



مدل سازی شناختی

Cognitive Modeling

Presented by: Dr. Maleki,

Semnan University,

Spring 2024,

<http://maleki.semnan.ac.ir>

اهداف

پس از آموختن این مبحث باید بتوانید:

- ❖ مدل صفحه گسترده‌ای از نوسان گر بدون اصطکاک را پیاده‌سازی کنید؛
- ❖ از روش اولر برای انتگرال‌گیری عددی برای شبیه‌سازی استفاده کنید؛ و
- ❖ به طور غیررسمی درک کنید که تابع چیست.

فهرست مطالب

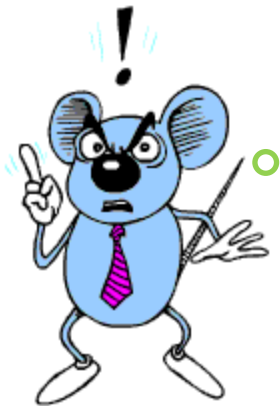
- دورنا
- ابتدا بوجه ای گروهی فرض می کنیم (فرض ساده کننده)
- شبیه سازی های عددی
- استخراج گیری عددی و معادلات دیفرانسیل: روش اولر
- حل معادله دیفرانسیل فر
- جمع بندی

چالش‌های پیش‌رو برای شبیه‌سازی نورون

برای شبیه‌سازی نورون با دو چالش روبرو هستیم:

- ❖ نحوه‌ی کاربرد معادلات دیفرانسیل در شبیه‌سازی،
- ❖ پیچیدگی‌های خاص نورون‌ها و مدل‌های شناختی.

به جای مواجهه‌ی همزمان با پیچیدگی‌های این مدل‌ها و مسائل حل معادله دیفرانسیل، ترجیح دادیم تمرکز این مبحث روی مثال ملموس‌تری یعنی فنرها باشد.



معادله دیفرانسیل

معادلات دیفرانسیل برای بیان ارتباط بین متغیرها استفاده خواهد شد تا امکان استفاده از کامپیوتر را برای شبیه‌سازی تغییرات تدریجی سیستم در طول زمان را برایمان فراهم نماید.

فهرست مطالب

- دورنا
- ابتدا بوجه ای گروهی فرض می کنیم (فرض ساده کننده) ←
- شبیه سازی های عددی
- استخراج گیری عددی و معادلات دیفرانسیل : روش اولر
- حل معادله دیفرانسیل فر
- جمع بندی

مدل

مدل‌ها توصیف ساده‌شده‌ای از یک سیستم یا یک پدیده است که رفتار آن را از دیدگاهی خاص با دقت مطلوب بازنمایی می‌کند.

به بیان ساده‌تر، مدل‌ها نمونه‌های بسیار ساده شده‌ای از پدیده‌ی هدف می‌باشند.

ولی «بسیار ساده» نشانگر چه میزان ساده‌سازی است؟



تنها پس از پیاده‌سازی قادر خواهیم بود به این سوال پاسخ دهیم. اگر نتوانیم به رفتاری مطابق مشاهدات تجربی دست یابیم باید پیچیدگی مدل را افزایش دهیم ولی تا آن موقع، بی‌امان مدل را ساده خواهیم کرد.

مدل فنر

برای معرفی ملموس تر شبیه سازی عددی، از مثال فنری که به جلو و عقب می لغزد استفاده خواهیم کرد. فنرهای واقعی به واسطه ی اصطکاک سطحی و مقاومت هوا، پردردسر هستند. پرداختن به این متغیرها پیچیدگی های غیر ضروری ای را در پی دارد. از این رو ما یک نمونه انتزاعی از فنر را در نظر می گیریم و آن را به عنوان یک سیستم هارمونیک ایده آل و ساده شده مدل می کنیم.

گام نخست مدل سازی: تشریح و توصیف مسئله



یک نکته‌ی تجربی بسیار مهم:

شتاب وزنه پس از رها شدن برابر حاصلضرب مقدار ثابت P و موقعیت فعلی آن است.

$$! \quad a(t) = -P s(t)$$



وزنه‌ای به وزن W
موقعیت وزنه (یا طول فنر) s
سطح بدون اصطکاک

هدف: $s(t) = ?$

سوال: توصیف آنچه داریم مدل می‌کنیم.

- تعریفی کلامی برای سرعت بر حسب مکان (فاصله) و زمان ارائه نمایید.
- تعریفی کلامی برای شتاب بر حسب سرعت و زمان ارائه نمایید.
- تعریفی کلامی برای شتاب با استفاده از دو پاسخ پیشین خود ارائه نمایید که رابطه شتاب را با مکان و زمان نشان دهد.

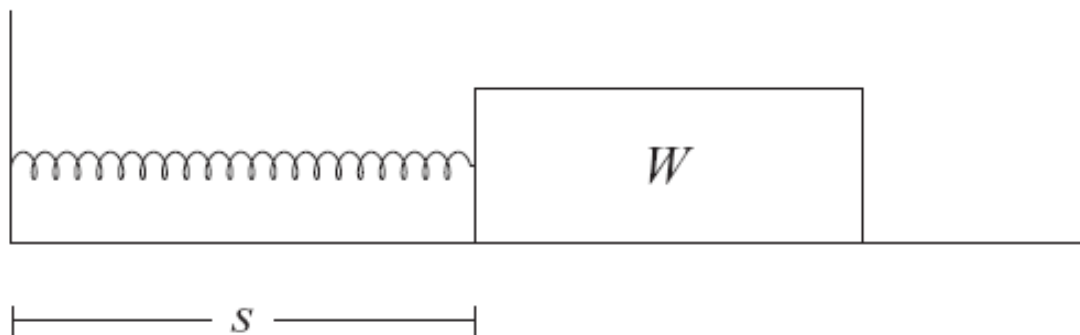
بازنمایی پاسخ‌ها با استفاده از نمادها:

$$\text{Acceleration} \approx \frac{V(t_1) - V(t_0)}{t_1 - t_0} \Rightarrow \text{Acceleration} = \frac{dV}{dt}$$

$$\text{Velocity} \approx \frac{s(t_1) - s(t_0)}{t_1 - t_0} \Rightarrow \text{Velocity} = \frac{ds}{dt}$$

$$\Rightarrow \text{Acceleration} = \frac{d^2s}{dt^2}$$

معادله‌ی حاکم بر سیستم



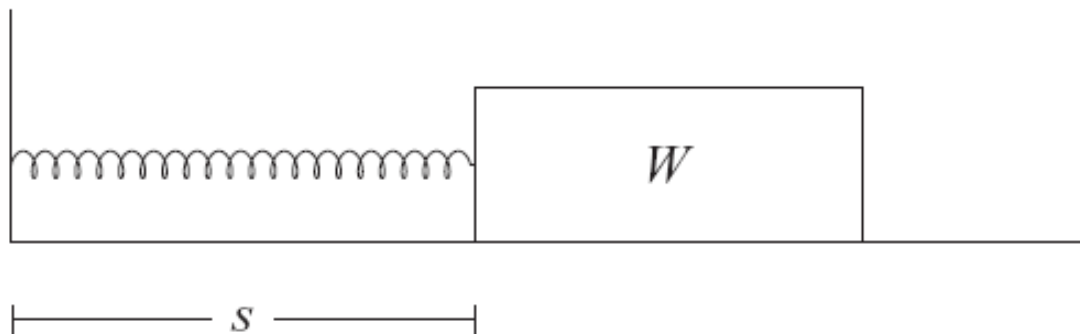
نکته‌ی تجربی : $a(t) = -P s(t)$

مفهوم شتاب : $a(t) = \frac{d^2 s(t)}{dt^2}$

$$\Rightarrow \frac{d^2 s(t)}{dt^2} = -P s(t)$$

حل کردن این معادله دیفرانسیل به معنای یافتن معادله‌ی دیگری برای $s(t)$ است به نحوی که اگر دو بار از آن مشتق بگیریم دقیقاً به همان معادله‌ای که از آن شروع کردیم برسیم (با لحاظ کردن ضریب ثابت $-P$).

معادله‌ی حاکم بر سیستم



$$\frac{d^2 s(t)}{dt^2} = -P s(t)$$

اگر با دقت این معادله را ببینید و آموخته‌های پیشین خود را به خاطر آورید باید بتوانید **فرم پاسخ** را حدس بزنید.
به یاد آورید که معادلات دیفرانسیل اغلب با یک **حدس آموخته** حل می‌گردند.

