مدل سازی شناختی

Cognitive Modeling

Presented by: Dr. Maleki, Semnan University, Spring 2024, http://maleki.semnan.ac.ir

مبحث سوم:
کاربردهای عددی معادله دیفرانسیل

ای نامه‌ی اسرار الهی که تویی
وی آینه‌ی جمال شاهی که تویی
بیرون ز تو نیست آنچه در عالم هست
از خود بطلب هر آنچه خواهی که تویی

اهداف

پس از آموختن این مبحث باید بتوانید:

- مدل صفحه گسترده‌ای از نوسان‌گر بدون اصطکاک را پیاده‌سازی کنید؛
- از روش اولر برای انتگرال‌گیری عددی برای شبیه‌سازی استفاده کنید؛ و
- به طور غیررسمی درک کنید که تابع چیست.

فهرست مطالب

- دورنما
- ابتدا جوجه ای کروی فرض می کنیم (فرض ساده کننده)
- شبیه سازی های عددی
- انتگرال گیری عددی و معادلات دیفرانسیل : روش اولر
- حل معادله دیفرانسیل فنر
- جمع بندی

چالش‌های پیش رو برای شبیه‌سازی نورون

برای شبیه‌سازی نورون با دو چالش روبرو هستیم:

- نحوه‌ی کاربرد معادلات دیفرانسیل در شبیه‌سازی،
- پیچیدگی‌های خاص نورون‌ها و مدل‌های شناختی.

به جای مواجهه‌ی همزمان با پیچیدگی‌های این مدل‌ها و مسائل حل معادله دیفرانسیل، ترجیح دادیم تمرکز این مبحث روی مثال ملموس‌تری یعنی فنرها باشد.

معادله دیفرانسیل

معادلات دیفرانسیل برای بیان ارتباط بین متغیرها استفاده خواهد شد تا امکان استفاده از کامپیوتر را برای شبیه‌سازی تغییرات تدریجی سیستم در طول زمان را برایمان فراهم نماید.

فهرست مطالب

- دورنما
- ابتدا جوجه ای کروی فرض می کنیم (فرض ساده کننده)
- شبیه سازی های عددی
- انتگرال گیری عددی و معادلات دیفرانسیل : روش اولر
- حل معادله دیفرانسیل فنر
- جمع بندی

مدل

مدل‌ها توصیف ساده‌شده‌ای از یک سیستم یا یک پدیده است که رفتار آن را از دیدگاهی خاص با دقت مطلوب بازنمایی می‌کند.

به بیان ساده‌تر، مدل‌ها نمونه‌های بسیار ساده شده‌ای از پدیده‌ی هدف می‌باشند.

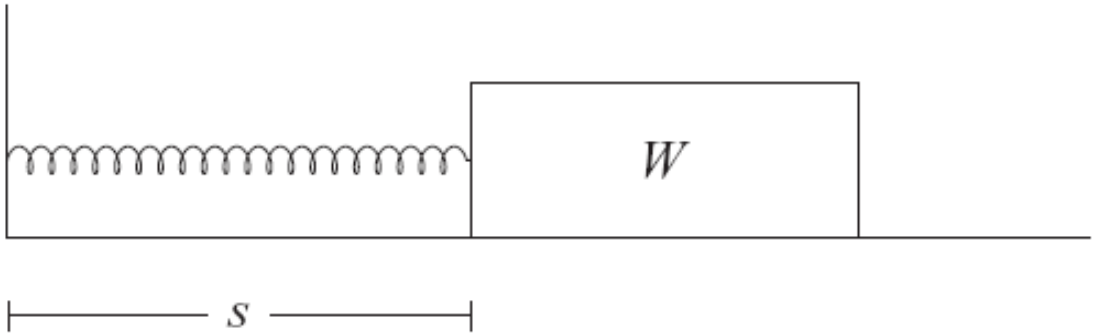
ولی «بسیار ساده» نشانگر چه میزان ساده‌سازی است؟

تنها پس از پیاده‌سازی قادر خواهیم بود به این سوال پاسخ دهیم. اگر نتوانیم به رفتاری مطابق مشاهدات تجربی دست یابیم باید پیچیدگی مدل را افزایش دهیم ولی تا آن موقع، بی‌امان مدل را ساده خواهیم کرد.

مدل فنر

برای معرفی ملموس‌تر شبیه‌سازی عددی، از مثال فنری که به جلو و عقب می‌لغزد استفاده خواهیم کرد. فنرهای واقعی به واسطه‌ی اصطکاک سطحی و مقاومت هوا، پردردسر هستند. پرداختن به این متغیرها پیچیدگی‌های غیرضروری‌ای را در پی دارد. از این رو ما یک نمونه انتزاعی از فنر را در نظر می‌گیریم و آن را به عنوان یک سیستم هارمونیک ایده‌آل و ساده شده مدل می‌کنیم.

گام نخست مدل سازی: تشریح و توصیف مسئله



وزنه‌ای به وزن W

موقعیت وزنه (یا طول فنر) s

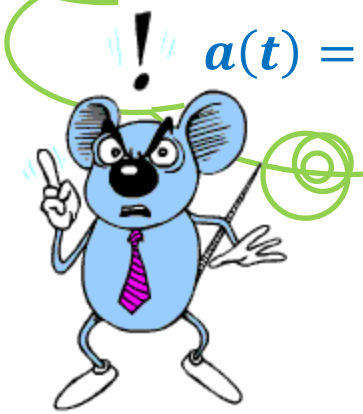
سطح بدون اصطکاک

هدف : $s(t) = ?$

یک نکته‌ی تجربی بسیار مهم:

شتاب وزنه پس از رها شدن برابر حاصلضرب مقدار ثابت P و موقعیت فعلی آن است.

$$a(t) = -P\,s(t)$$



سوال: توصیف آنچه داریم مدل می کنیم.

- تعریفی کلامی برای سرعت بر حسب مکان (فاصله) و زمان ارائه نمایید.
- تعریفی کلامی برای شتاب بر حسب سرعت و زمان ارائه نمایید.
- تعریفی کلامی برای شتاب با استفاده از دو پاسخ پیشین خود ارائه نمایید که رابطه شتاب را با مکان و زمان نشان دهد.

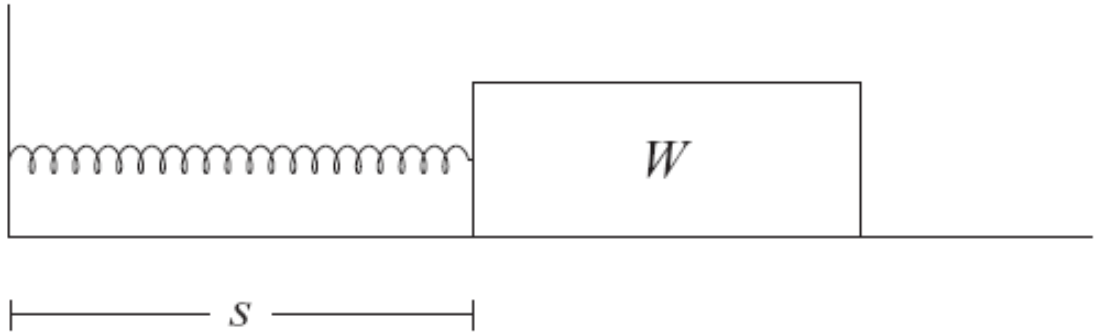
بازنمایی پاسخ‌ها با استفاده از نمادها:

$$Acceleration \approx \frac{V(t_1) - V(t_0)}{t_1 - t_0} \Rightarrow Acceleration = \frac{dV}{dt}$$

$$Velocity \approx \frac{s(t_1) - s(t_0)}{t_1 - t_0} \Rightarrow Velocity = \frac{ds}{dt}$$

$$\Rightarrow Acceleration = \frac{d^2s}{dt^2}$$

معادله‌ی حاکم بر سیستم



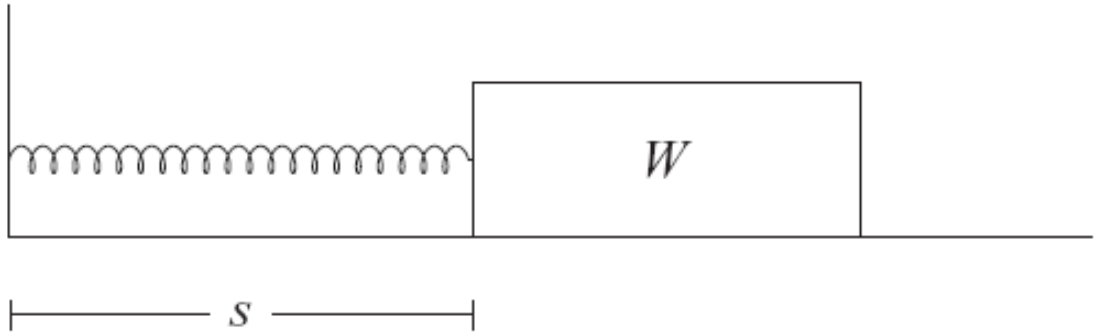
نکته‌ی تجربی : $a(t) = -P\, s(t)$

مفهوم شتاب : $a(t) = \dfrac{d^2 s(t)}{dt^2}$

$\Rightarrow \quad \dfrac{d^2 s(t)}{dt^2} = -P\, s(t)$

حل کردن این معادله دیفرانسیل به معنای یافتن معادله‌ی دیگری برای $s(t)$ است به نحوی که اگر دو بار از آن مشتق بگیریم دقیقا به همان معادله‌ای که از آن شروع کردیم برسیم (با لحاظ کردن ضریب ثابت $-P$).

معادله‌ی حاکم بر سیستم



$$\frac{d^2 s(t)}{dt^2} = -P\, s(t)$$

اگر با دقت این معادله را ببینید و آموخته‌های پیشین خود را به خاطر آورید باید بتوانید فرم پاسخ را حدس بزنید.

به یابد آورید که معادلات دیفرانسیل اغلب با یک حدس آموخته حل می‌گردند.

فهرست مطالب

- دورنما
- ابتدا جوجه ای کروی فرض می کنیم (فرض ساده کننده)
- شبیه سازی های عددی
- انتگرال گیری عددی و معادلات دیفرانسیل : روش اولر
- حل معادله دیفرانسیل فنر
- جمع بندی

شبیه‌سازی عددی

تصور کنید دارید با سرعت ۵۰ کیلومتر بر ساعت رانندگی می‌کنید.

اگر از شما بپرسم پنج دقیقه‌ی دیگر به کجا خواهید رسید می‌توانید آن را با دانستن محل فعلی و سرعت خود تعیین کنید.

«سرعت، چگونگی تغییر مکان نسبت به زمان را بیان می‌کند.»

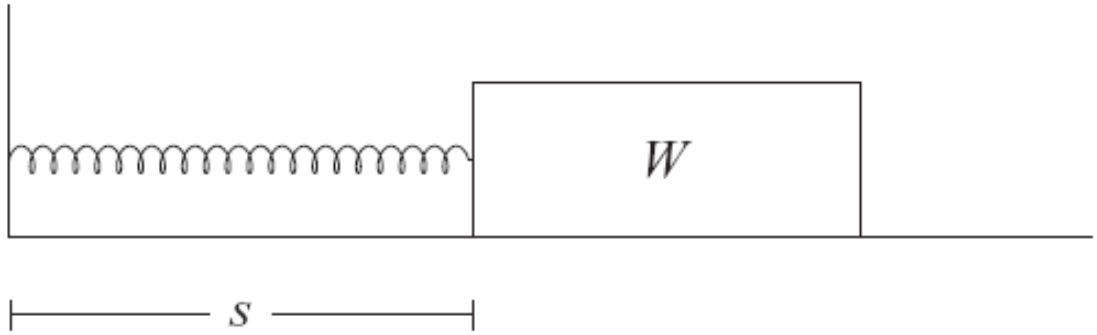
یادآوری تعریف مشتق :
$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

با تقریب :
$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$\Rightarrow \quad f(x+\Delta x) = f(x) + \frac{df(x)}{dx}\Delta x$$

$$\Rightarrow \quad s(t+\Delta t) = s(t) + \frac{ds(t)}{dt}\Delta t = s(t) + v(t)\,\Delta t$$

