در نتیجه،
سیستم‌های فازی با نافازی‌ساز متوسط مراکز نسبت به سیستم‌های فازی با نافازی‌ساز ماکزیمم، تقریب‌گرهای بهتری هستند.

QUESTIONS?

موعد تحویل سری سوم تمرین‌های درس