فهرست مطالب

- دورنا
- ابتدا بوجه ای گروهی فرض می کنیم (فرض ساده کننده)
- شبیه سازی های عددی ←
- استخراج گیری عددی و معادلات دیفرانسیل : روش اولر
- حل معادله دیفرانسیل فر
- جمع بندی

شبه‌سازی عددی

تصور کنید دارید با سرعت ۵۰ کیلومتر بر ساعت رانندگی می‌کنید.
اگر از شما پرسیم پنج دقیقه‌ی دیگر به کجا خواهید رسید می‌توانید آن را با دانستن محل فعلی و سرعت خود تعیین کنید.

«سرعت، چگونگی تغییر مکان نسبت به زمان را بیان می‌کند.»

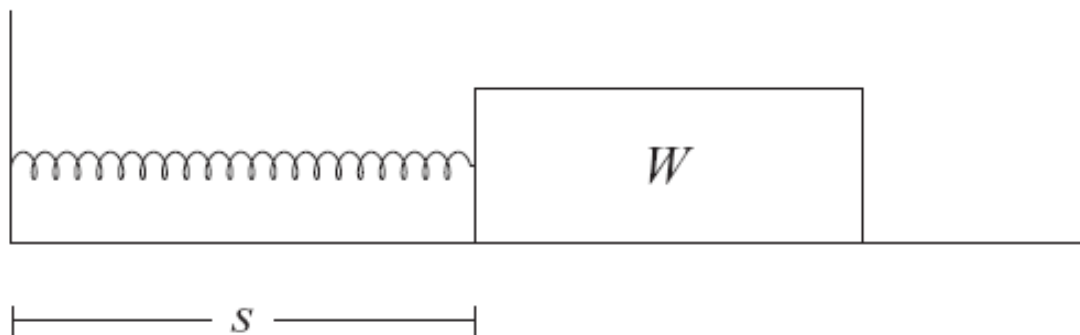
یادآوری تعریف مشتق : $\frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

با تقریب : $\frac{df(x)}{dx} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

⇒ $f(x + \Delta x) = f(x) + \frac{df(x)}{dx} \Delta x$

⇒ $s(t + \Delta t) = s(t) + \frac{ds(t)}{dt} \Delta t = s(t) + v(t) \Delta t$

شیه سازی عددی مثال حرکت فنر

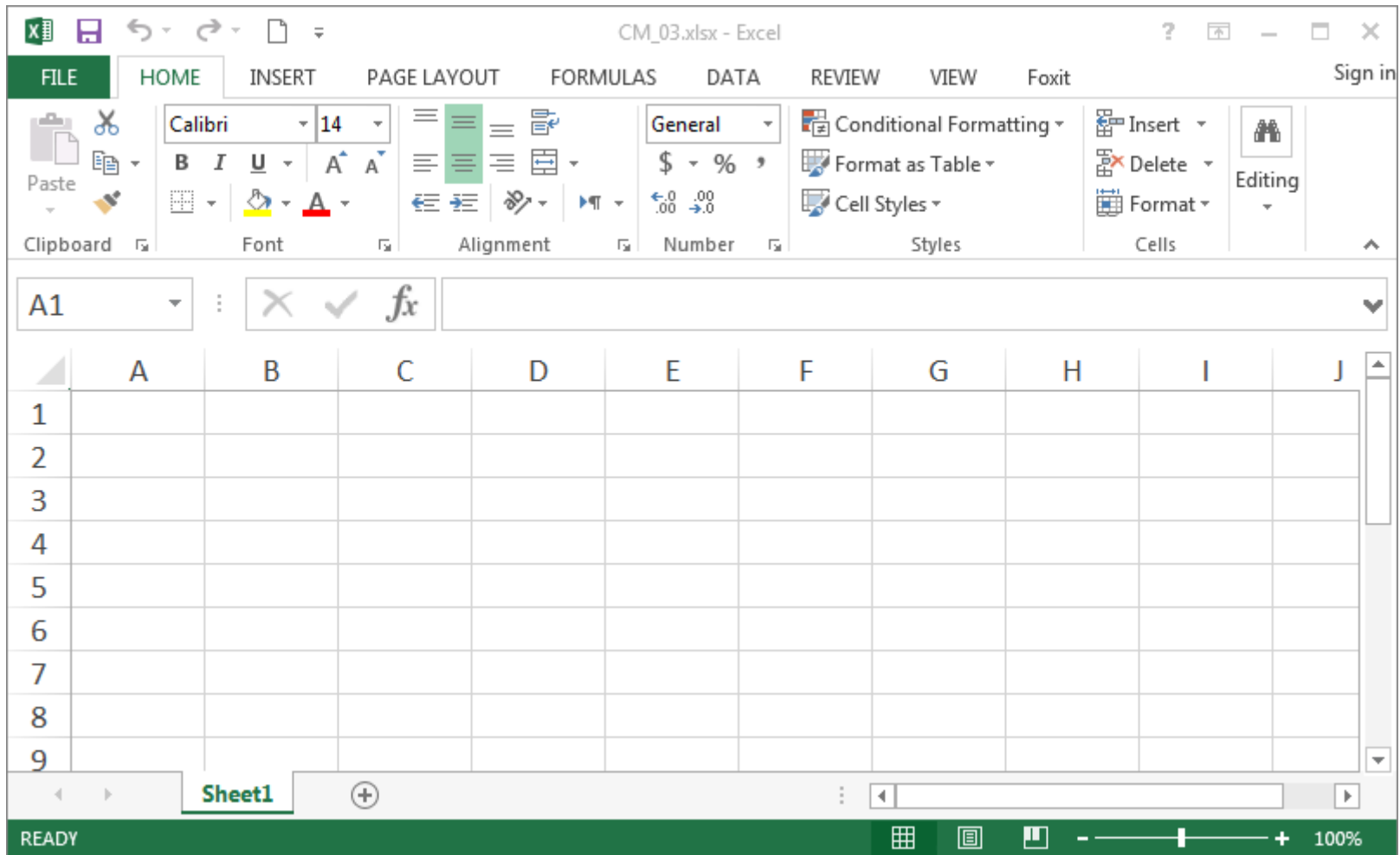


$$\frac{d^2 s(t)}{dt^2} = -P s(t)$$

مقدار جدید = مقدار قبلی + نرخ تغییرات مقدار × گام زمانی

توسعه‌یابی عددی در صفحه گسترده

باز کردن صفحه گسترده در نرم‌افزار اکسل:



وارد کردن برچسب ستون‌ها:

The screenshot shows an Excel spreadsheet with the following data in row 1:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	P	delta_t	t	a	delta_v	v	delta_s	s		
2										
3										
4										
5										
6										
7										
8										
9										

A yellow callout box contains the text: **به ترتیب وارد کردن عنوان ستون‌ها توجه کنید! چرا با این ترتیب؟**

وارد کردن فرض‌ها و مقادیر اولیه:

The screenshot shows the Microsoft Excel interface with the following data table:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	P	delta_t	t	a	delta_v	v	delta_s	s		
2	20	0.05	0			0		1		
3										
4										
5										
6										
7										
8										
9										

A yellow text box is overlaid on the spreadsheet with the following Persian text:

برای P و Δt مقادیر دلخواهی انتخاب کرده‌ایم. بعداً به بررسی اثر تغییر این مقادیر خواهیم پرداخت.
موقعیت اولیه را ۱ انتخاب می‌کنیم و سرعت باید صفر باشد. چرا؟

وارد کردن فرمول محاسبه شتاب:

The screenshot shows an Excel spreadsheet with the following data:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	P	delta_t	t	a	delta_v	v	delta_s	s		
2	20	0.05	0	=A\$2*H2		0		1		
3										
4										
5										
6										
7										
8										
9										

The formula bar shows: $= -\$A\$2 * H2$

A yellow box highlights the equation: $a(t) = -P s(t)$ with the Persian text: یادآوری نکته‌ی تجربی

وارد کردن فرمول بروزرسانی تغییرات سرعت:

The screenshot shows an Excel spreadsheet with the following data:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	P	delta_t	t	a	delta_v	v	delta_s	s		
2	20	0.05	0	-20	=D2*\$B\$2	0		1		
3										
4										
5										
6										
7										
8										
9										

The formula bar shows: $=D2*\$B\2

A yellow box highlights the text: یادآوری مفهوم شتاب : $\Delta v(t) = a(t) \Delta t$

وارد کردن فرمول بروزرسانی تغییرات موقعیت:

The screenshot shows the Microsoft Excel interface with the following data in the spreadsheet:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	P	delta_t	t	a	delta_v	v	delta_s	s		
2	20	0.05	0	-20	-1	0	=F2*\$B\$2	1		
3										
4										
5										
6										
7										
8										
9										

The formula bar shows the formula $=F2*\$B\2 being entered into cell G2. A yellow box highlights the formula $\Delta s(t) = v(t) \Delta t$ with the text "یادآوری مفهوم شتاب" (Reminder of acceleration concept).