شبیه سازی عددی مثال حرکت فنر

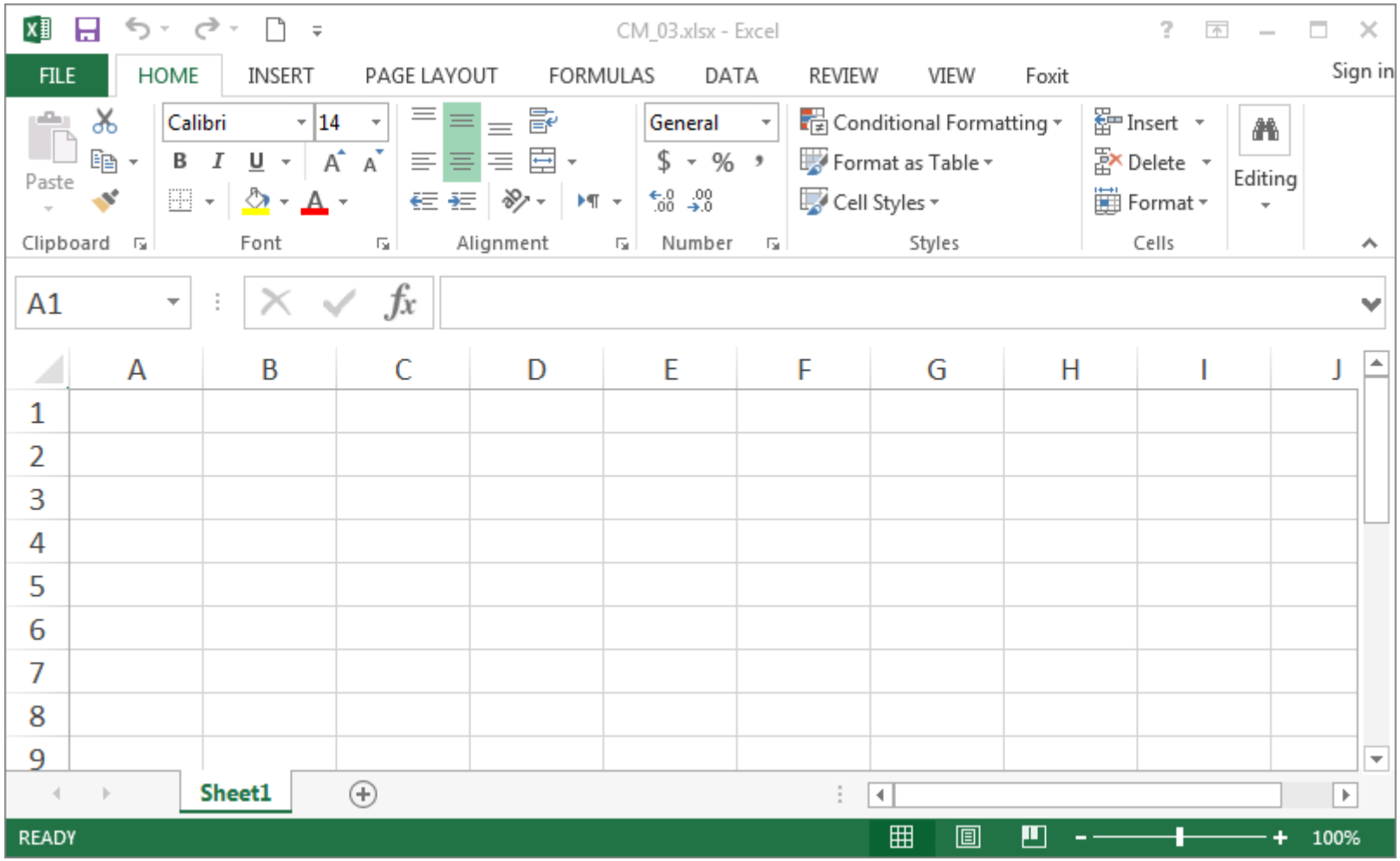


$$\frac{d^2 s(t)}{dt^2} = -P\, s(t)$$

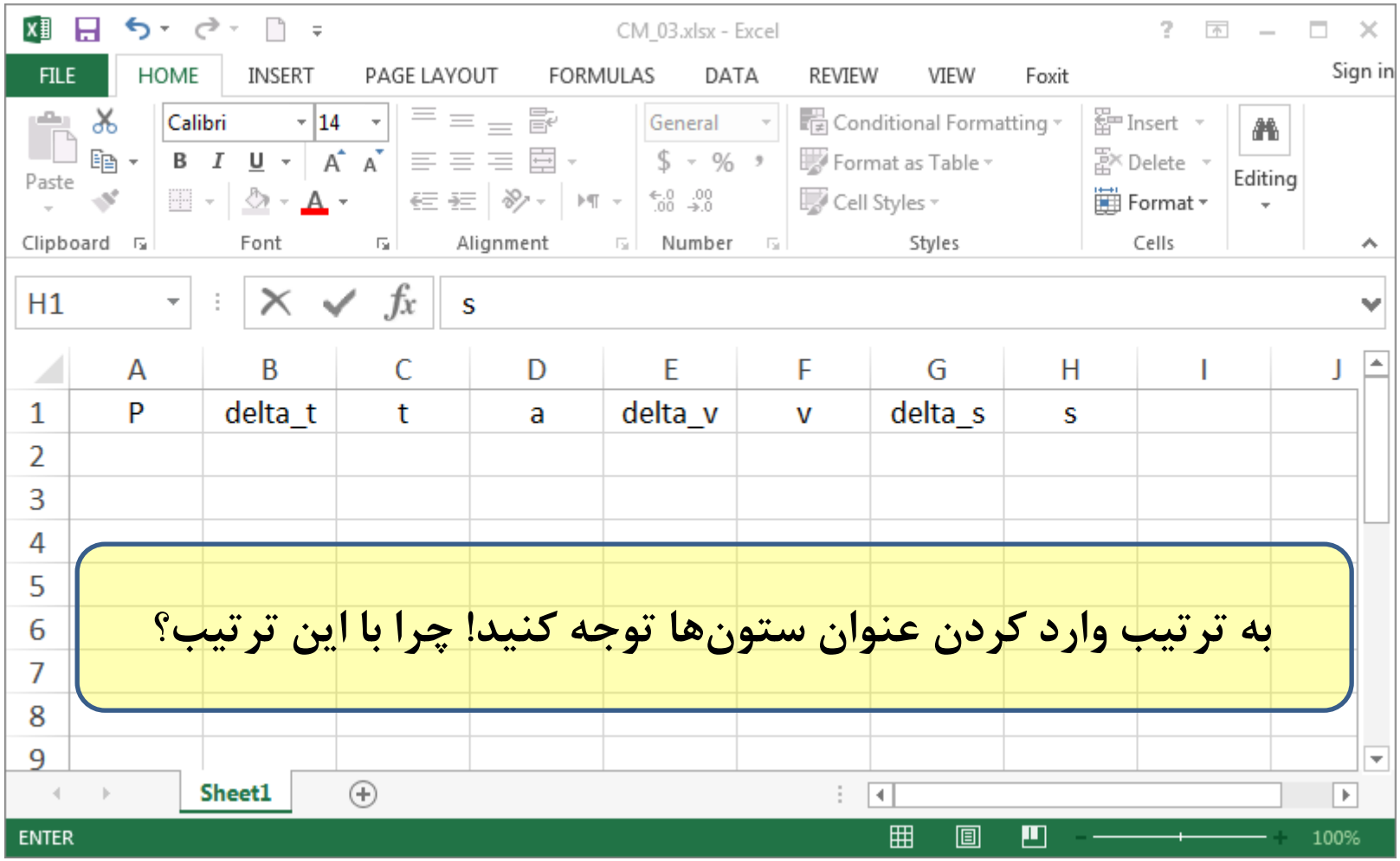
مقدار جدید = مقدار قبلی + نرخ تغییرات مقدار × گام زمانی

شبیه سازی عددی در صفحه گسترده

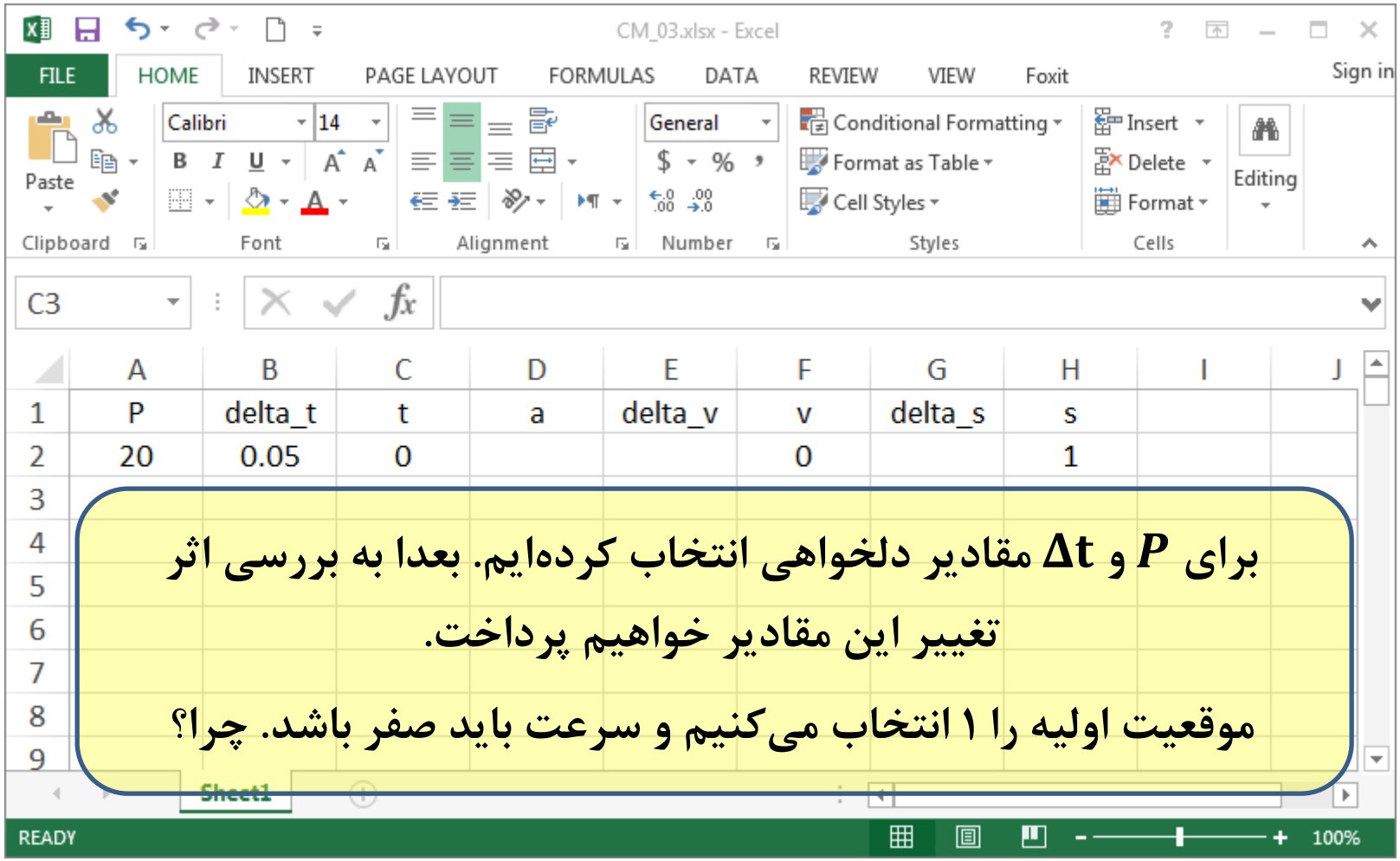
باز کردن صفحه گسترده در نرم‌افزار اکسل:



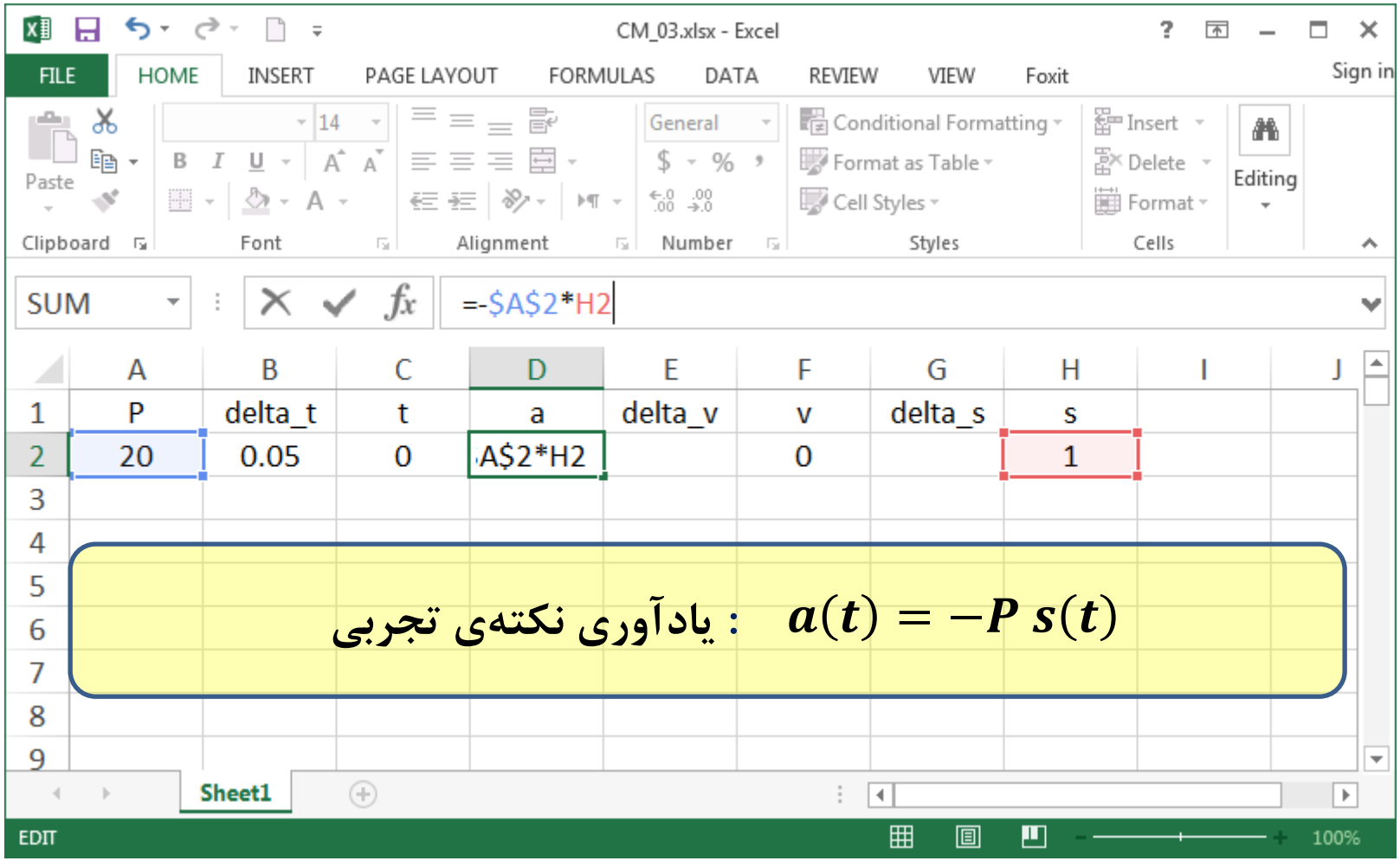
وارد کردن برچسب ستون‌ها:



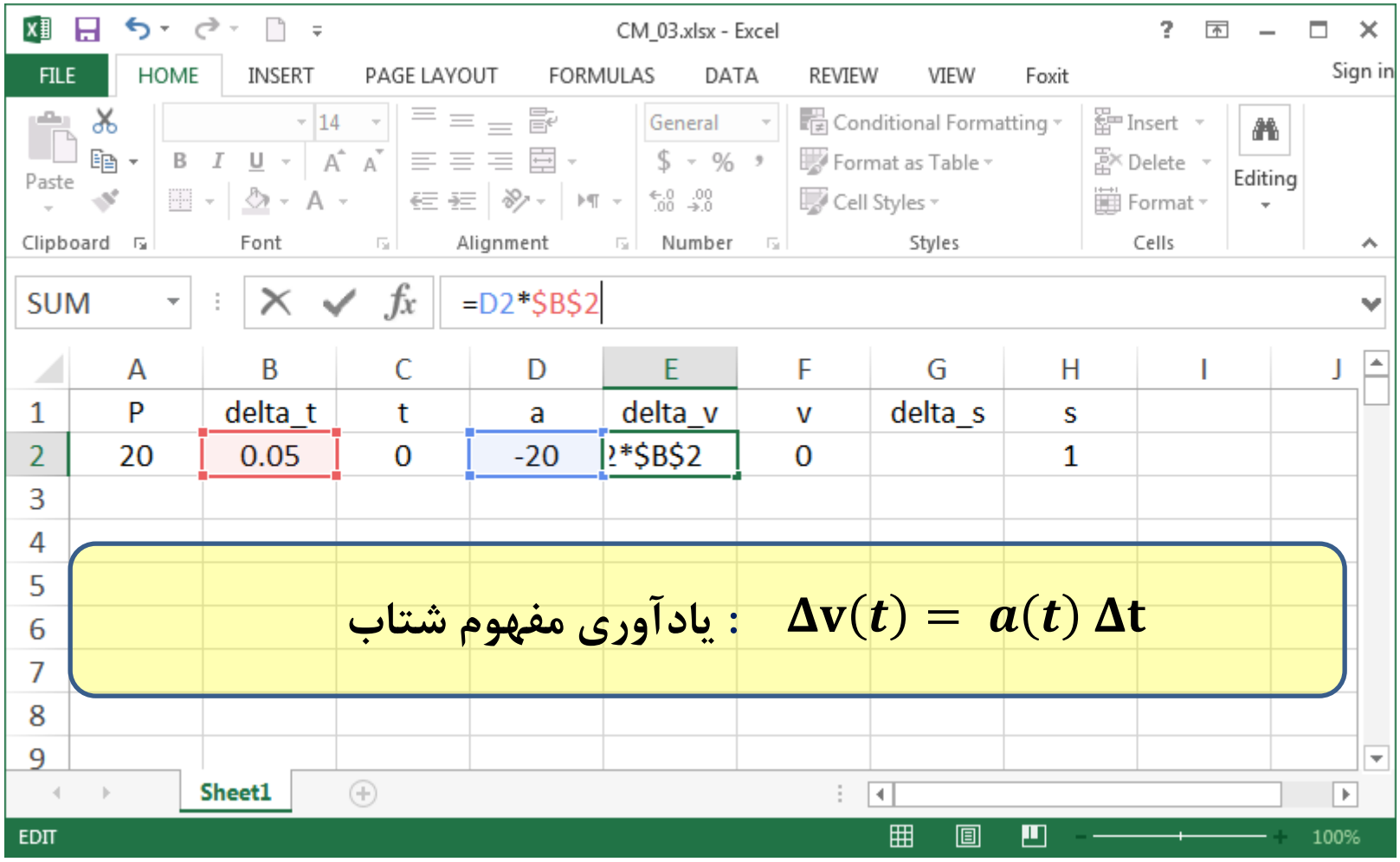
وارد کردن فرض‌ها و مقادیر اولیه:



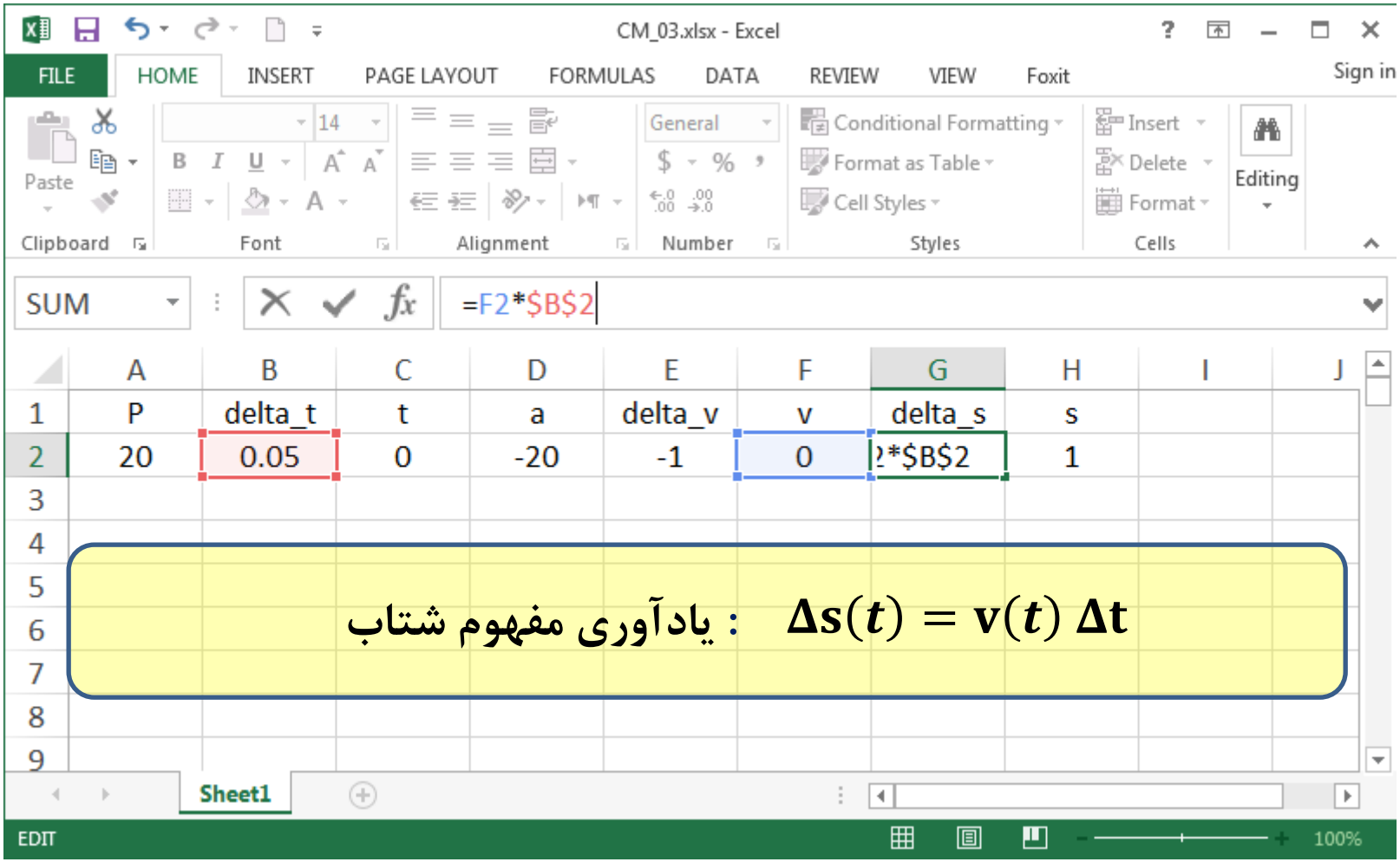
وارد کردن فرمول محاسبه شتاب:



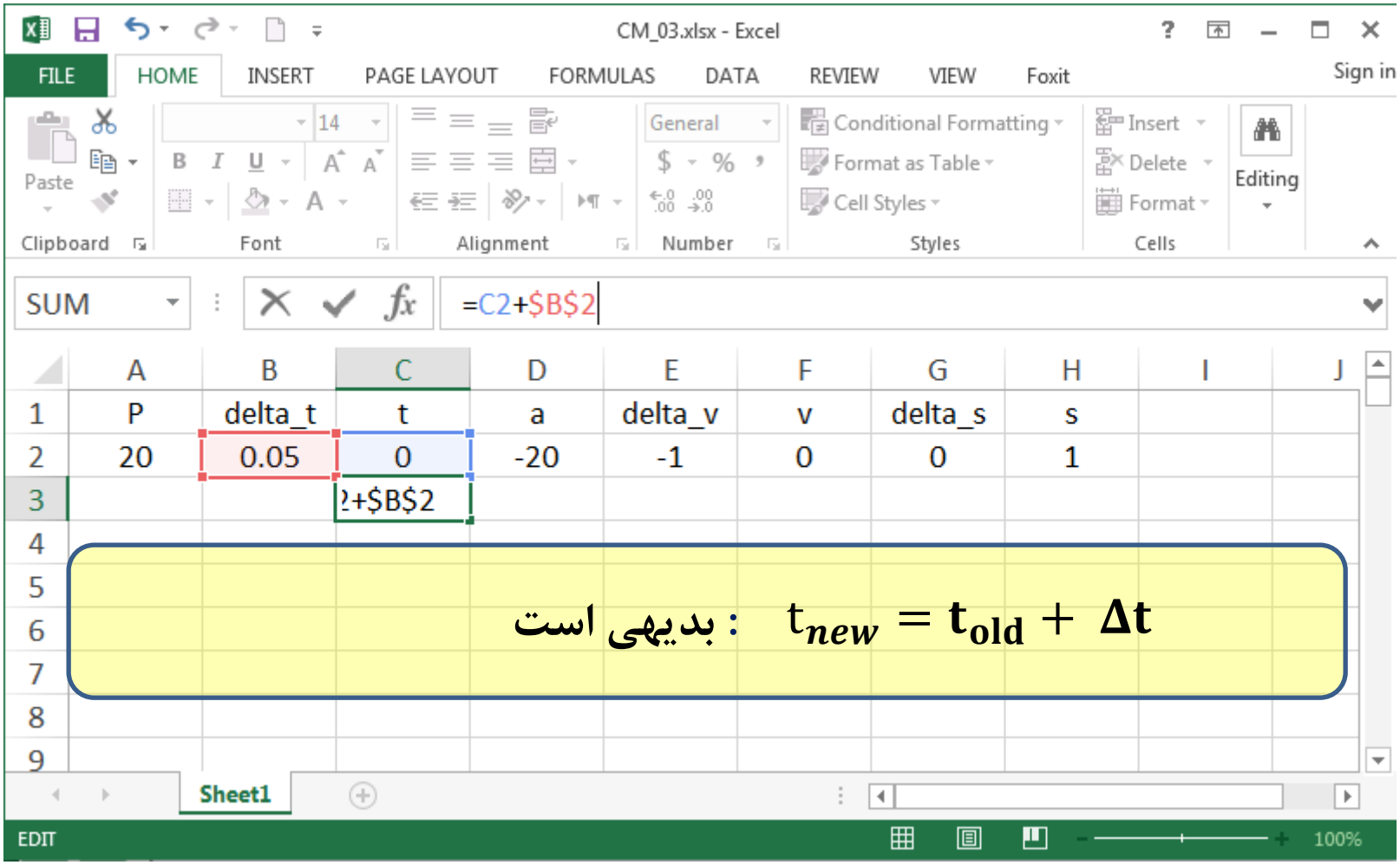
وارد کردن فرمول بروزرسانی تغییرات سرعت:



وارد کردن فرمول بروزرسانی تغییرات موقعیت:

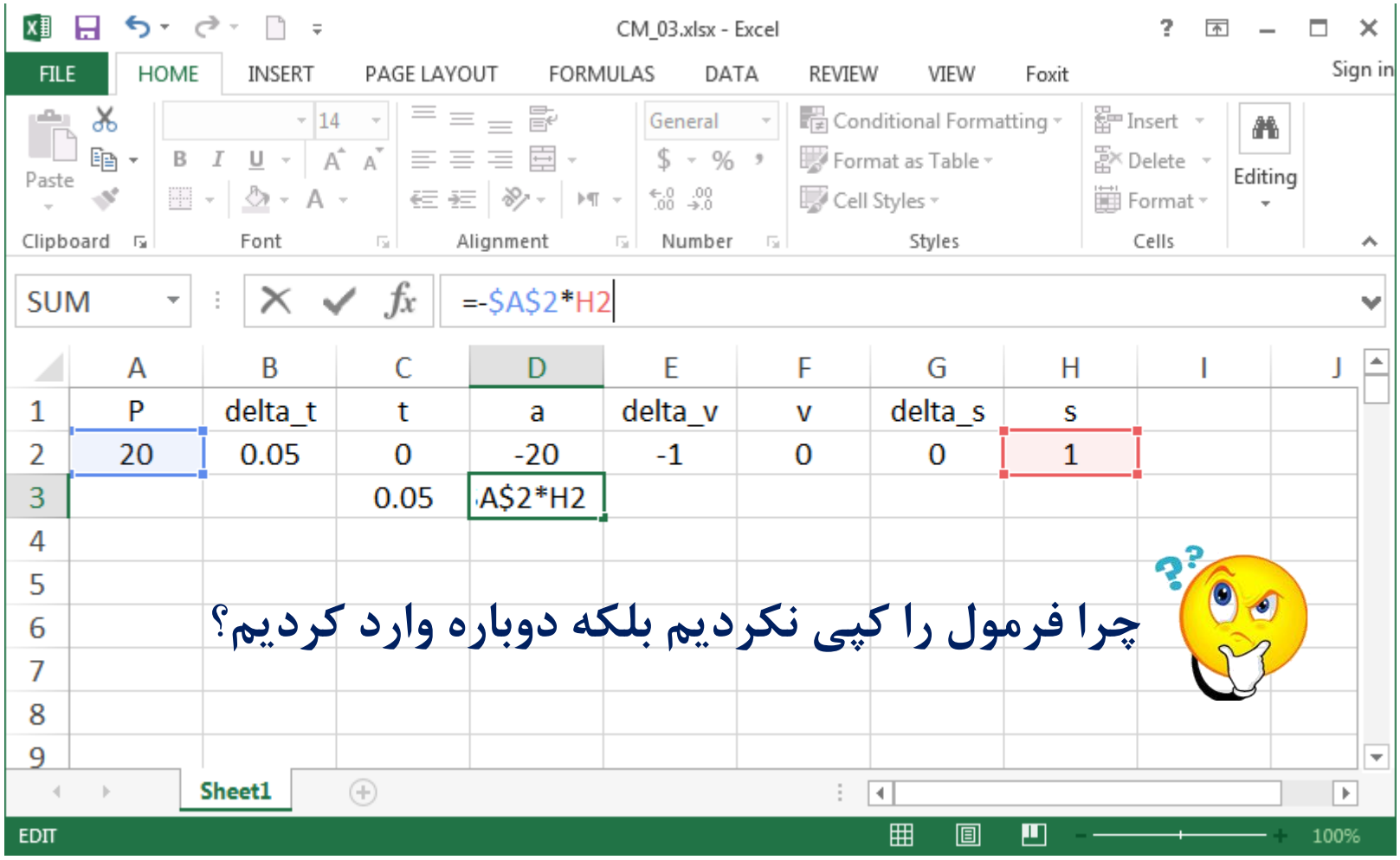


وارد کردن فرمول بروزرسانی زمان:



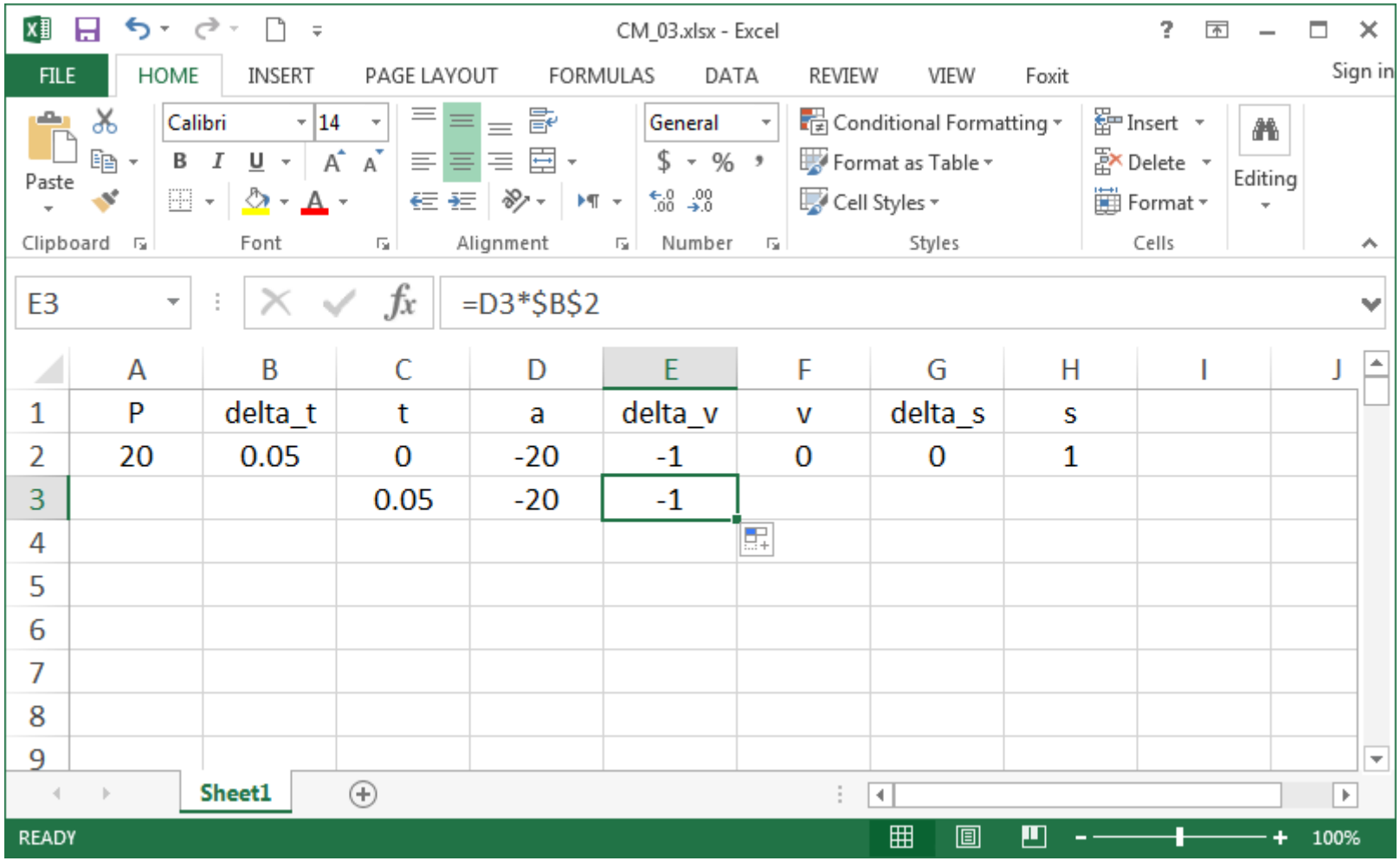
بدیهی است : $t_{new} = t_{old} + \Delta t$

وارد کردن فرمول بروزرسانی شتاب:



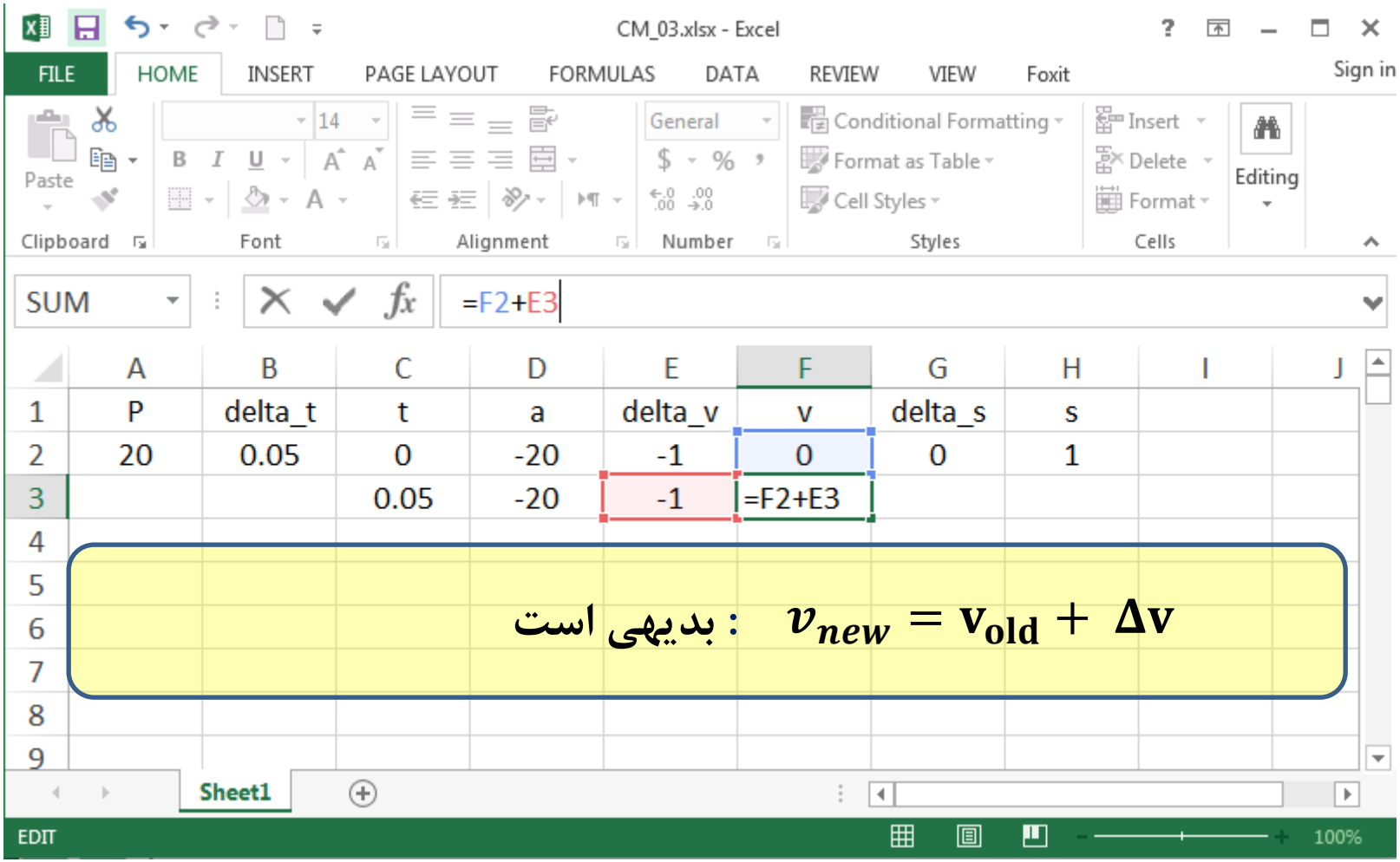
	A	B	C	D	E	F	G	H
1	P	delta_t	t	a	delta_v	v	delta_s	s
2	20	0.05	0	-20	-1	0	0	1
3			0.05	A$2*H2				
4								
5								
6								
7								
8								
9								

کپی کردن فرمول بروزرسانی تغییرات سرعت:

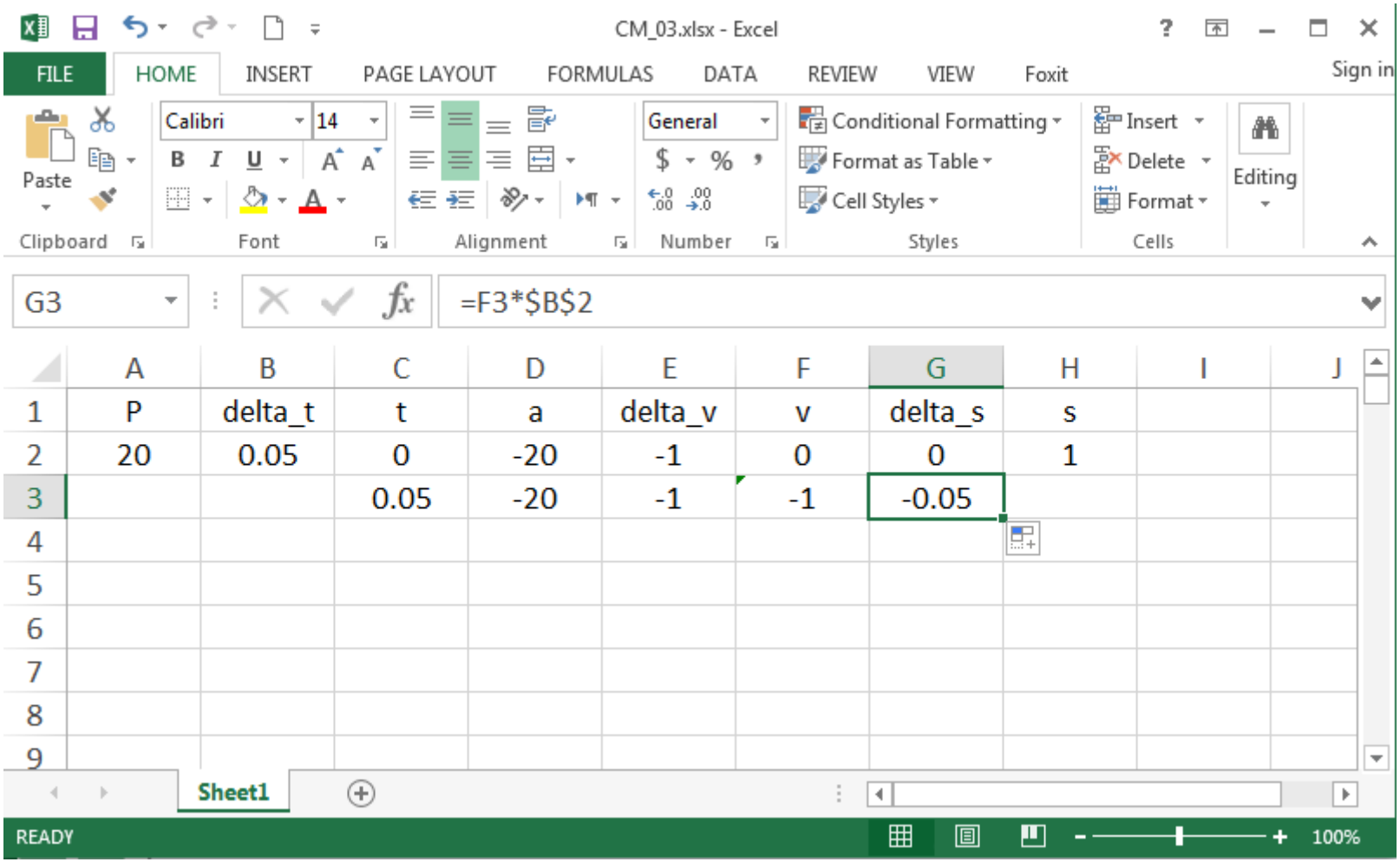


	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	P	delta_t	t	a	delta_v	v	delta_s	s		
2	20	0.05	0	-20	-1	0	0	1		
3			0.05	-20	-1					
4										
5										
6										
7										
8										
9										

وارد کردن فرمول بروزرسانی سرعت:

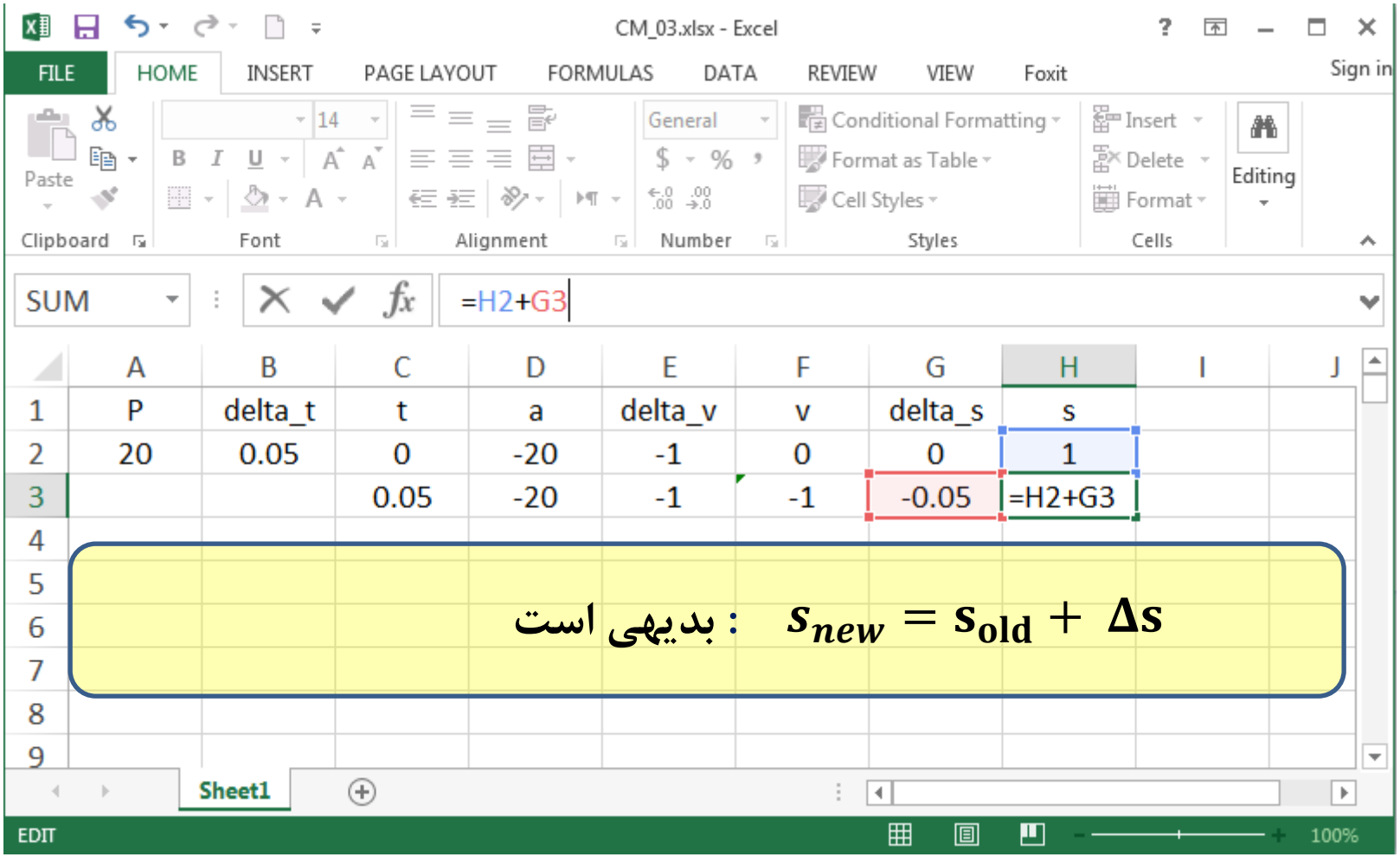


کپی کردن فرمول بروزرسانی تغییرات موقعیت:

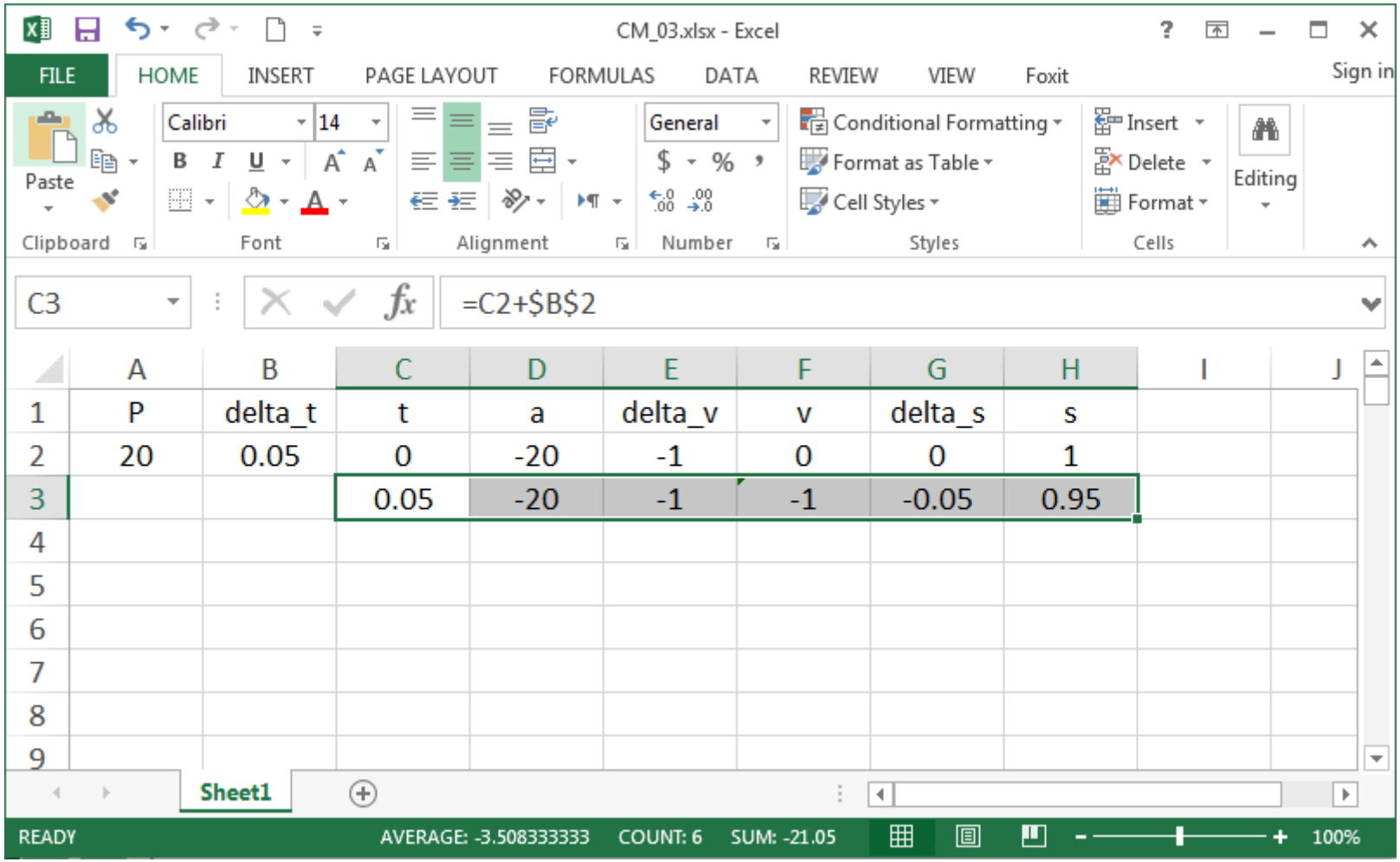


	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	P	delta_t	t	a	delta_v	v	delta_s	s		
2	20	0.05	0	-20	-1	0	0	1		
3			0.05	-20	-1	-1	-0.05			
4										
5										
6										
7										
8										
9										

وارد کردن فرمول بروزرسانی موقعیت:

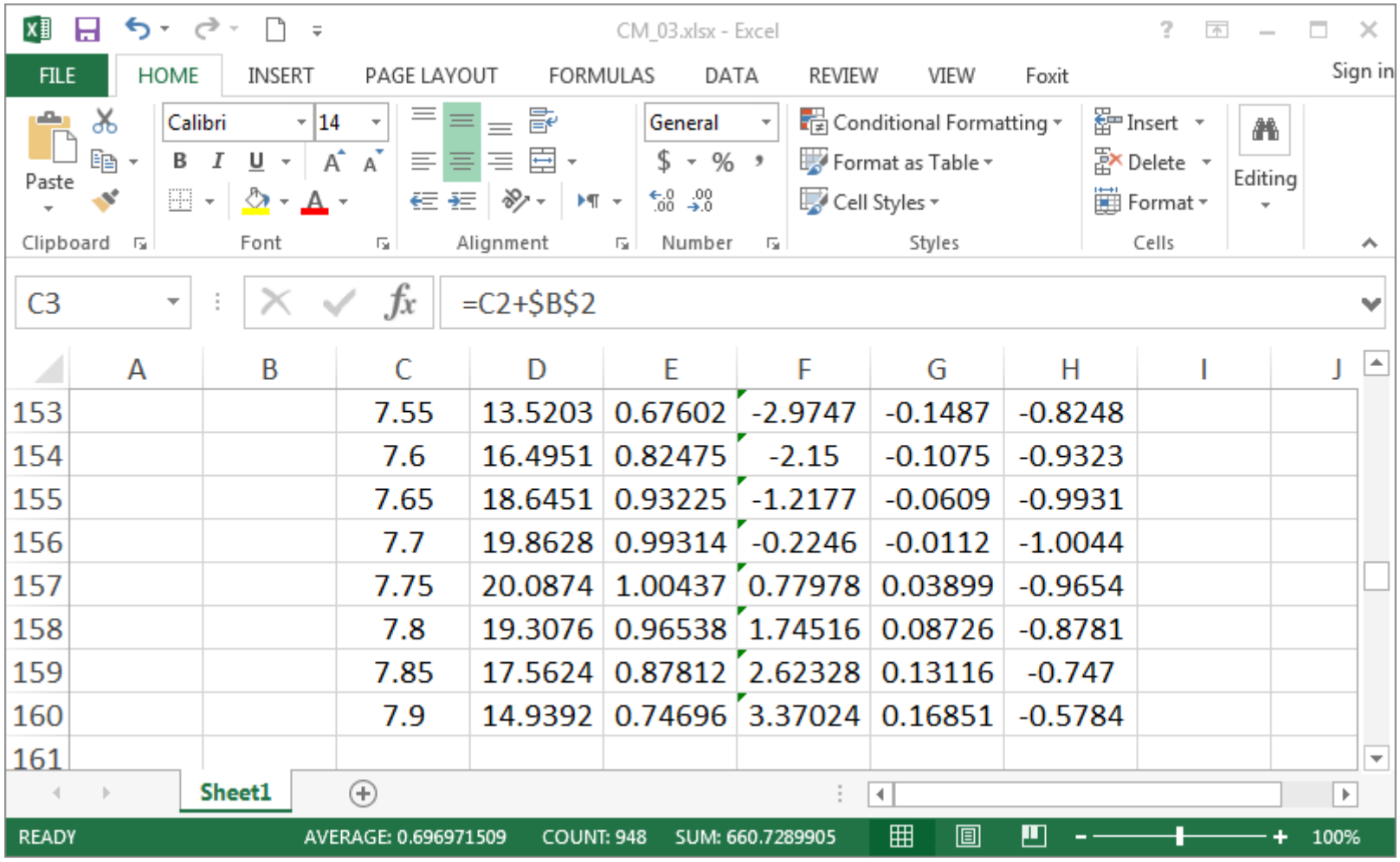


کپی کردن فرمول‌ها برای سطرهای جدید:



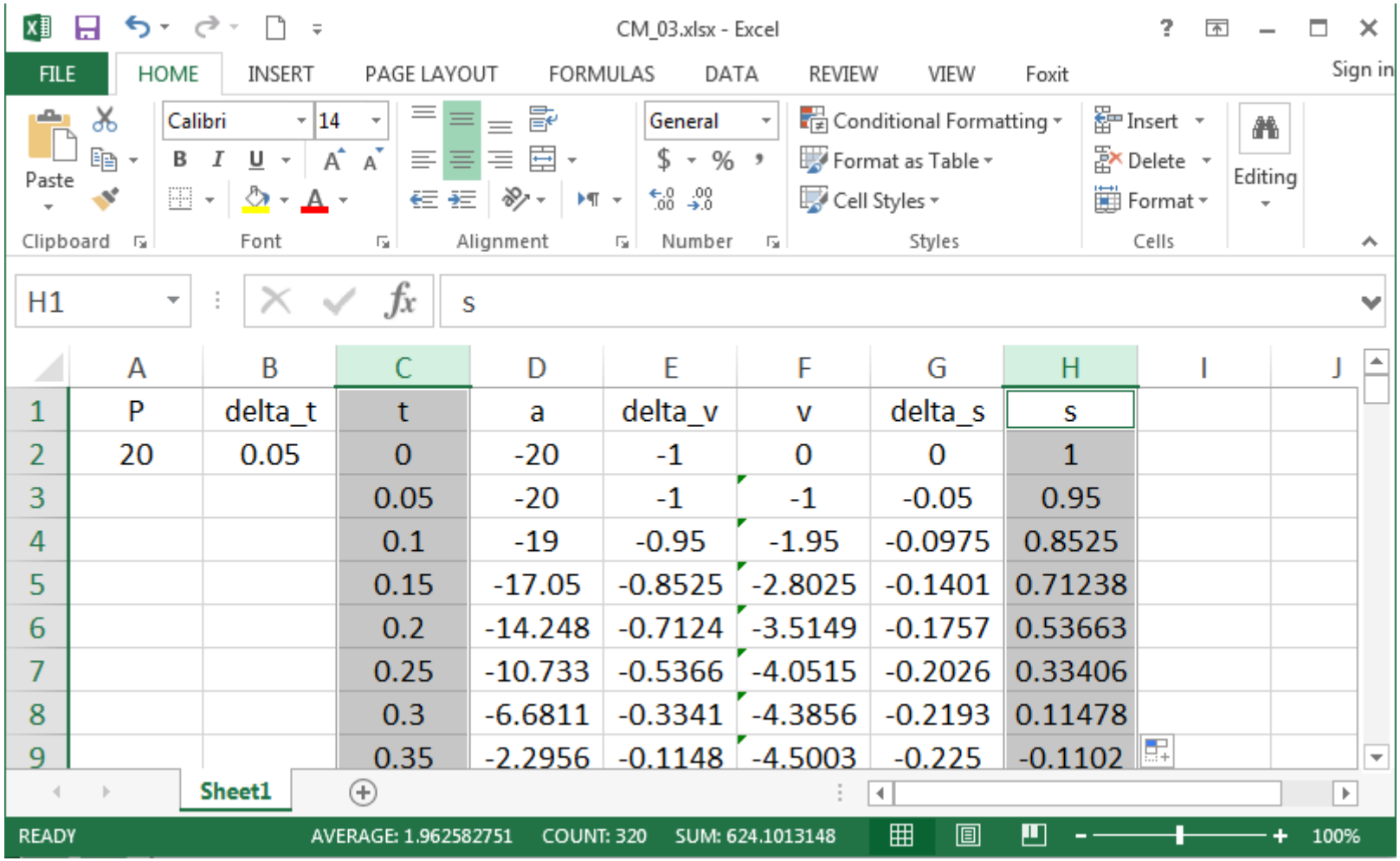
	A	B	C	D	E	F	G	H
1	P	delta_t	t	a	delta_v	v	delta_s	s
2	20	0.05	0	-20	-1	0	0	1
3			0.05	-20	-1	-1	-0.05	0.95
4								
5								
6								
7								
8								
9								

کپی کردن فرمول‌ها برای سطرهای جدید:



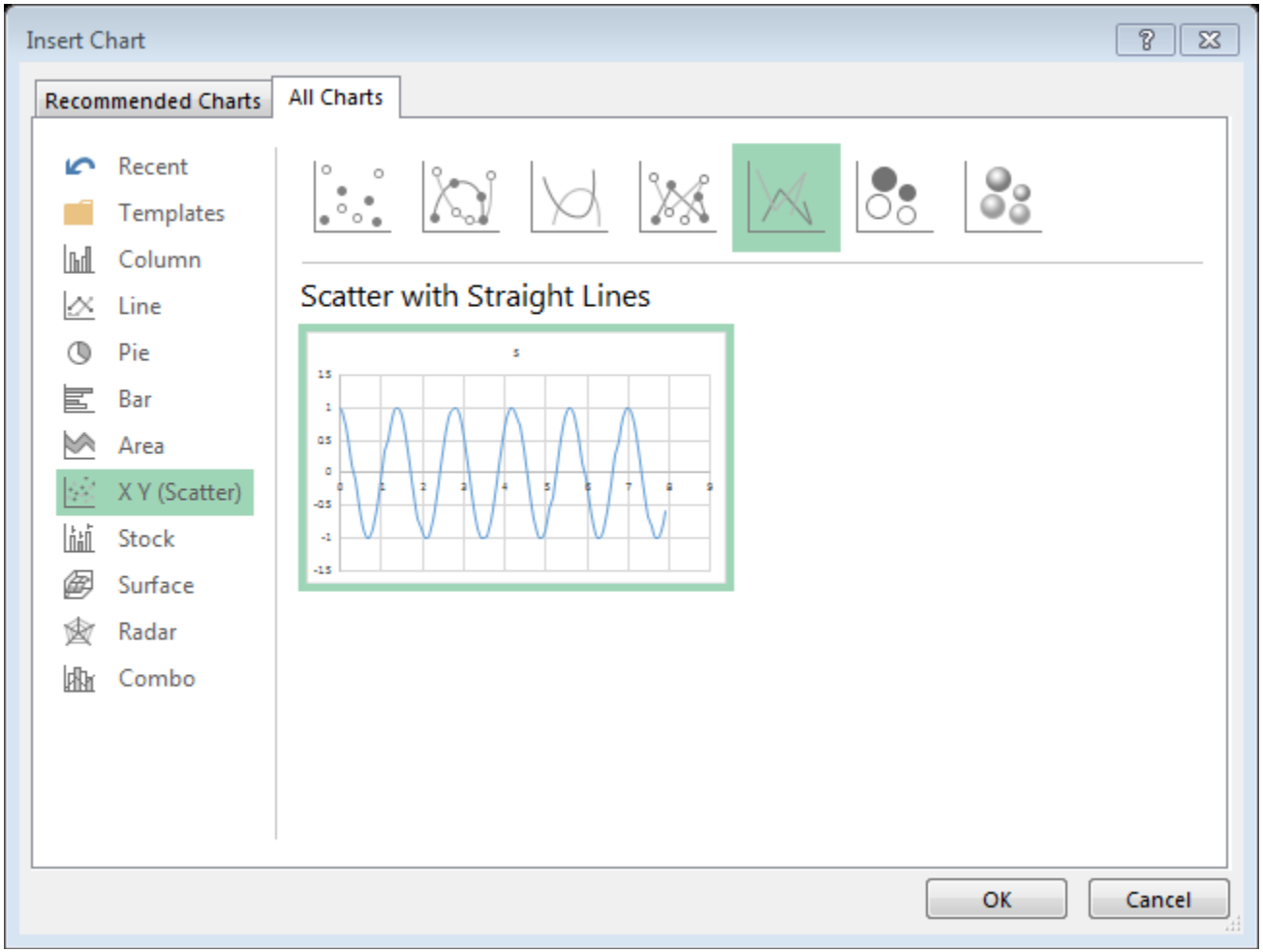
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
153			7.55	13.5203	0.67602	-2.9747	-0.1487	-0.8248		
154			7.6	16.4951	0.82475	-2.15	-0.1075	-0.9323		
155			7.65	18.6451	0.93225	-1.2177	-0.0609	-0.9931		
156			7.7	19.8628	0.99314	-0.2246	-0.0112	-1.0044		
157			7.75	20.0874	1.00437	0.77978	0.03899	-0.9654		
158			7.8	19.3076	0.96538	1.74516	0.08726	-0.8781		
159			7.85	17.5624	0.87812	2.62328	0.13116	-0.747		
160			7.9	14.9392	0.74696	3.37024	0.16851	-0.5784		
161										

انتخاب ستون‌های زمان و موقعیت برای رسم نمودار:

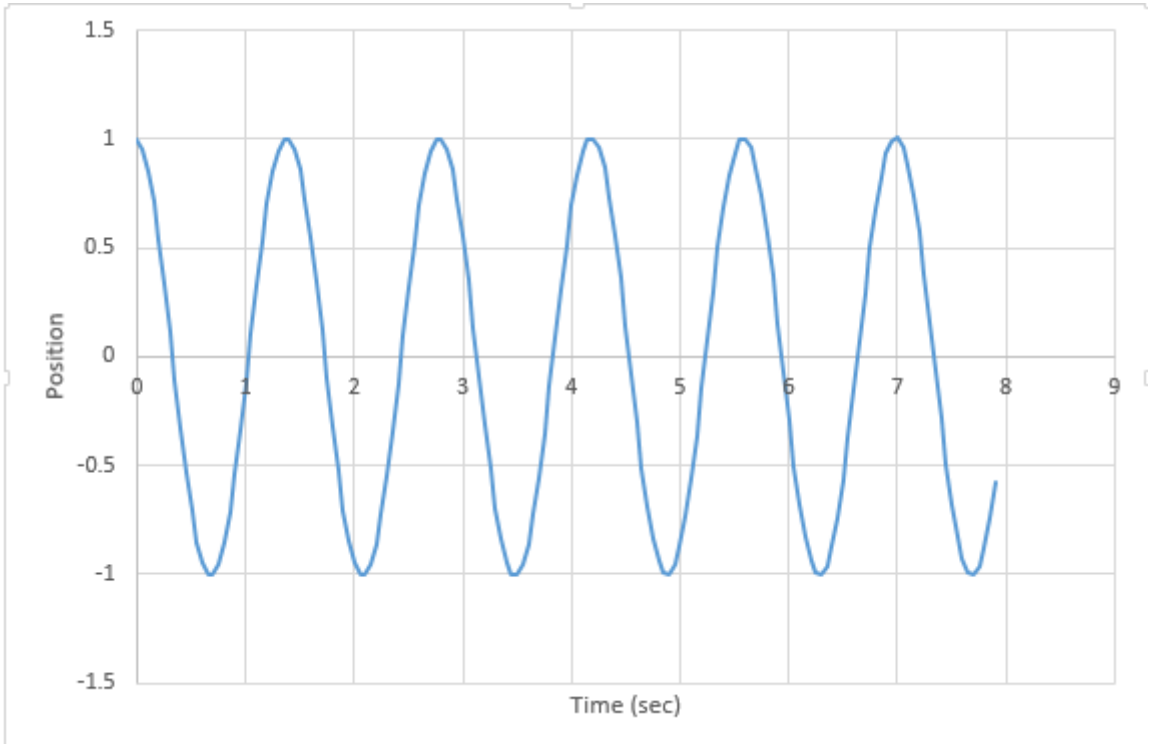


	A	B	C	D	E	F	G	H
1	P	delta_t	t	a	delta_v	v	delta_s	s
2	20	0.05	0	-20	-1	0	0	1
3			0.05	-20	-1	-1	-0.05	0.95
4			0.1	-19	-0.95	-1.95	-0.0975	0.8525
5			0.15	-17.05	-0.8525	-2.8025	-0.1401	0.71238
6			0.2	-14.248	-0.7124	-3.5149	-0.1757	0.53663
7			0.25	-10.733	-0.5366	-4.0515	-0.2026	0.33406
8			0.3	-6.6811	-0.3341	-4.3856	-0.2193	0.11478
9			0.35	-2.2956	-0.1148	-4.5003	-0.225	-0.1102

انتخاب نوع ترسیمه برای رسم نمودار:

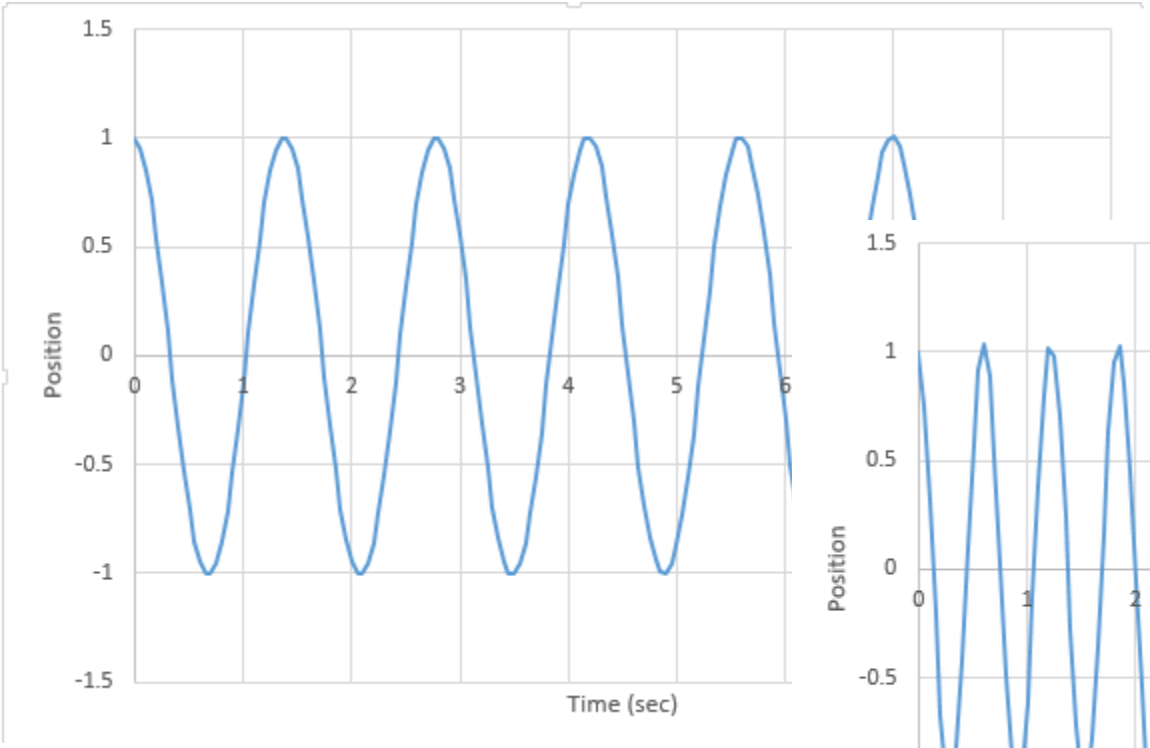


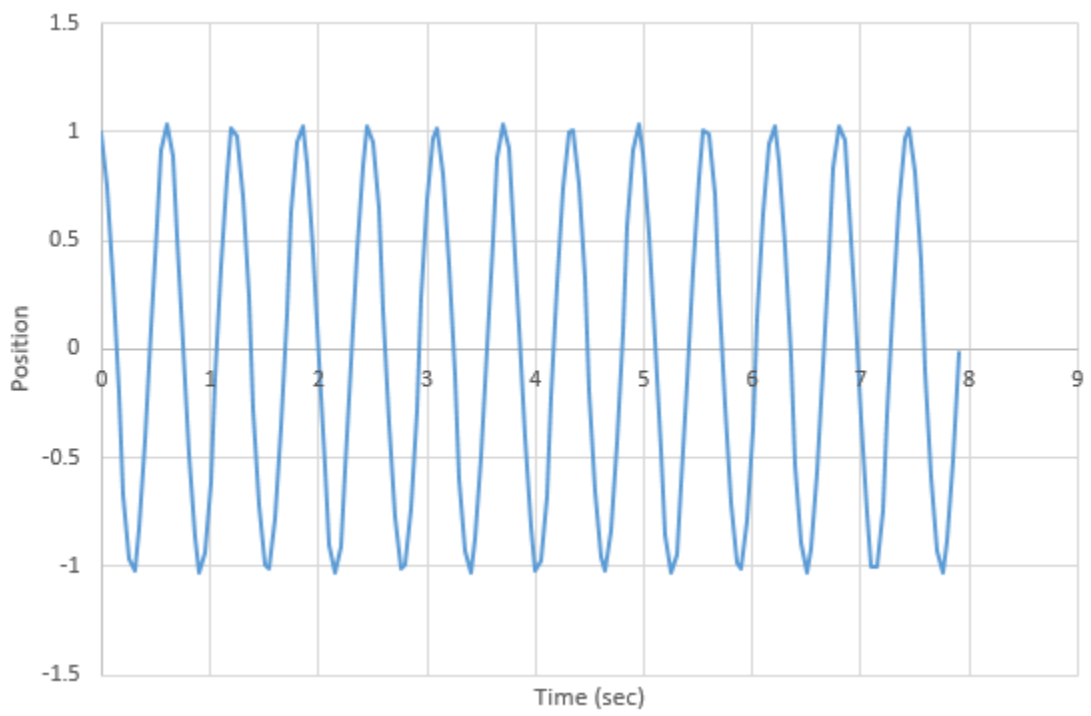
رسم نمودار موقعیت بر حسب زمان:



بررسی اثر تغییر P بر نمودار موقعیت بر حسب زمان:

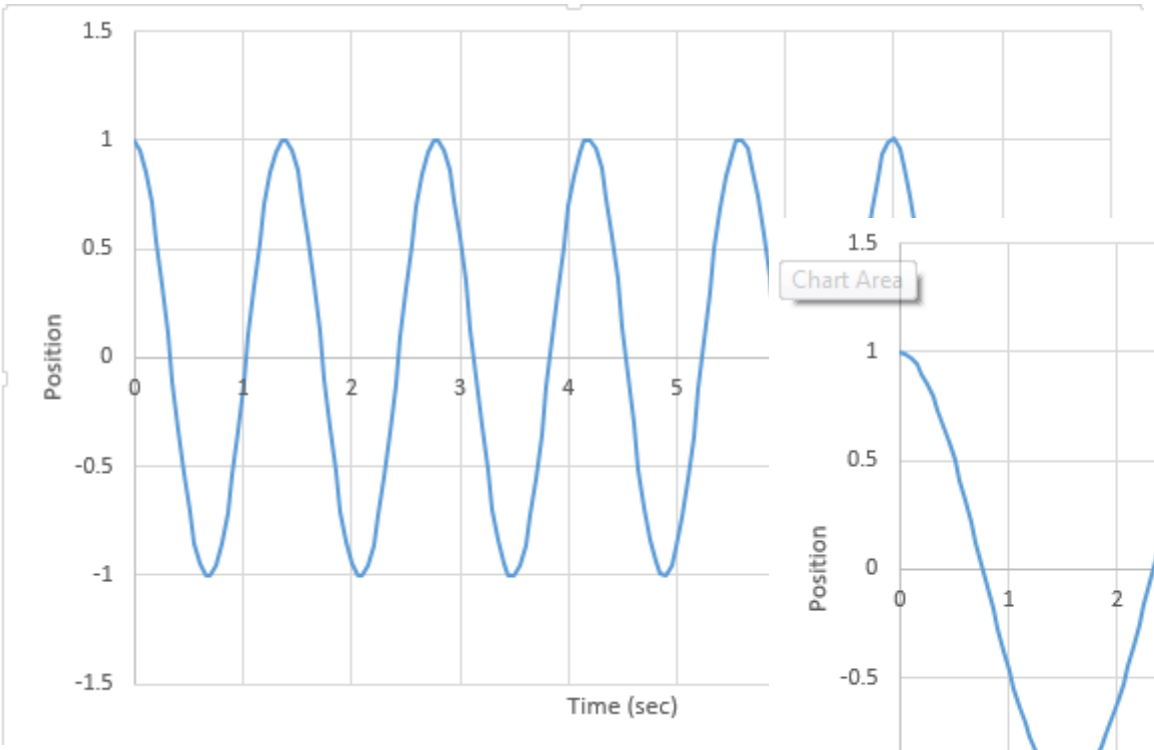
$$P = 20 \quad \Rightarrow \quad P = 100$$