وارد کردن فرمول بروزرسانی زمان:

The screenshot shows the Microsoft Excel interface with the following data in the spreadsheet:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	P	delta_t	t	a	delta_v	v	delta_s	s		
2	20	0.05	0	-20	-1	0	0	1		
3			=C2+\$B\$2							

The formula bar shows the active formula: $=C2+\$B\2 .

A yellow box highlights the equation: $t_{new} = t_{old} + \Delta t$ بدیهی است

وارد کردن فرمول بروزرسانی شتاب:


The screenshot shows an Excel spreadsheet with the following data:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	P	delta_t	t	a	delta_v	v	delta_s	s		
2	20	0.05	0	-20	-1	0	0	1		
3			0.05	.A\$2*H2						
4										
5										
6										
7										
8										
9										

The formula bar shows: `= -A2*H2`

The cell D3 contains: `.A$2*H2`

چرا فرمول را کپی نکردیم بلکه دوباره وارد کردیم؟



کپی کردن فرمول بروزرسانی تغییرات سرعت:

The screenshot shows the Microsoft Excel interface with the following data in the spreadsheet:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	P	delta_t	t	a	delta_v	v	delta_s	s		
2	20	0.05	0	-20	-1	0	0	1		
3			0.05	-20	-1					
4										
5										
6										
7										
8										
9										

The formula bar shows the formula for cell E3: $=D3*\$B\2 .

وارد کردن فرمول بروزرسانی سرعت:

The screenshot shows the Microsoft Excel interface with the following data in the spreadsheet:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	P	delta_t	t	a	delta_v	v	delta_s	s		
2	20	0.05	0	-20	-1	0	0	1		
3			0.05	-20	-1	=F2+E3				

The formula bar shows the active formula: `=F2+E3`.

A yellow callout box contains the equation: $v_{new} = v_{old} + \Delta v$ بدیهی است

کپی کردن فرمول بروزرسانی تغییرات موقعیت:

The screenshot shows the Microsoft Excel interface with the following data in the spreadsheet:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	P	delta_t	t	a	delta_v	v	delta_s	s		
2	20	0.05	0	-20	-1	0	0	1		
3			0.05	-20	-1	-1	-0.05			
4										
5										
6										
7										
8										
9										

The formula bar for cell G3 shows the formula: $=F3 * \$B\2 .

وارد کردن فرمول بروزرسانی موقعیت:

The screenshot shows the Microsoft Excel interface with the following data in the spreadsheet:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	P	delta_t	t	a	delta_v	v	delta_s	s		
2	20	0.05	0	-20	-1	0	0	1		
3			0.05	-20	-1	-1	-0.05	=H2+G3		

The formula bar shows: $=H2+G3$

A yellow box highlights the formula in the spreadsheet and its text representation: $s_{new} = s_{old} + \Delta s$

کپی کردن فرمول‌ها برای سطرهای جدید:

The screenshot shows the Microsoft Excel interface with the following data in the spreadsheet:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	P	delta_t	t	a	delta_v	v	delta_s	s		
2	20	0.05	0	-20	-1	0	0	1		
3			0.05	-20	-1	-1	-0.05	0.95		
4										
5										
6										
7										
8										
9										

The formula bar for cell C3 shows: $=C2+\$B\2

Status bar: READY AVERAGE: -3.508333333 COUNT: 6 SUM: -21.05 100%

کپی کردن فرمول‌ها برای سطرهای جدید:

The screenshot shows the Microsoft Excel interface with the following details:

- Title Bar:** CM_03.xlsx - Excel
- Menu Bar:** FILE, HOME, INSERT, PAGE LAYOUT, FORMULAS, DATA, REVIEW, VIEW, Foxit, Sign in
- Home Tab Ribbon:**
 - Clipboard:** Paste
 - Font:** Calibri, 14, Bold (B), Italic (I), Underline (U), Increase Font Size (A+), Decrease Font Size (A-), Font Color (A), Background Color (fill icon)
 - Alignment:** Center, Left, Right, Justify, Merge & Center, Wrap Text, Text to Columns, Text to Rows
 - Number:** General, Currency (\$), Percentage (%), Decimals (0.00), Increase Decimal, Decrease Decimal
 - Styles:** Conditional Formatting, Format as Table, Cell Styles
 - Cells:** Insert, Delete, Format
 - Editing:** Undo, Redo, Find & Select
- Formula Bar:** C3 : \times \checkmark fx =C2+\$B\$2
- Worksheet Grid:**

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
153			7.55	13.5203	0.67602	-2.9747	-0.1487	-0.8248		
154			7.6	16.4951	0.82475	-2.15	-0.1075	-0.9323		
155			7.65	18.6451	0.93225	-1.2177	-0.0609	-0.9931		
156			7.7	19.8628	0.99314	-0.2246	-0.0112	-1.0044		
157			7.75	20.0874	1.00437	0.77978	0.03899	-0.9654		
158			7.8	19.3076	0.96538	1.74516	0.08726	-0.8781		
159			7.85	17.5624	0.87812	2.62328	0.13116	-0.747		
160			7.9	14.9392	0.74696	3.37024	0.16851	-0.5784		
161										
- Sheet Tab:** Sheet1
- Status Bar:** READY, AVERAGE: 0.696971509, COUNT: 948, SUM: 660.7289905, 100%

انتخاب ستون‌های زمان و موقعیت برای رسم نمودار:

CM_03.xlsx - Excel

FILE HOME INSERT PAGE LAYOUT FORMULAS DATA REVIEW VIEW Foxit Sign in

Clipboard Font Alignment Number Styles Cells

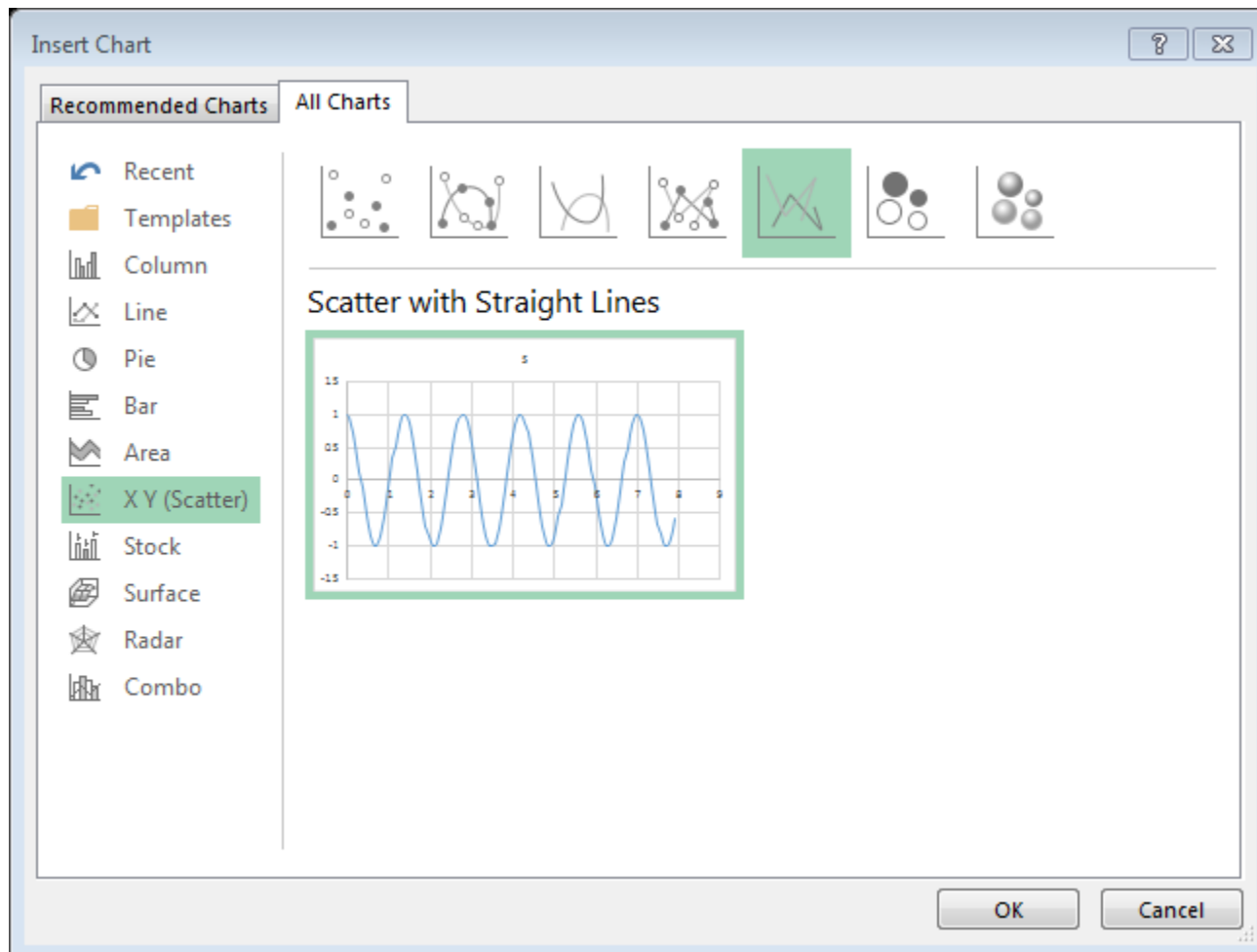
H1 : \times \checkmark fx s

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	P	delta_t	t	a	delta_v	v	delta_s	s		
2	20	0.05	0	-20	-1	0	0	1		
3			0.05	-20	-1	-1	-0.05	0.95		
4			0.1	-19	-0.95	-1.95	-0.0975	0.8525		
5			0.15	-17.05	-0.8525	-2.8025	-0.1401	0.71238		
6			0.2	-14.248	-0.7124	-3.5149	-0.1757	0.53663		
7			0.25	-10.733	-0.5366	-4.0515	-0.2026	0.33406		
8			0.3	-6.6811	-0.3341	-4.3856	-0.2193	0.11478		
9			0.35	-2.2956	-0.1148	-4.5003	-0.225	-0.1102		

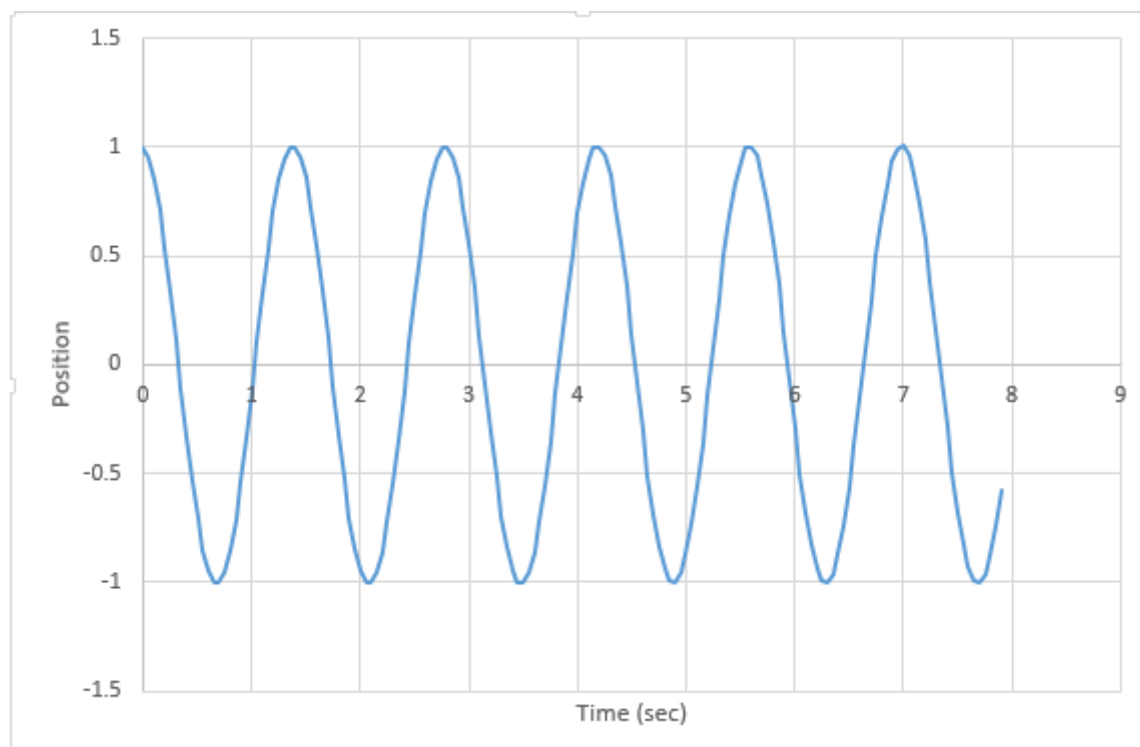
Sheet1

READY AVERAGE: 1.962582751 COUNT: 320 SUM: 624.1013148 100%

انتخاب نوع ترسیمه برای رسم نمودار:

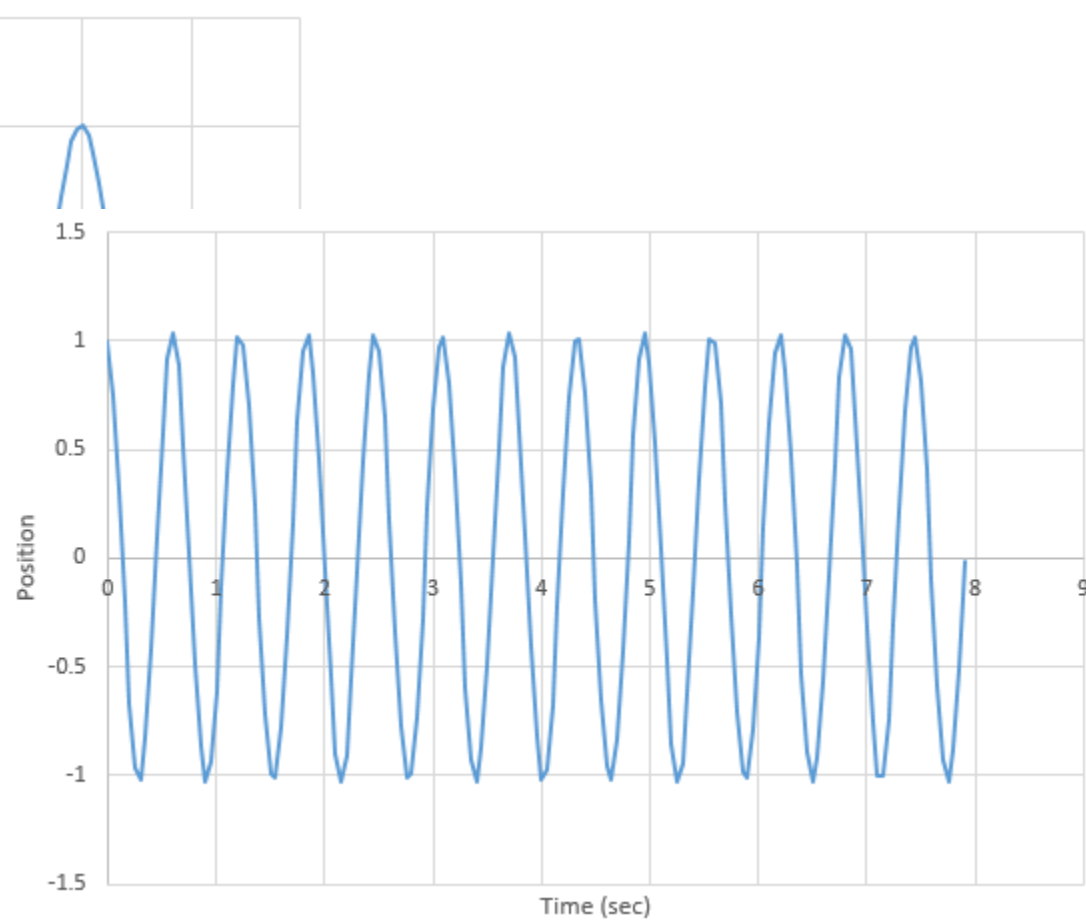
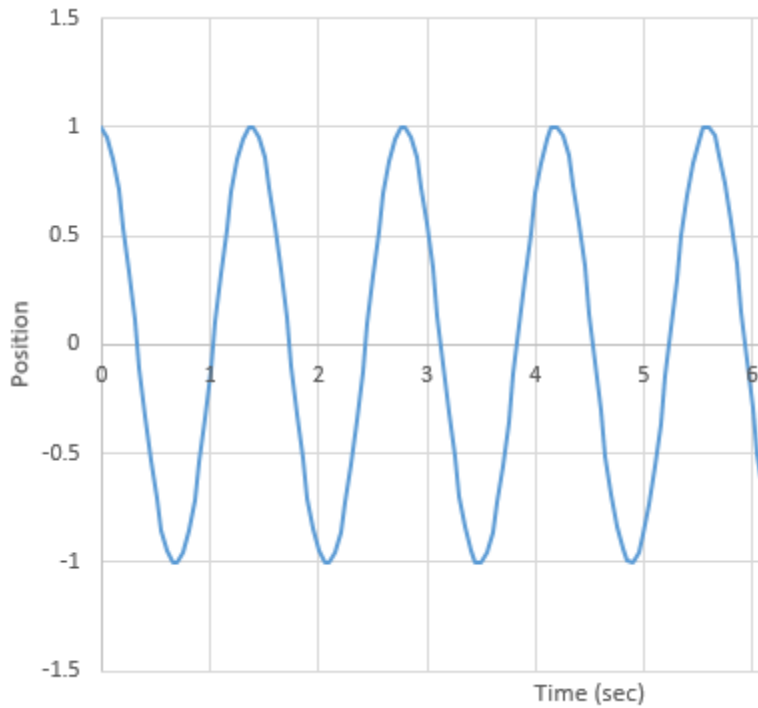