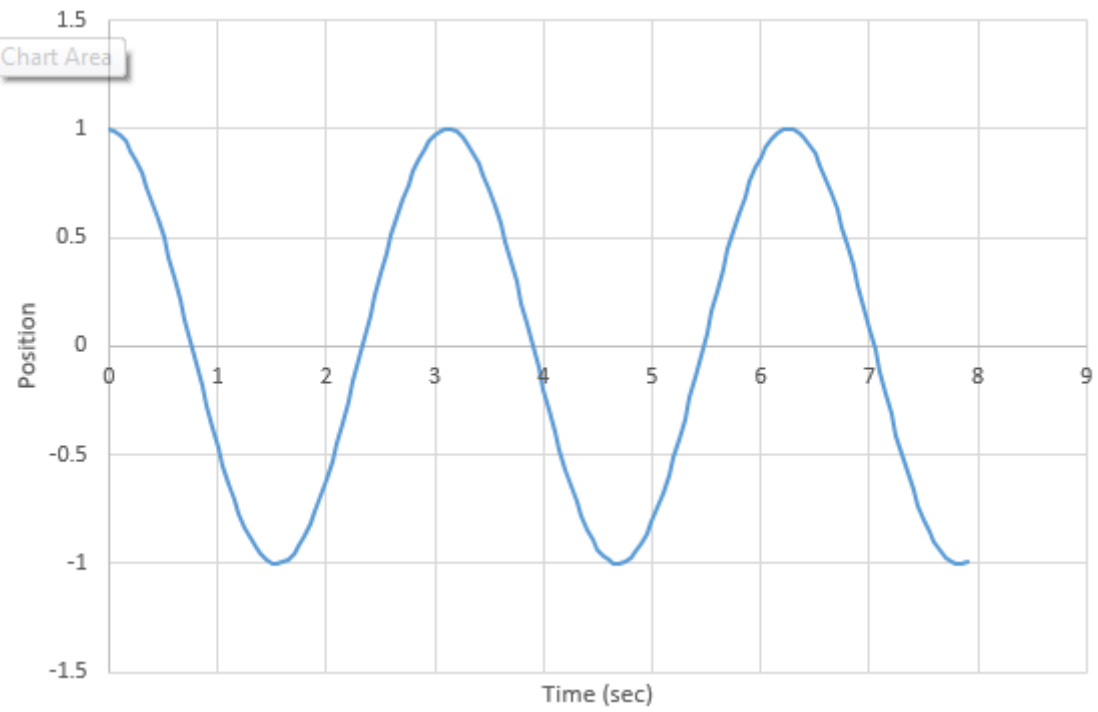




بررسی اثر تغییر P بر نمودار موقعیت بر حسب زمان:

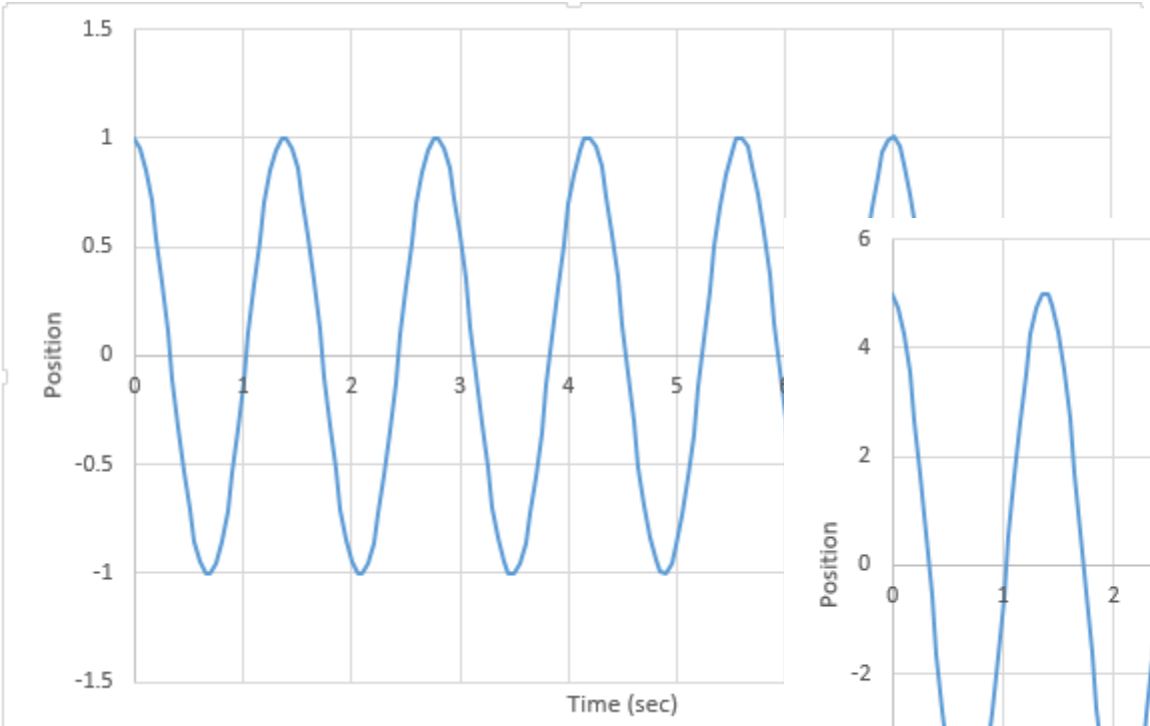
$$P = 20 \quad \Rightarrow \quad P = 4$$

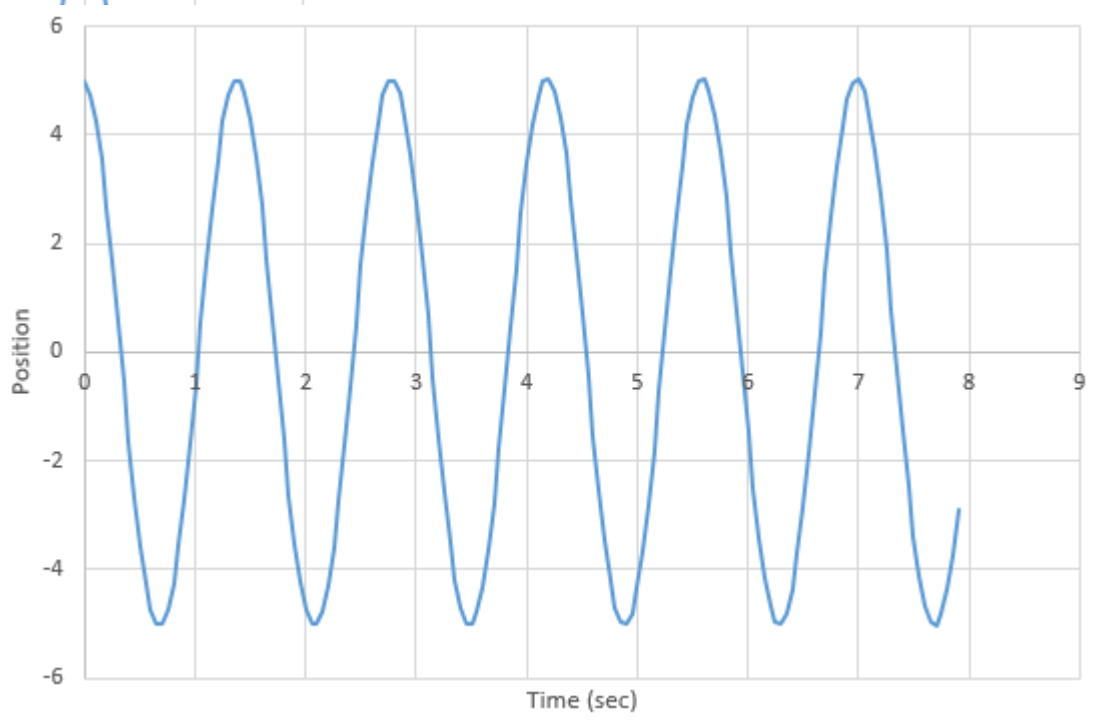




بررسی اثر تغییر موقعیت اولیه بر نمودار موقعیت بر حسب زمان:

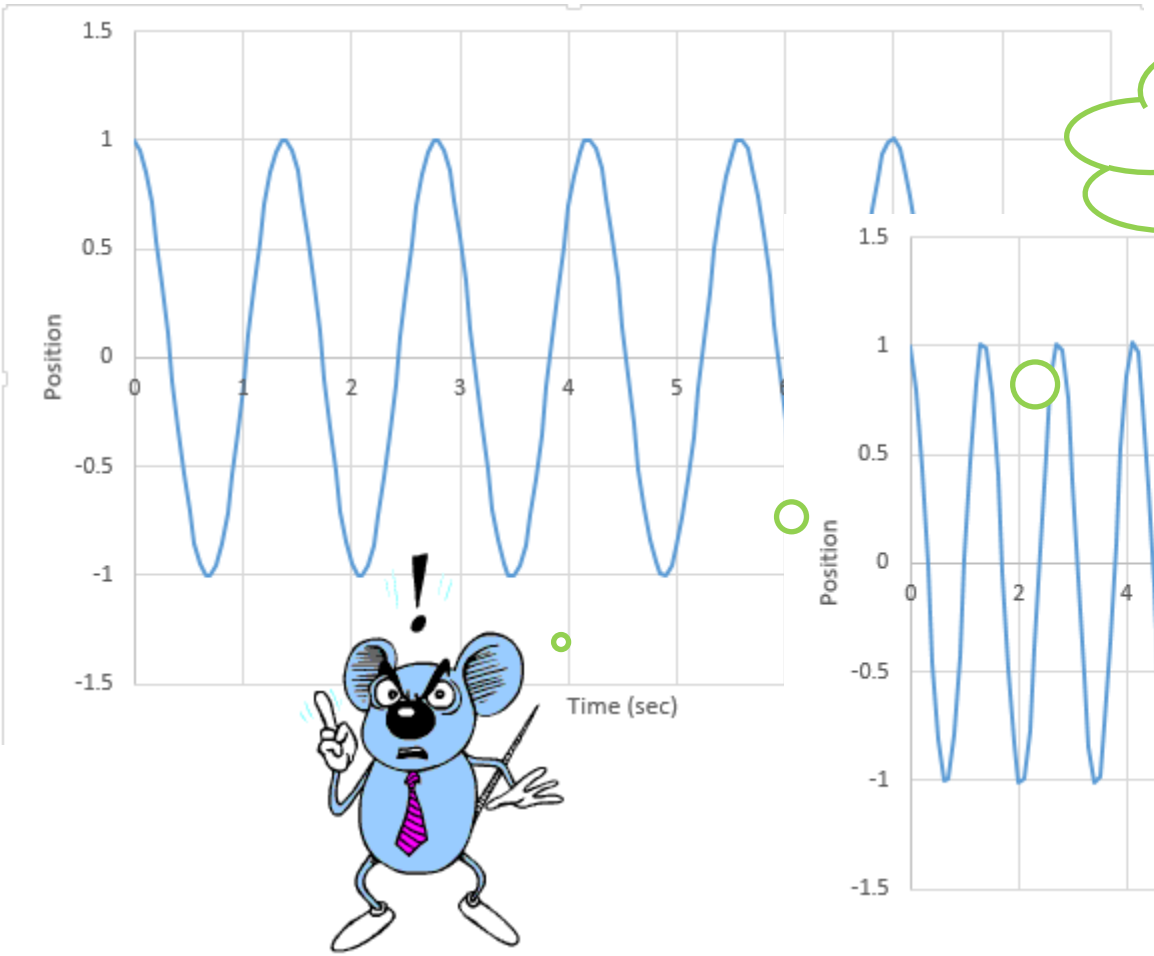
$$S = 1 \quad \Rightarrow \quad S = 5$$



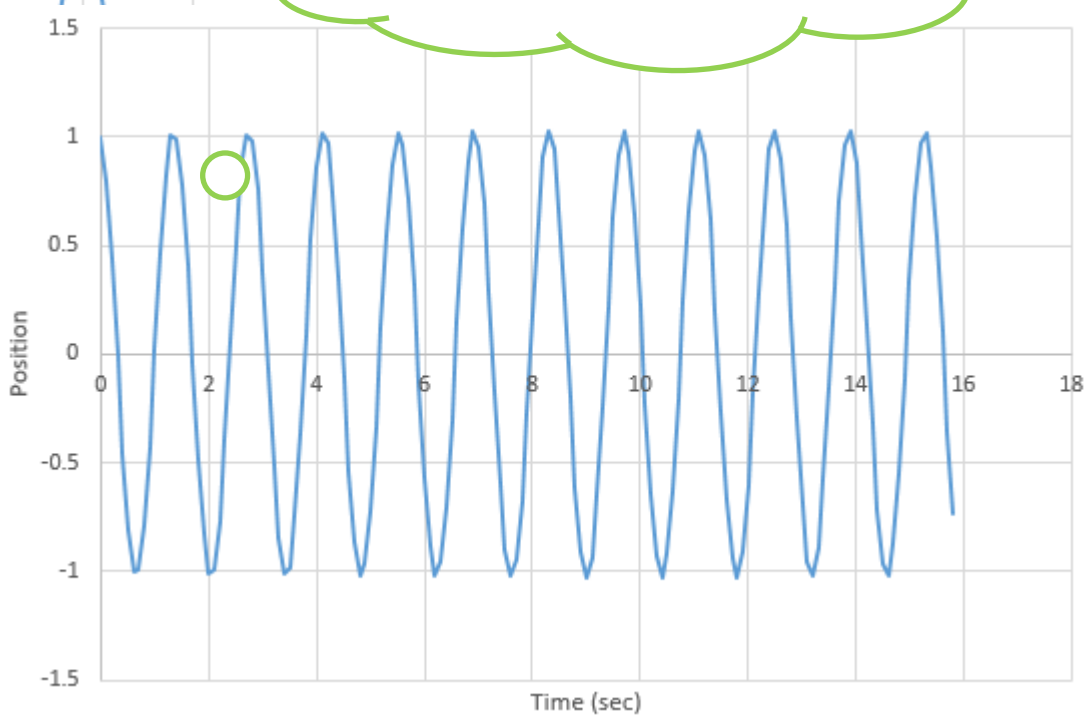


بررسی اثر تغییر گام زمانی بر نمودار موقعیت بر حسب زمان:

$$\Delta t = 0.05 \quad \Rightarrow \quad \Delta = 0.1$$

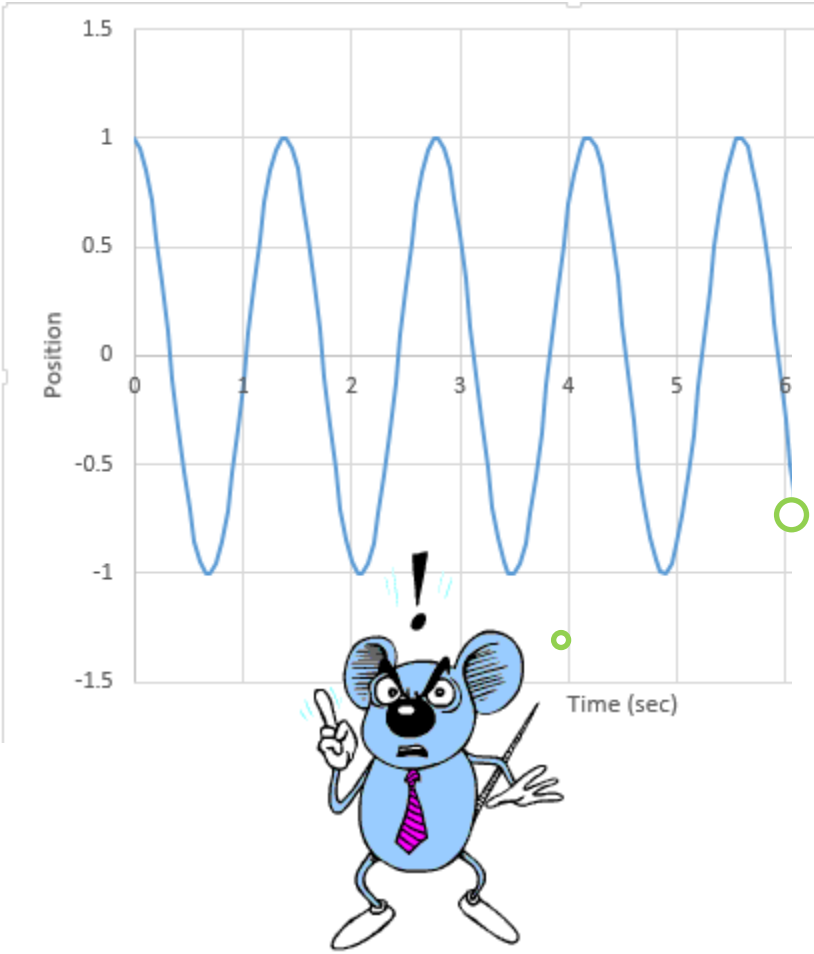


به شکستگی‌های ترسیمه
توجه داشته باشید!

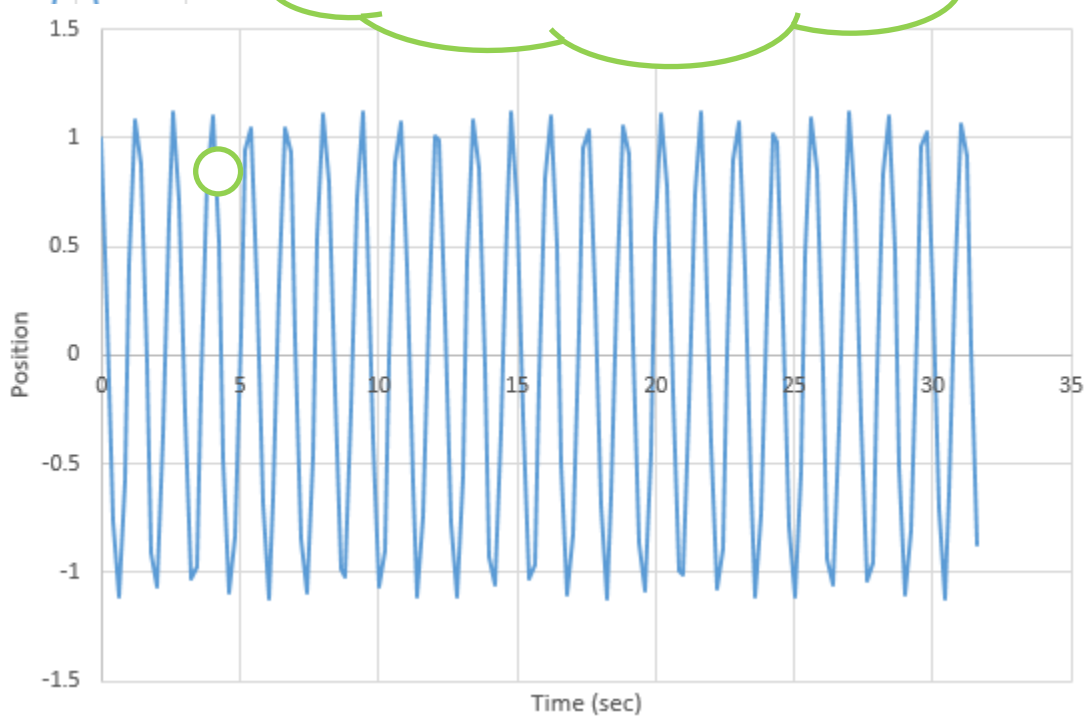


بررسی اثر تغییر گام زمانی بر نمودار موقعیت بر حسب زمان:

$$\Delta t = 0.05 \quad \Rightarrow \quad \Delta = 0.2$$

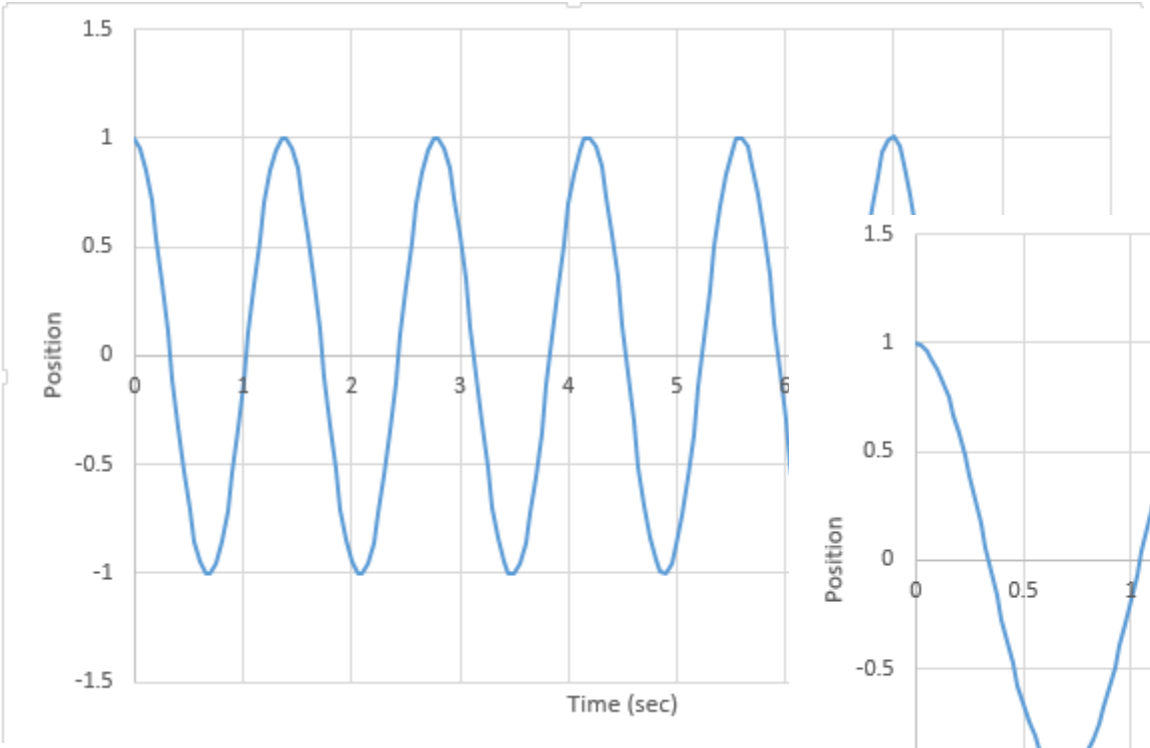


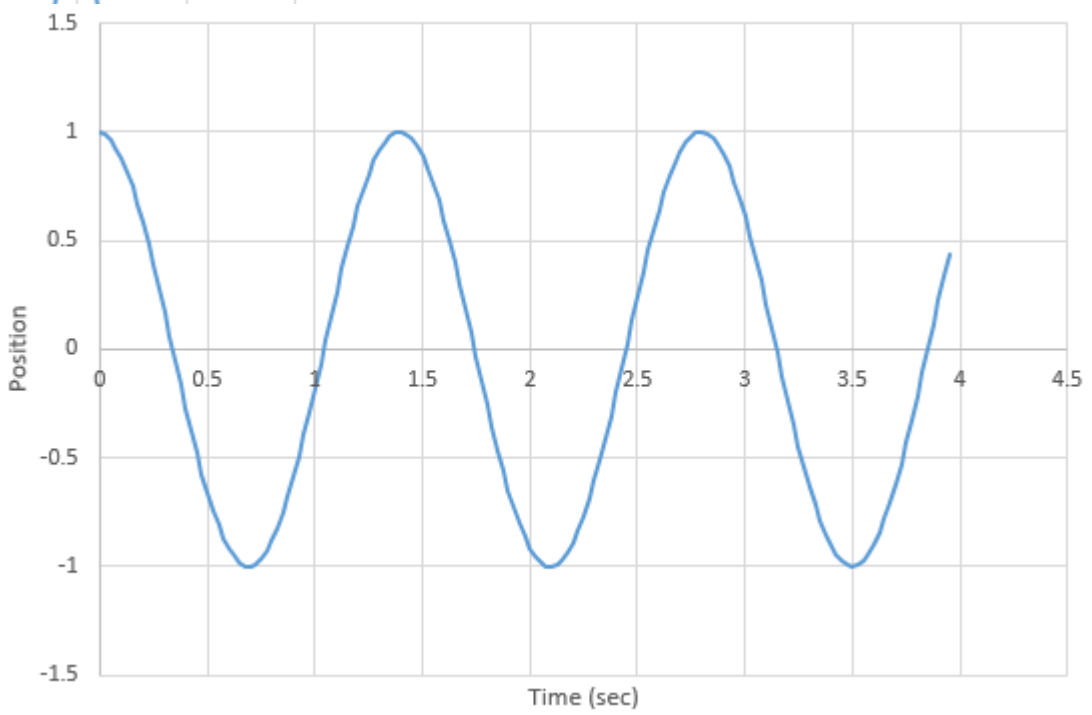
به شکستگی‌ها و نادقیقی
ترسیمه توجه داشته باشید!



بررسی اثر تغییر گام زمانی بر نمودار موقعیت بر حسب زمان:

$$\Delta t = 0.05 \quad \Rightarrow \quad \Delta = 0.025$$





سوالات چالشی

- اگر P منفی باشد چه اتفاقی می‌افتد؟ چرا چنین است؟ P به چه معنا است؟
- اگر اندازه‌ی متغیر گام زمانی را اصلاح کنید چه اتفاقی می‌افتد؟
- مدل را اصلاح کنید تا نشانگر نوسان‌گر میرا شود (جزئیات در یادداشت‌ها داده شده است).

فهرست مطالب

- ✓ دورنما
- ✓ ابتدا جوجه ای کروی فرض می کنیم (فرض ساده کننده)
- ✓ شبیه سازی های عددی
- ○ انتگرال گیری عددی و معادلات دیفرانسیل : روش اولر
- ○ حل معادله دیفرانسیل فنر
- ○ جمع بندی

روش عددی شبیه‌سازی فنر

حساب می‌کنیم نرخ تغییرات مقدار چقدر است و اندازه‌ی آن را در زمان سپری شده ضرب می‌کنیم. حاصل را با مقدار قبلی جمع می‌کنیم تا مقدار جدید به دست آید.

سپس مقدار جدید را به عنوان مقدار قبلی در نظر گرفته و روند را تکرار می‌کنیم. این ایده از تعریف مشتق گرفته شده است:

یادآوری تعریف مشتق : $\frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

$\Rightarrow \frac{df(x)}{dx} \approx \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ $\qquad \dot{f}(x) \approx \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

$\Rightarrow f'(x)\,\Delta x + f(x) \approx f(x+\Delta x)$

به نمادگذاری‌های متنوع مشتق دقت کنید.

روش رانگ-کوتا

این روش تخمین مقدار جدید از مقدار قبلی اگرچه ساده است ولی مستعد خطا است. برای توابعی که ما استفاده خواهیم کرد اگر اندازه‌ی گام کوچکی انتخاب کنیم تقریبا همواره به اندازه‌ی کافی خوب خواهد بود. برایمان به اندازه‌ی کافی خوب است زیرا توابعی که مدل خواهیم کرد دارای تغییرات به نسبت ملایمی هستند. در حالت کلی، برای محاسبات دقیق‌تر یا وقتی این رهیافت به توابعی پیچیده و با تغییرات سریع اعمال می‌شوند ممکن است بخواهیم از روش بروزرسانی دقیق‌تری استفاده کنیم. یک روش استاندارد، روش رانگ-کوتا (Runge-Kutta method) است.

فهرست مطالب

- دورنما
- ابتدا جوجه ای کروی فرض می کنیم (فرض ساده کننده)
- شبیه سازی های عددی
- انتگرال گیری عددی و معادلات دیفرانسیل : روش اولر
- حل معادله دیفرانسیل فنر
- جمع بندی

حل تحلیلی معادله دیفرانسیل فنر

در مبحث دوم آموختیم برای معادلاتی که در آنها متغیر وابسته در مشتق و در عبارت سمت راست ظاهر می‌گردد معمولا شامل عبارتی نمایی است.

حدس اولیه : $s = e^{rt}$ (برای مقداری از r)

$$\Rightarrow \frac{ds}{dt} = re^{rt} \Rightarrow \frac{d^2s}{dt^2} = r^2e^{rt}$$

معادله‌ی حاکم : $\frac{d^2s}{dt^2} = -Ps$

$$\Rightarrow r^2e^{rt} = -Pe^{rt}$$

چه مقداری از r یا t می‌تواند نمایی را صفر کند؟

$$\Rightarrow (r^2 + P)e^{rt} = 0$$

$$\Rightarrow r^2 + P = 0$$

$$\Rightarrow r^2 = -P \Rightarrow r = \pm i\sqrt{P}$$

$$\Rightarrow s = e^{i\sqrt{P}t} + e^{-i\sqrt{P}t} = 2cos(\sqrt{P}t)$$

فهرست مطالب

- دورنما
- ابتدا جوجه ای کروی فرض می کنیم (فرض ساده کننده)
- شبیه سازی های عددی
- انتگرال گیری عددی و معادلات دیفرانسیل : روش اولر
- حل معادله دیفرانسیل فنر
- جمع بندی

جمع‌بندی

- مفاهیم شبیه‌سازی را معرفی کردیم.
- اصطلاحات نشانه‌گذاری‌های معادله دیفرانسیل را معرفی کردیم.
- برای شبیه‌سازی روی مثالی کلاسیک تمرکز کردیم تا به ریاضیات بپردازیم.
- در آینده به کمک این اطلاعات به شبیه‌سازی نورون اسپایکی خواهیم پرداخت.
- آموختیم وقتی می‌خواهیم معادله دیفرانسیل را حل تحلیلی کنیم حدس بزنیم.
- آموختیم برای کاربردهای ما، تابع نمایی حدس بزنیم.
- ضرورتی به حل تحلیلی نیست ولی انجام آن کمک‌کننده است.

فهرست مطالب

- دورنما
- ابتدا جوجه ای کروی فرض می کنیم (فرض ساده کننده)
- شبیه سازی های عددی
- انتگرال گیری عددی و معادلات دیفرانسیل : روش اولر
- حل معادله دیفرانسیل فنر
- جمع بندی

استاد تغییر باشیم
نه قربانی تقدیر....
آموزش سخنرانی و فن بیان www.Bahrampoor.com