رسم نمودار موقعیت بر حسب زمان:



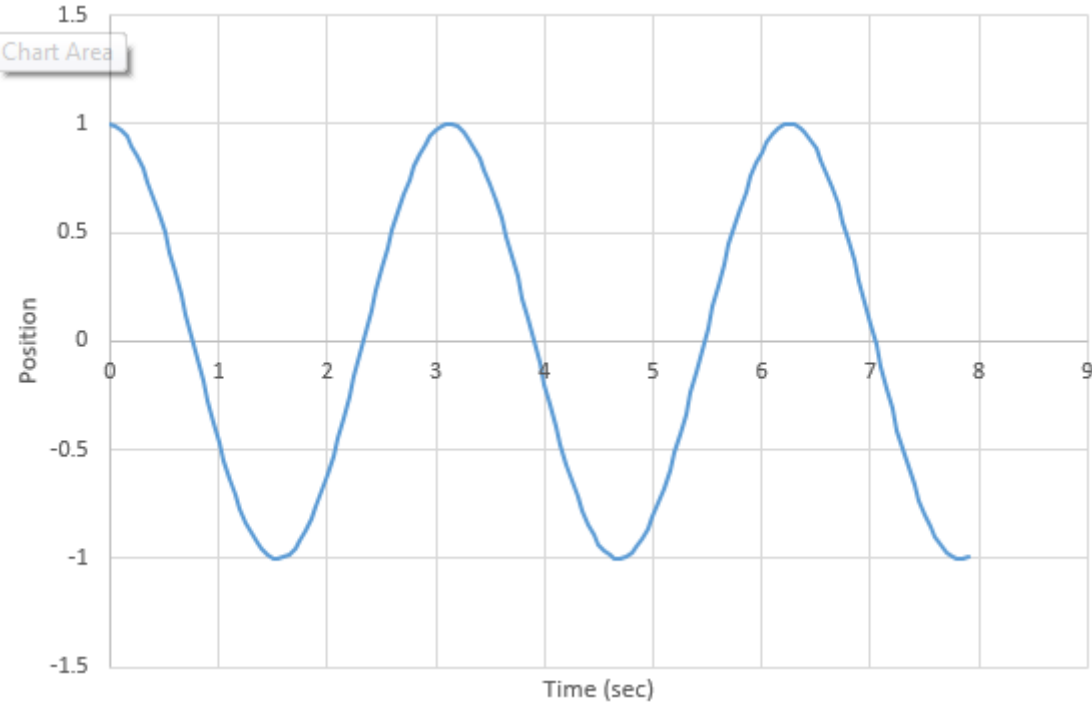
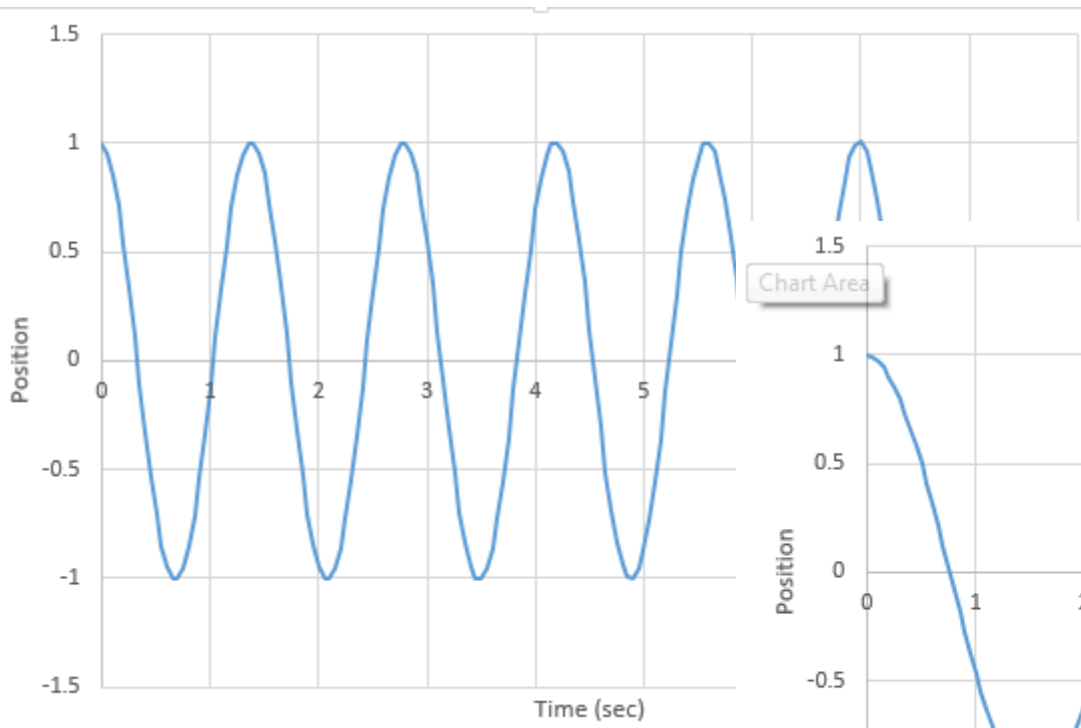
بررسی اثر تغییر P بر نمودار موقعیت بر حسب زمان:

$P = 20 \Rightarrow P = 100$



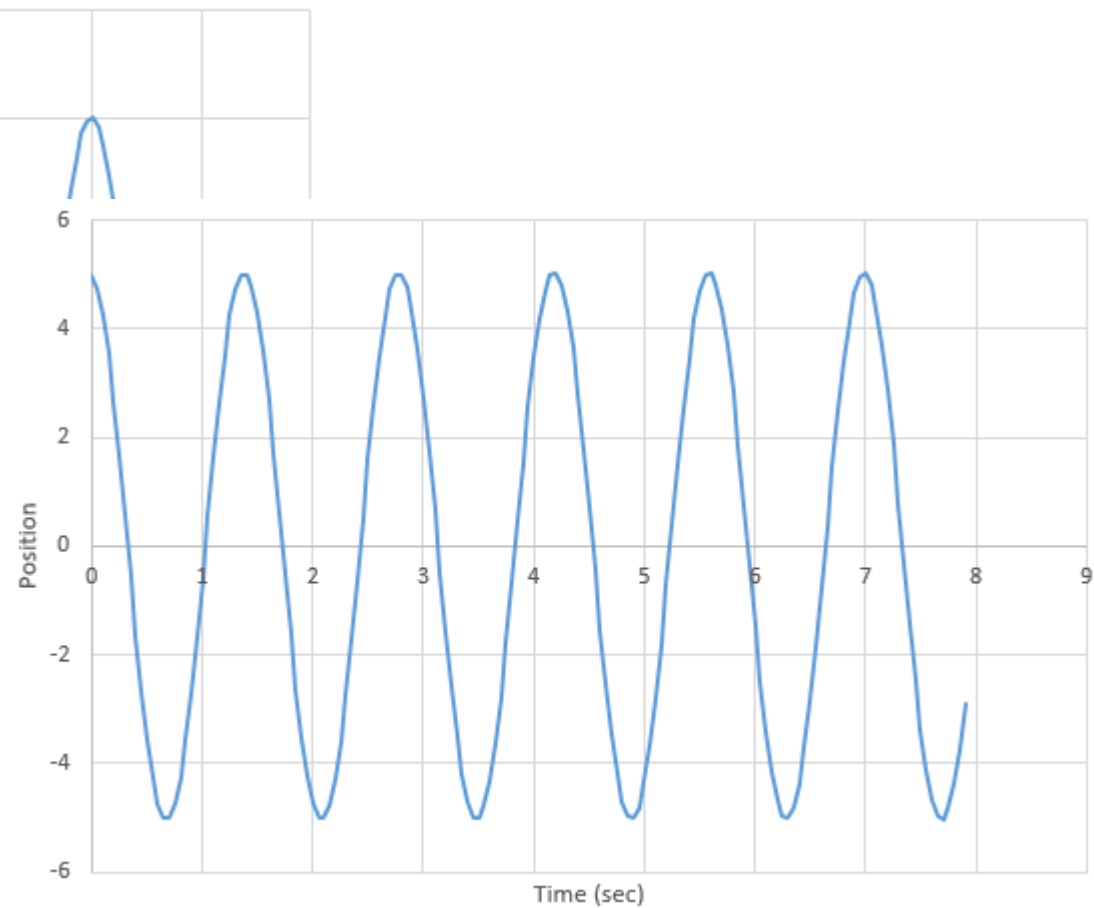
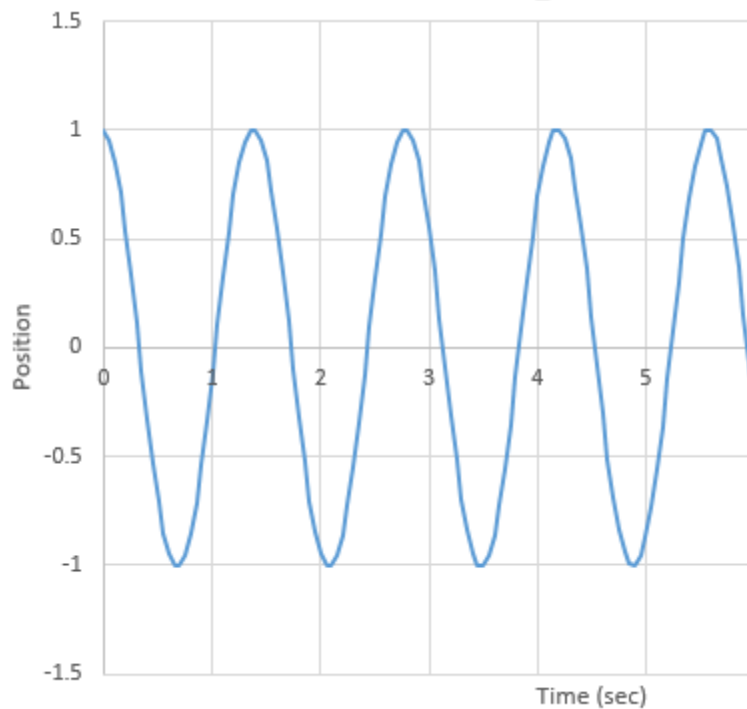
بررسی اثر تغییر P بر نمودار موقعیت بر حسب زمان:

$$P = 20 \Rightarrow P = 4$$



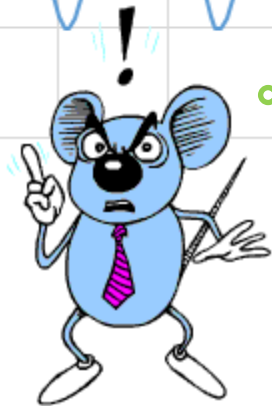
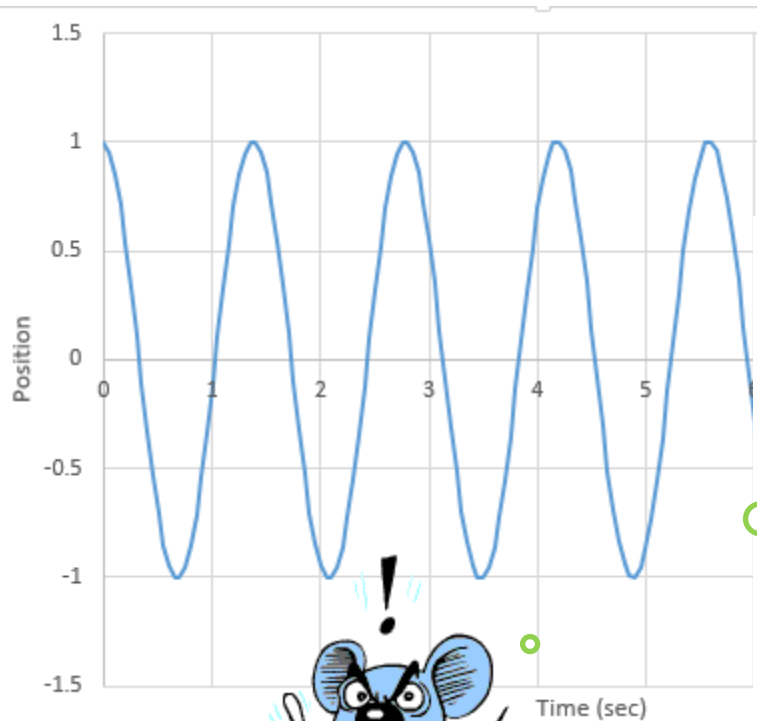
بررسی اثر تغییر موقعیت اولیه بر نمودار موقعیت بر حسب زمان:

$S = 1 \Rightarrow S = 5$

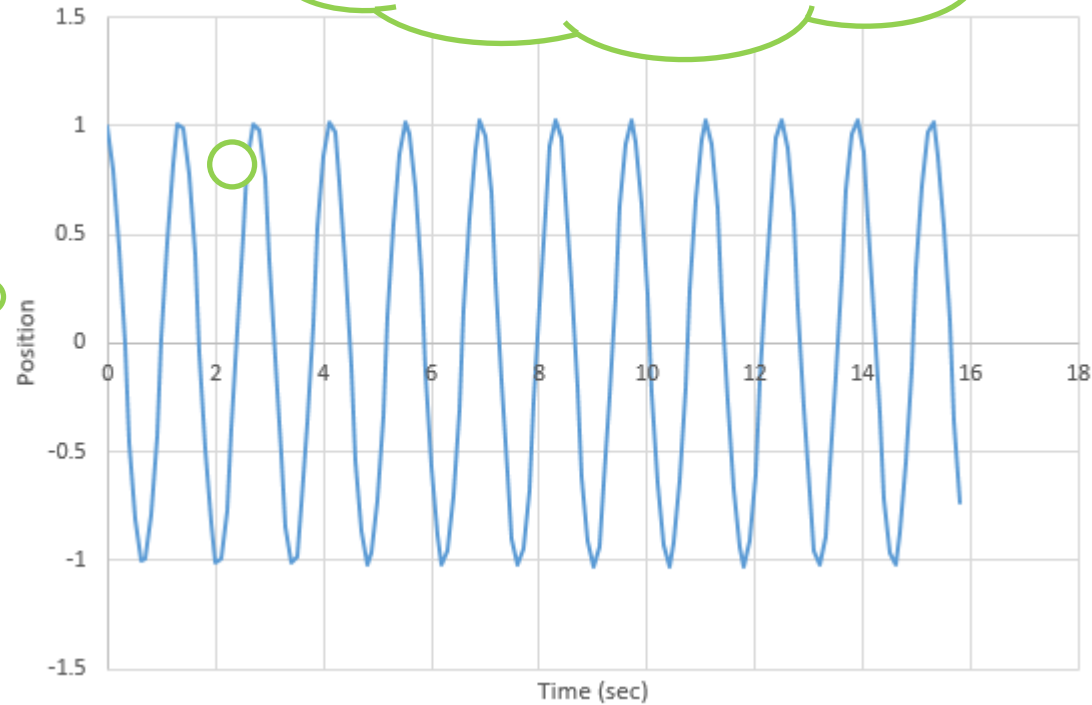


بررسی اثر تغییر گام زمانی بر نمودار موقعیت بر حسب زمان:

$$\Delta t = 0.05 \Rightarrow \Delta = 0.1$$

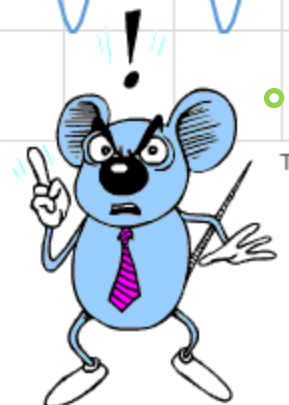
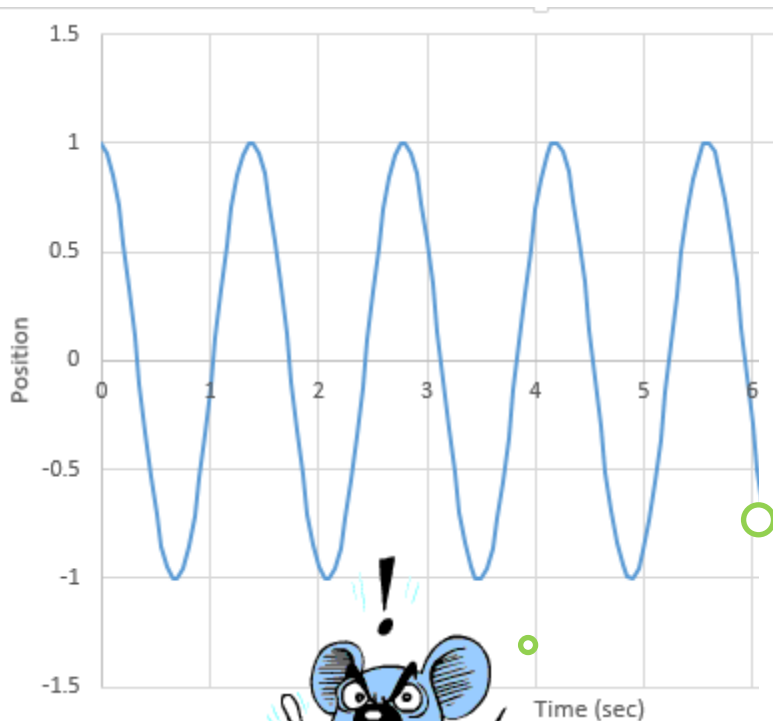


به شکستگی‌های ترسیمه
توجه داشته باشید!

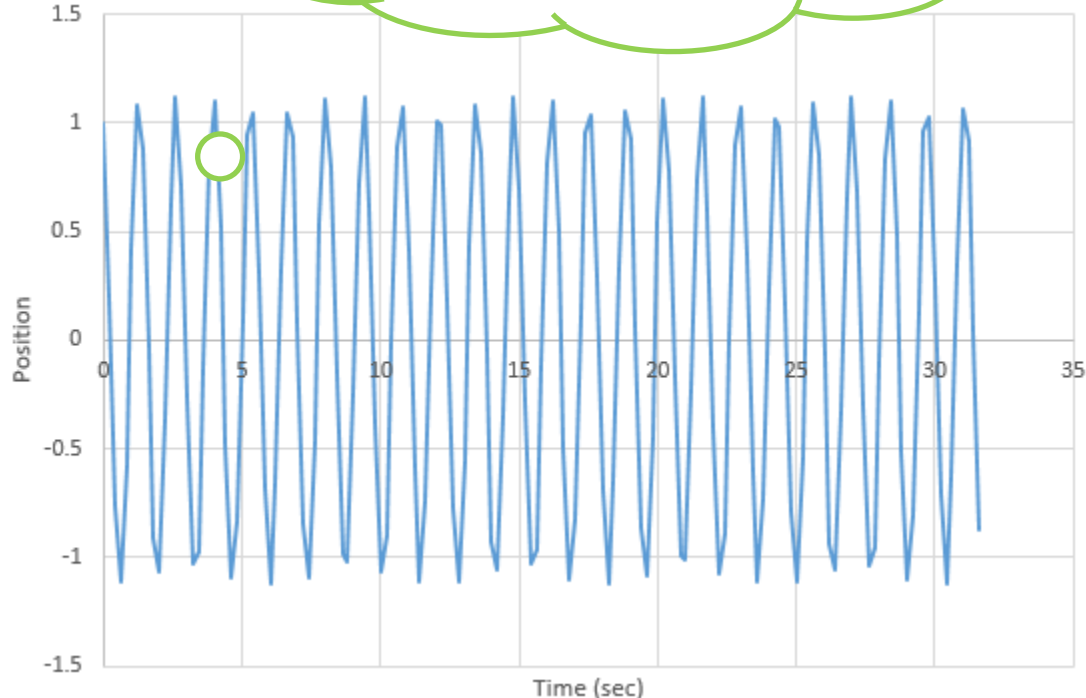


بررسی اثر تغییر گام زمانی بر نمودار موقعیت بر حسب زمان:

$$\Delta t = 0.05 \Rightarrow \Delta = 0.2$$

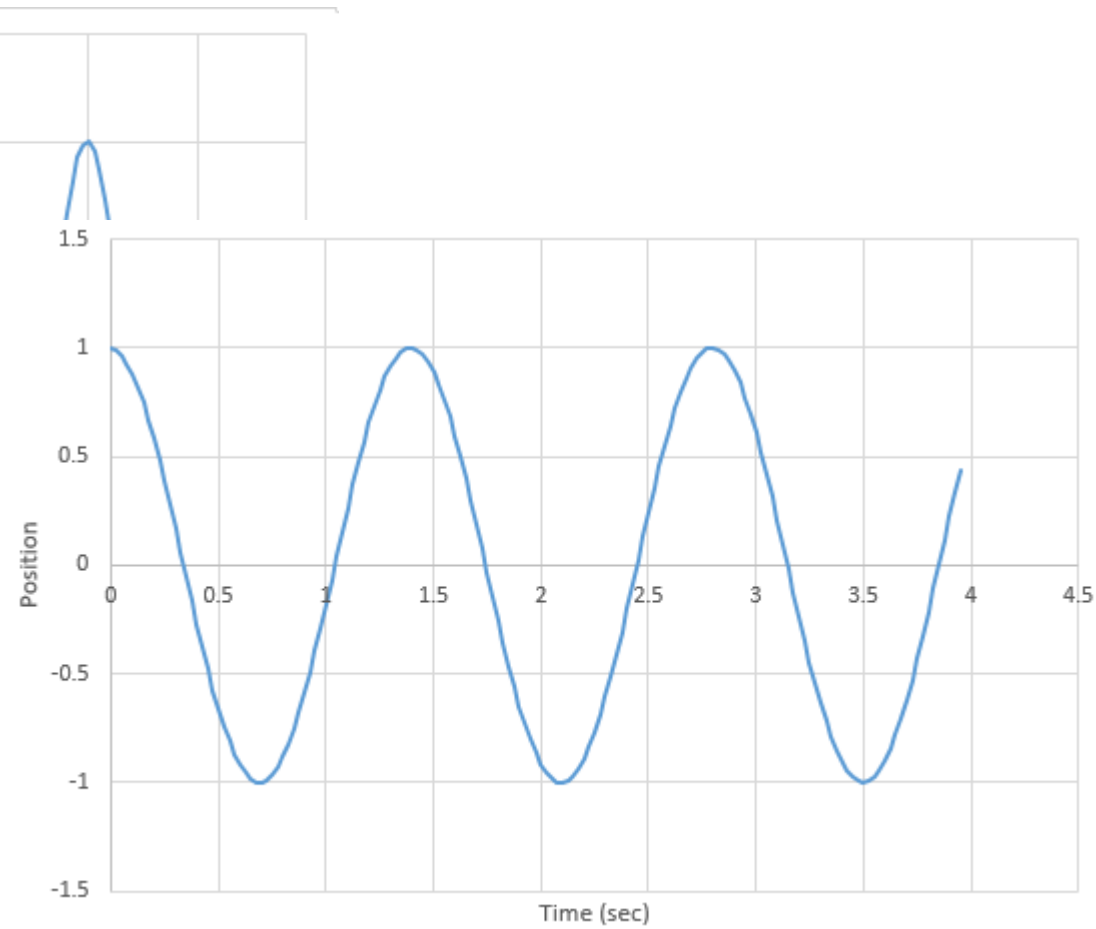
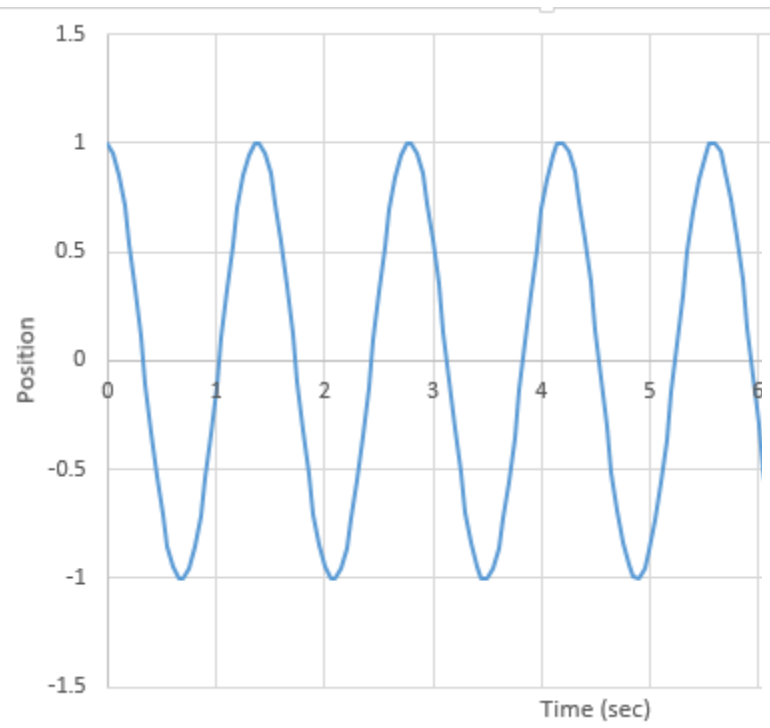


به شکستگی‌ها و نادقیقی
ترسیمه توجه داشته باشید!



بررسی اثر تغییر گام زمانی بر نمودار موقعیت بر حسب زمان:

$\Delta t = 0.05 \Rightarrow \Delta = 0.025$



سوالات چالشی

- ❖ اگر P منفی باشد چه اتفاقی می افتد؟ چرا چنین است؟ P به چه معنا است؟
- ❖ اگر اندازه‌ی متغیر گام زمانی را اصلاح کنید چه اتفاقی می افتد؟
- ❖ مدل را اصلاح کنید تا نشانگر نوسان گر میرا شود (جزئیات در یادداشت‌ها داده شده است).

فهرست مطالب

- دورنا
- ابتدا جوجه ای گروهی فرض می کنیم (فرض ساده کننده)
- شبیه سازی های عددی
- استقرال گیری عددی و معادلات دیفرانسیل : روش اولر ←
- حل معادله دیفرانسیل فر
- جمع بندی

روش عددی شیب‌سازی فتر

حساب می‌کنیم نرخ تغییرات مقدار چقدر است و اندازه‌ی آن را در زمان سپری شده ضرب می‌کنیم. حاصل را با مقدار قبلی جمع می‌کنیم تا مقدار جدید به دست آید. سپس مقدار جدید را به عنوان مقدار قبلی در نظر گرفته و روند را تکرار می‌کنیم. این ایده از تعریف مشتق گرفته شده است:

یادآوری تعریف مشتق : $\frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

⇒ $\frac{df(x)}{dx} \approx \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ $f'(x) \approx \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

⇒ $f'(x) \Delta x + f(x) \approx f(x + \Delta x)$

به نمادگذاری‌های متنوع مشتق دقت کنید.

روش رانگ-کوتا

این روش تخمین مقدار جدید از مقدار قبلی اگرچه ساده است ولی مستعد خطا است. برای توابعی که ما استفاده خواهیم کرد اگر اندازه‌ی گام کوچکی انتخاب کنیم تقریباً همواره به اندازه‌ی کافی خوب خواهد بود. برایمان به اندازه‌ی کافی خوب است زیرا توابعی که مدل خواهیم کرد دارای تغییرات به نسبت ملایمی هستند. در حالت کلی، برای محاسبات دقیق‌تر یا وقتی این رهیافت به توابعی پیچیده و با تغییرات سریع اعمال می‌شوند ممکن است بخواهیم از روش بروزرسانی دقیق‌تری استفاده کنیم. یک روش استاندارد، روش رانگ-کوتا (Runge-Kutta method) است.

فهرست مطالب

- دورنا
- ابتدا بوجه ای گروهی فرض می کنیم (فرض ساده کننده)
- شبیه سازی های عددی
- استخراج گیری عددی و معادلات دیفرانسیل: روش اولر
- حل معادله دیفرانسیل فر ←
- جمع بندی

حل تحلیلی معادله دیفرانسیل فر

در مبحث دوم آموختیم برای معادلاتی که در آنها متغیر وابسته در مشتق و در عبارت سمت راست ظاهر می‌گردد معمولاً شامل عبارتی نمایی است.

(برای مقداری از r) $s = e^{rt}$: حدس اولیه

$$\Rightarrow \frac{ds}{dt} = r e^{rt} \quad \Rightarrow \frac{d^2s}{dt^2} = r^2 e^{rt}$$

معادله‌ی حاکم: $\frac{d^2s}{dt^2} = -Ps$

$$\Rightarrow r^2 e^{rt} = -P e^{rt}$$

چه مقداری از r یا t می‌تواند نمایی را صفر کند؟ 

$$\Rightarrow r^2 + P = 0$$

$$\Rightarrow r^2 = -P \quad \Rightarrow r = \pm i\sqrt{P}$$

$$\Rightarrow s = e^{i\sqrt{P}t} + e^{-i\sqrt{P}t} = 2\cos(\sqrt{P}t)$$

فهرست مطالب

- دورنا
- ابتدا جوجه ای گروهی فرض می کنیم (فرض ساده کننده)
- شبیه سازی های عددی
- استخراج گیری عددی و معادلات دیفرانسیل: روش اولر
- حل معادله دیفرانسیل فر
- جمع بندی ←

جمع‌بندی

- ❖ مفاهیم شبیه‌سازی را معرفی کردیم.
- ❖ اصطلاحات نشانه‌گذاری‌های معادله دیفرانسیل را معرفی کردیم.
- ❖ برای شبیه‌سازی روی مثالی کلاسیک تمرکز کردیم تا به ریاضیات پردازیم.
- ❖ در آینده به کمک این اطلاعات به شبیه‌سازی نورون اسپایکی خواهیم پرداخت.
- ❖ آموختیم وقتی می‌خواهیم معادله دیفرانسیل را حل تحلیلی کنیم حدس بزنیم.
- ❖ آموختیم برای کاربردهای ما، تابع نمایی حدس بزنیم.
- ❖ ضرورتی به حل تحلیلی نیست ولی انجام آن کمک‌کننده است.

فهرست مطالب

- دورنا ✓
- ابتدا بوجه ای گروهی فرض می کنیم (فرض ساده کننده) ✓
- شبه سازی های عددی ✓
- انگزال گیری عددی و معادلات دیفرانسیل: روش اولر ✓
- حل معادله دیفرانسیل فر ✓
- جمع بندی ✓

استاد تغییر باشیم

نه قربانی تقدیر...



آموزش سخنرانی و فن بیان www.Bahrampoor.com